Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 9, 13. 4. 2023

TAYLOROVY ROZVOJE. PRIMITIVNÍ FUNKCE

• *Taylorovy polynomy.* Víme, že pro funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ a limitní bod $a \in M$ množiny $M \subset \mathbb{R}$ existence vlastní $f'(a)$ vede k lineární aproximaci

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + o(x - a) \ \ (x \to a)\ .$$

Existují-li derivace vyšších řádů, víme více.

Definice 1 (Taylorův polynom) *$n \in \mathbb{N}$, f, f', f'', $\dots$, $f^{(n-1)}\colon U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ a $\exists\, f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Polynom*

$$T_n^{f,\,b}(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(b)}{j!}(x - b)^j\ ,$$

to jest $f(b) + f'(b) \cdot (x - b) + \frac{f''(b)}{2} \cdot (x - b)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \cdot (x - b)^n$, nazveme Taylorovým polynomem funkce f řádu n se středem v čísle b.

Následující věta zobecňuje hořejší lineární aproximaci.

Věta 2 (o Taylorově polynomu) *n a $f\colon U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ buďte jako v předešlé definici. $T_n^{f,b}(x)$ je jediný takový reálný polynom $p(x)$ stupně nejvýše n, že*

$$f(x) = p(x) + o((x - b)^n) \ \ (x \to b)\ .$$

• *Úloha.* Pro $n \geq 2$ dokažte identitu

$$\left(T_n^{f,\,b}(x)\right)' = T_{n-1}^{f',\,b}(x)\ .$$

Pro důkaz věty 2 potřebujeme následující lemma.

Lemma 3 (o polynomech) *$b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s $\deg p \le n$. Pak $\lim_{x\to b} p(x)/(x-b)^n = 0 \Rightarrow p(x) \equiv 0$.*

Důkaz. Indukcí podle n. Pro $n = 0$ to platí, $p(x) = a_0$ a $a_0/1 \to 0$ dává $a_0 = 0$. Nechť $n > 0$ a platí předpoklad implikace. Pak $p(b) = \lim_{x\to b} p(x) = 0$. Tedy b je kořenem $p(x)$ a $p(x) = (x-b)\cdot q(x)$, kