Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 1, 22. 2. 2024

REÁLNÁ ČÍSLA: ÚPLNOST A NESPOČETNOST

Na `https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24.html` je odkaz na rozepsanou knihu **K** rozvíjející tyto přednášky z MA 1.

Dva paradoxy

• *Co analyzuje matematická analýza?* Nekonečné operace a procesy. Podíváme se na dva paradoxy spjaté s nekonečnem. Zřejmě $S = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots = 0$. Po změně pořadí sčítanců se ale součet změní: $S = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \cdots > 0$, neboť $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n(2n-1)} > 0$. Je tu i zvláštní nekonečná tabulka s položkami -1, 0 a 1:

1	-1	0	0	0	$\ldots$	$\sum = 0$
0	1	-1	0	0	$\ldots$	$\sum = 0$
0	0	1	-1	0	$\ldots$	$\sum = 0$
0	0	0	1	-1	$\ldots$	$\sum = 0$
0	0	0	0	1	$\ldots$	$\sum = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\sum = 1$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\ldots$	$\sum = 1 \setminus 0$

Celkový součet po řádcích je 0, ale po sloupcích je 1??

• *Úloha.* Má-li tabulka nezáporné položky, paradox nenastane. Oba celkové součty pak vyjdou stejně, mohou ale být $+\infty$.

Logické a množinové značení

• *Logické značení.* Nechť φ, ψ, θ, $\ldots$ jsou výroky. Logické spojky jsou $\varphi \vee \psi$ – nebo, $\varphi \wedge \psi$ – a (zároveň), $\varphi \Rightarrow \psi$ – implikace,

$\varphi \iff \psi$ – ekvivalence a $\neg\varphi$ – negace. Například pro každou pravdivostní hodnotu výroků φ a ψ (buď pravda, anebo nepravda) je výrok $\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi$ pravdivý, je to tautologie. Nechť $\varphi(x)$ je výroková forma. Obecný a existenční kvantifikátor se značí po řadě $\forall$ a $\exists$. Výroky $\forall x\varphi(x)$ a $\exists x\varphi(x)$ říkají, že pro každé x z daného oboru je $\varphi(x)$ pravda a že v daném oboru existuje takové x, že $\varphi(x)$ je pravda.

• *Úloha.* Pro každou výrokovou formu $\varphi(x)$ jsou oba výroky $\neg\exists x\varphi(x) \iff \forall x\neg\varphi(x)$ a $\neg\forall x\varphi(x) \iff \exists x\neg\varphi(x)$ pravdivé.

$\forall$ se často vynechává. Například v oboru přirozených čísel zápisu $m+n=n+m$ rozumíme tak, že $\forall m\forall n\; m+n=n+m$.

• *Množiny.* Symbol $\emptyset$ označuje prázdnou množinu – množinu bez prvků. Značení $x \in A$ (resp. $x \notin A$) znamená, že množina x je (resp. není) prvkem množiny A. Každou konečnou množinu[1] lze (teoreticky) zapsat výčtem jejích prvků. Jako třeba množinu $M = \{a, b, 2, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{a\}\}$.

• *Úloha.* Kolik má M prvků?

Množinu lze zapsat i pomocí vlastnosti jejích prvků. Například množina $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, m \in \mathbb{N}\; n = 2\cdot m\}$ je množina (všech) sudých přirozených čísel. Jak jsme ale zadali $\mathbb{N}$?

• *Vztahy mezi množinami.* A je podmnožinou B, $A \subset B$, pokud každé $x \in A$ je i prvkem B. Množiny A a B jsou disjunktní, pokud nemají společný prvek. Množiny A a B se rovnají, $A = B$, právě když $\forall x(x \in A \iff x \in B)$ – toto je axiom extenzionality.

• *Operace s množinami.* Sjednocení $A \cup B$ množin A a B je množina $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. Průnik $A \cap B$ množin A a B je

[1]Přesněji, každou dědičně konečnou množinu, viz **K**.

množina $\{x \in A \mid x \in B\}$. Suma $\bigcup A$ množiny A je množina $\{x \mid \exists\, b \in A\,(x \in b)\}$. Průnik $\bigcap A$ neprázdné množiny A je množina $\{x \mid \forall\, b \in A\,(x \in b)\}$. Rozdíl $A \setminus B$ množin A a B je množina $\{x \in A \mid x \notin B\}$. Potence množiny A je množina $\{X \mid X \subset A\}$. Absolutní hodnota $|X|$ označuje počet prvků konečné množiny X.

• *Úlohy.* $|\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| =?$ A a B jsou disjunktní, právě když $A \cap B = \emptyset$.

Uspořádané dvojice a trojice

V r. 1921 polský matematik *Kazimierz Kuratowski (1896–1980)* předložil tuto definici.

Definice 1 (usp. dvojice) *(Uspořádaná) dvojice množin A a B je množina $(A,\, B) := \{\{B,\, A\},\, \{A\}\}$.*

• *Úloha.* Pomocí axiomu extenzionality dokažte vlastnost dvojic, že $(A, B) = (C,\, D) \iff A = C \wedge B = D$.

(Uspořádaná) trojice množin A, B a C je množina $(A, B, C) := \{(1, A), (2, B), (3, C)\}$. Podobně definujeme (uspořádanou) čtveřici $(A, B, C, D) := \{(1, A), \ldots, (4, D)\}$ a tak dál. Častá definice trojice $(A, B, C) := (A, (B, C))$ není úplně dobrá: není jasné, zda jde o trojici množin A, B a C nebo o dvojici množin A a (B, C).

Funkce

• *Kartézský součin.* Pro množiny A a B jejich (kartézský) součin $A \times B$ je množina $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Každá podmnožina $C \subset A \times B$ je (binární) relace mezi A a B. Místo $(a, b) \in C$ píšeme $a\,C\,b$, např. $2 < 5$. Pokud $A = B$, mluvíme relaci na množině A.

Relace C je funkcionální, pokud pro každé $a \in A$ existuje jediné $b \in B$, že $(a, b) \in C$. Píšeme $C(a) = b$.

Definice 2 (funkce) *Funkce (zobrazení) f z množiny A do množiny B, psáno $f\colon A \to B$, je trojice (A, B, f), kde f je funkcionální relace mezi A a B.*

A je definiční obor funkce f a B je její obor hodnot. V $f(a) = b$ prvek b je hodnota funkce f na argumentu a. Pro množiny $C \subset A$ a $D \subset B$ a funkci $f\colon A \to B$ definujeme obraz množiny C funkcí f jako množinu $f[C] := \{f(a) \mid a \in C\}$ $(\subset B)$. Vzor množiny D funkcí f je množina $f^{-1}[D] := \{a \in A \mid f(a) \in D\}$ $(\subset A)$,

• *Druhy funkcí.* Nechť $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ a $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, $[0] = \emptyset$. Nechť X je libovolná množina. Posloupnost (v X) je funkce $a\colon \mathbb{N} \to X$. Píšeme $a_n := a(n)$ a $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset X$. Slovem (nad abecedou X) rozumíme funkci $u\colon [n] \to X$. Píšeme $u_i := u(i)$ a $u = u_1 u_2 \dots u_n$. Pro $n = 0$ máme prázdné slovo $u = \emptyset$. (Binární) operace (na množině X) je funkce $o\colon X \times X \to X$. Píšeme $a\, o\, b = c$, např. $1 + 1 = 2$.

Funkce $f\colon X \to Y$ je prostá (injektivní, injekce), pokud vždy $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Je na (surjektivní, surjekce), pokud $f[X] = Y$. Je bijekce (bijektivní), je-li na a prostá. Je konstantní, když existuje $c \in Y$, že vždy $f(x) = c$. Konečně f je identická, když vždy $f(x) = x$.

• *Operace s funkcemi.* Nechť $f\colon X \to Y$ je prostá funkce. Její inverzní funkce (inverz) f^{-1} je $f^{-1}\colon f[X] \to X$, kde $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Pro dvě funkce $g\colon X \to Y$ a $f\colon U \to V$ jejich složená funkce (složenina) $f \circ g = f(g)\colon X' \to V$ má na $X' =$

$\{x \in X \mid g(x) \in U\}$ ($\subset X$) hodnoty $f(g)(x) = f(g(x))$. Pro funkci $f\colon X \to Y$ pomocí $M(f) := X$ označíme její definiční obor.

Relace ekvivalence a rozklady

• *Druhy relací.* Nechť $R \subset A \times A$ je relace na A. Řekneme, že R je reflexivní (resp. ireflexivní), když pro každé $a \in A$ je aRa (resp. $\neg aRa$). R je symetrická, když vždy aRb implikuje bRa. R je tranzitivní, když vždy aRb a bRc implikují, že aRc.

Definice 3 (RE) *$R \subset A \times A$ je relace ekvivalence, krátce* RE*, je-li reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

Bloky RE R na A jsou množiny $[a]_R := \{b \in A \mid bRa\}$ ($\subset A$), $a \in A$.

• *Rozklady.* Rozkladem (anglicky partition) množiny A rozumíme každou množinu B, že (i) $\emptyset \notin B$, (ii) $\bigcup B = A$ a (iii) $X, Y \in B \Rightarrow X = Y$ nebo $X \cap Y = \emptyset$.

• *Úloha.* Pro RE R na A je $\{[a]_R \mid a \in A\}$ rozklad množiny A.

Definice 4 (rozklad podle RE) *Pro* RE *R na A rozklad $\{[a]_R \mid a \in A\}$ označíme jako A/R.*

Lineární uspořádání

Relace R na A je trichotomická, když pro každé $a, b \in A$ je aRb nebo bRa nebo $a = b$.

Definice 5 (LU) *Lineární uspořádání (na A),* LU*, je ireflexivní, tranzitivní a trichotomická relace na A.*

Pro LU $<$ na A píšeme $(A, <)$. Značení $a \leq b$ znamená, že $a < b$ nebo $a = b$. Dále $a > b$ znamená, že $b < a$, a podobně pro $a \geq b$.

• *Úloha.* V LU $(A, <)$ pro každé dva prvky $a, b \in A$ nastává právě jedna z možností $a < b$, $b < a$, $a = b$.

• *Suprema a infima.* Nechť $(A, <)$ je LU a $B \subset A$. Množina B je shora omezená, existuje-li $h \in A$, že pro každé $b \in B$ je $b \leq h$. Prvek h pak je horní mez množiny B. Množinu horních mezí množiny B označíme jako $H(B)$ $(\subset A)$. Podobně definujeme omezenost zdola, dolní meze a množinu $D(B)$ $(\subset A)$ dolních mezí množiny B. Prvek $m \in B$ je maximum (největší prvek) množiny B, psáno $m = \max(B)$, když m je horní mez množiny B. Podobně se definuje minimum $\min(B)$ (nejmenší prvek) množiny B. Pro $B = \emptyset$ není ani maximum ani minimum definované.

Definice 6 (sup a inf) *Nechť* $(A, <)$ *je* LU *a* $B \subset A$. *Pak* $\sup(B) = \min(H(B))$, *resp.* $\inf(B) = \max(D(B))$, *je tzv. supremum, resp. infimum, množiny* B.

• *Úlohy.* Maxima, minima, suprema a infima v LU jsou jednoznačná, když existují.

Racionální čísla neboli zlomky

Naším cílem je zavést reálná čísla. Vybudujeme je ze zlomků, které teď připomeneme. $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ je množina celých čísel. Nechť $Z := \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, kde $\frac{m}{n} := (m, n)$. Těmto dvojicím říkáme protozlomky. Relaci $\sim$ na Z definujeme jako $\frac{k}{l} \sim \frac{m}{n} \iff kn = lm$.

• *Úloha.* Dokažte, že $\sim$ je RE.

Položíme $\mathbb{Q} := Z/\sim$ a blokům $[\frac{m}{n}]_\sim \in \mathbb{Q}$ říkáme zlomky nebo racionální čísla. Místo $[\frac{m}{n}]_\sim$ často píšeme jen $\frac{m}{n}$ či m/n. Máme nulu $0_\mathbb{Q} := [\frac{0}{1}]_\sim$ a jedničku $1_\mathbb{Q} := [\frac{1}{1}]_\sim$. Operace sčítání $+$ a násobení $\cdot$ na $\mathbb{Q}$ a LU $(\mathbb{Q}, <)$ bereme jako známé a nebudeme je zde definovat.

• *Uspořádaná tělesa.* Uspořádané těleso, UT, je algebraická struktura $X_{\mathrm{UT}} = (X, 0_X, 1_X, +, \cdot, <)$, v níž $0_X, 1_X \in X$ jsou dva různé prvky, jež jsou neutrální vzhledem k operacím $+$ a $\cdot$ na množině X, a $(X, <)$ je LU. Tyto operace jsou asociativní a komutativní a $\cdot$ je distributivní vzhledem k $+$. Každý prvek v X, resp. každý nenulový prvek, má aditivní, resp. multiplikativní, inverz. Což jsou axiomy tělesa. UT splňuje ještě dva další axiomy uspořádání, že $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$ a že $\alpha, \beta > 0_X \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0_X$. Základním faktem, který tu nedokazujeme, je, že $(\mathbb{Q}, 0_\mathbb{Q}, 1_\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ je UT.

• *Úloha.* Dokažte, že $\frac{0}{1} \not\sim \frac{1}{1}$. Tedy $0_\mathbb{Q} \neq 1_\mathbb{Q}$.

Protozlomek $\frac{m}{n}$ je v základním tvaru, když $n > 0$ a čísla m a n jsou nesoudělná (nedají se zkrátit).

• *Úloha.* Pro každý zlomek $\alpha \in \mathbb{Q}$ existuje právě jeden protozlomek $p_\alpha = \frac{m}{n}$ v základním tvaru, že $p_\alpha \in \alpha$. Dále $\alpha \neq \beta \Rightarrow p_\alpha \neq p_\beta$.

Neúplnost lineárního uspořádání zlomků

• *Úplná* LU. LU $(A, <)$ je úplné, pokud každá neprázdná a shora omezená množina $B \subset A$ má supremum $\sup(B) = \min(H(B))$.

• *Úloha.* Co je supremem $\emptyset$? Co je supremem shora neomezené podmnožiny?

• *Neúplnost* LU *zlomků.* Ukážeme, že LU $(\mathbb{Q}, <)$ není úplné. Plyne to z následující věty, kterou dokážeme indukcí. Tento axiom říká, že každá neprázdná množina $X \subset \mathbb{N}$ má nejmenší prvek.

Věta 7 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) *Rovnice $x^2 = 2$ nemá v oboru $\mathbb{Q}$ řešení.*

Důkaz. Sporem. Nechť pro nějaké $a, b \in \mathbb{N}$ se $(a/b)^2 = 2$. Tedy $a^2 = 2b^2$ a podle indukce můžeme předpokládat, že číslo a v této rovnosti je minimální. Číslo a^2 je sudé, tedy i a je sudé a $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$(2c)^2 = 2b^2 \rightsquigarrow 4c^2 = 2b^2 \rightsquigarrow b^2 = 2c^2\ .$$

Dostali jsme nové řešení $b, c \in \mathbb{N}$ rovnice $x^2 = 2y^2$. Ale $b < a$, což je ve sporu s minimalitou řešení $a, b \in \mathbb{N}$. □

Důsledek 8 *Lineární uspořádání* $(\mathbb{Q}, <)$ *není úplné.*

Důkaz. Ukážeme, že $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ je neprázdná a shora omezená množina bez suprema. První dvě vlastnosti jsou jasné, $1 \in X$ a $x < 2$ pro každé $x \in X$. Pro spor nechť $s = \sup(X) \in \mathbb{Q}$, patrně $s > 0$. Když $s^2 > 2$, existuje zlomek r, že $0 < r < s$ a stále $(s - r)^2 > 2$. Pak ale $s - r > x$ pro každé $x \in X$. To je spor s tím, že s je nejmenší horní mez množiny X. Když $s^2 < 2$, existuje zlomek $r > 0$, že stále $(s + r)^2 < 2$. Tedy $s + r \in X$ a máme spor s tím, že s je horní mez množiny X. Podle trichotomie relace $<$ musí být $s^2 = 2$. To ale podle předchozí věty není možné. □

Reálná čísla

• *Cauchyovy posloupnosti.* Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ je Cauchyova, pokud pro $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, že $m, n \ge n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \le 1/k$. Množinu těchto posloupností označíme jako C. Relaci shodnosti $\sim$ na C definujeme jako $(a_n) \sim (b_n)$, pokud pro $\forall\, k\ \exists\, n_0$, že $n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| \le 1/k$.

- *Úloha.* Dokažte, že $\sim$ je RE na C.

Definice 9 (reálná čísla) *Jejich množina je* $\mathbb{R} := C/\sim$.

Zavedeme aritmetiku reálných čísel. Nula a jednička jsou $0_{\mathbb{R}} := [(0, 0, \dots)]_{\sim}$ a $1_{\mathbb{R}} := [(1, 1, \dots)]_{\sim}$. Součet a součin je

$$[(a_n)]_{\sim} + [(b_n)]_{\sim} := [(a_n + b_n)]_{\sim} \ \text{ a } \ [(a_n)]_{\sim} \cdot [(b_n)]_{\sim} := [(a_n \cdot b_n)]_{\sim} \,.$$

LU $(\mathbb{R}, <)$ je dáno jako

$$[(a_n)]_{\sim} < [(b_n)]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists\, k\ \exists\, n_0 \left(n \ge n_0 \Rightarrow a_n < b_n - 1/k\right) \,.$$

Snadno se ověří, že tyto definice operací a LU jsou korektní a že $(\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$ je UT. Zobrazení $\mathbb{Q} \ni a \mapsto [(a, a, \dots)]_{\sim} \in \mathbb{R}$ ukazuje, že UT $\mathbb{Q}$ je vnořené do UT $\mathbb{R}$.

Úplnost lineárního uspořádání reálných čísel

$(\mathbb{R}, <)$ je úplné. Brzy ale uvidíme, čím se za to platí.

Věta 10 (úplnost reálných čísel) LU $(\mathbb{R}, <)$ *je úplné.*

Důkaz. $B \subset \mathbb{R}$ buď neprázdná a shora omezená. Popíšeme postup generující $\sup(B)$, důkaz odsouváme do **K**. Definují se v něm dvě posloupnosti (a_n), $(b_n) \subset \mathbb{Q}$ $(\subset \mathbb{R})$.

1. $a_1 \in \mathbb{Q}$ je libovolná horní mez množiny B a $b_1 := 1$.

2. $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ jsou definované. Je $a_n - b_n$ horní mez množiny B?

3. Když je, pak $a_{n+1} := a_n - b_n$, $b_{n+1} := b_n$ a jdeme na krok 2.

4. Když není, pak $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := b_n/2$ a jdeme na krok 2.

Ukáže se, že $(a_n) \in C$ a $[(a_n)]_{\sim} = \sup(B)$, viz **K**. $\square$

- *Úloha.* Pro každou B a každé a_1 krok 4 proběhne nekonečněkrát.

• *Úloha.* Nechť $(F, <)$ je LU v úplném UT. Dokažte, že každá neprázdná a zdola omezená množina $B \subset F$ má infimum.

Věta 11 **($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$)** *Rovnice $x^2 = 2$ má v oboru $\mathbb{R}$ řešení.*

Důkaz. Vezmeme množinu $X = \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 < 2\}$. Podle věty 10 existuje supremum $s = \sup(X) \in \mathbb{R}$. Argumenty jako v důkazu důsledku 8 ukazují, že nenastává ani $s^2 < 2$ ani $s^2 > 2$. Tedy $s^2 = 2$. $\square$

Takto vyřešíme i obecnější rovnice: když $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce s $f(a)f(b) \le 0$, pak $f(c) = 0$ pro nějaké $c \in [a, b]$ (Bolzano–Cauchyova věta).

Reálná čísla jako nekonečné desetinné rozvoje

Reálná čísla v definici 9 jsou teoretická. Často je zapisujeme jinak, jako <u>(nekonečné) desetinné rozvoje</u>. Rozumíme tím nekonečné posloupnosti

$$\rho = a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_0\, .\, a_{-1}\, a_{-2}\, \ldots\ ,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \pm$, pro každé $m \le n - 1$ je $a_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ a když $a_{n-1} = 0$, pak $n = 1$. Například v rozvoji čísla $\pi = 3.1415\ldots$ je $n = 1$, $a_1 = +$, $a_0 = 3$, $a_{-1} = 1$, $a_{-2} = 4$ a tak dále. Množinu rozvojů <u>označíme jako R</u>. Definujeme funkci $F\colon R \to \mathbb{R}$,

$$F(\rho) = \big[\big(\varepsilon a_{n-1}10^{n-1},\ \varepsilon(a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2}),\ \ldots\big)\big]_{\sim}$$

s $\varepsilon = 1$ pro $a_n = +$ a $\varepsilon = -1$ pro $a_n = -$. Řekneme, že rozvoje ρ a ρ' jsou <u>sdružené</u>, pokud $\{\rho, \rho'\} = \{+0.00\ldots, -0.00\ldots\}$ nebo pokud $\{\rho, \rho'\}$ jsou tvaru $\{+23.5699\ldots, +23.5700\ldots\}$ nebo $\{-100.00\ldots, -99.99\ldots\}$ nebo $\cdots$.

- *Úloha.* Co se tím přesně myslí?

> **Věta 12 (R a $\mathbb{R}$)** *$F\colon R \to \mathbb{R}$ je na. $F(\rho) = F(\rho') \iff \rho = \rho'$ nebo ρ a ρ' jsou sdružené rozvoje.*

Důkaz je/bude v **K**. (Adekvátní věta o R je ale jiná.)

Spočetné a nespočetné množiny

- *Konečné a nekonečné množiny.* Množina X je nekonečná, když existuje prostá funkce $f\colon \mathbb{N} \to X$. Když X není nekonečná, je konečná. Dá se dokázat, že když A je konečná množina a každý její prvek $B \in A$ je konečná množina, pak i suma $\bigcup A$ je konečná množina.

- *Spočetné a nespočetné množiny.* Množina X je spočetná, když existuje bijekce $f\colon \mathbb{N} \to X$. Množina X je nejvýše spočetná, je-li konečná nebo spočetná. Množina X je nespočetná, když není nejvýše spočetná.

> **Věta 13 (spočetnost $\mathbb{Q}$)** *Množina zlomků je spočetná.*

Důkaz. Nechť $Z_{\mathrm{z}} \subset Z$ jsou protozlomky $\frac{m}{n}$ v základním tvaru (viz úloha výše). Stačí ukázat, že Z_{z} je spočetná. Pro $\frac{m}{n} \in Z_{\mathrm{z}}$ definujeme normu $\|\frac{m}{n}\| = |m| + n \in \mathbb{N}$. Pro $j \in \mathbb{N}$ vezmeme seznamy

$$Z(j) = \left(z_{1,j} < z_{2,j} < \cdots < z_{k_j,j} \mid z_{i,j} \in Z_{\mathrm{z}},\ \|z_{i,j}\| = j\right) .$$

Například

$$Z(5) = \left(\tfrac{-4}{1} < \tfrac{-3}{2} < \tfrac{-2}{3} < \tfrac{-1}{4} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{2} < \tfrac{4}{1}\right) \ \text{a}\ \ k_5 = 8 .$$

Zde $\frac{0}{5} \notin Z(5)$, protože $\frac{0}{5}$ není v základním tvaru. Patrně $j \neq j' \Rightarrow Z(j)$ a $Z(j')$ jsou disjunktní, každý $Z(j)$ je konečný (a $\neq \emptyset$)

a $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z(j) = Z_{\mathrm{z}}$. Zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to Z_{\mathrm{z}}$ definujeme jako

$$f(1) = z_{1,1},\ f(2) = z_{2,1},\ \dots,\ f(k_1) = z_{k_1,1},\ f(k_1+1) = z_{1,2}\,,$$

atd. – hodnoty funkce f nejprve projdou k_1 seřazených protozlomků v $Z(1)$, pak k_2 seřazených protozlomků v $Z(2)$, a tak dál. Obecná hodnota je pro $j \in \mathbb{N}$ rovna

$$f(k_1 + k_2 + \cdots + k_{j-1} + i) = z_{i,j},\ i \in [k_j]\,,$$

kde pro $j = 1$ tento argument funkce f definujeme jako i. Lehce se vidí, že f je bijekce. $\square$

Cantorova věta a nespočetnost $\mathbb{R}$

• *Cantorova věta.* Nespočetnost $\mathbb{R}$ odvodíme ze základní věty o množinách, jejímž autorem je *Georg Cantor (1845, Petrohrad – 1918, Halle).* Věta praví, že potence $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ je mnohem větší množina než X.

Věta 14 (Cantorova) *Pro žádnou množinu X neexistuje surjekce $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ z X na potenci množiny X.*

Důkaz. Sporem: nechť $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ je surjekce. Patrně $X \neq \emptyset$. Nechť $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ ($\subset X$). Protože f je na, existuje $y \in X$, že $f(y) = Y$. Pokud $y \in Y$, podle definice množiny Y platí, že $y \notin f(y) = Y$, spor. Pokud $y \notin Y = f(y)$, má y vlastnost definující množinu Y a $y \in Y$, opět spor. $\square$

Jako $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ označíme množinu (všech) posloupností $(a_n) \subset \{0,1\}$.

Důsledek 15 *Neexistuje funkce z $\mathbb{N}$ na $\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Důkaz. Zobrazení $g\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g((a_n)) = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}$, je bijekce. Kdyby existovala uvedená surjekce f, složenina $g \circ f$ by byla funkce z $\mathbb{N}$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, v rozporu s větou 14. $\square$

- *Daň za úplnost* $(\mathbb{R}, <)$. Je ta, že $\mathbb{R}$ je nespočetná množina.

Důsledek 16 *Neexistuje funkce z* $\mathbb{N}$ *na* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Reálná čísla bereme jako rozvoje. Vezmeme množinu $X = \{0\,.\,a_{-1}\,a_{-2}\,\dots\,a_{-n}\,\dots \mid a_{-n} \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N}\}$ těch rozvojů se znaménkem $\varepsilon = +$, které začínají nulou a za desetinnou tečkou mají jen nuly a jedničky. Zúžení hořejší funkce F na X je patrně prosté a pro $y \in Y = F[X] \subset \mathbb{R}$ tak označíme jako $F^{-1}(y)$ to jediné $x \in X$, že $F(x) = y$. Tedy $F^{-1}\colon Y \to X$ je bijekce. Pro spor nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je na. Pak máme i surjekci $f_0\colon \mathbb{N} \to Y$. Zřejmě máme bijekci $g\colon X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pak ale máme surjekci $g(F^{-1}(f_0))\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ve sporu s důsledkem 15. $\square$

DĚKUJI ZA POZORNOST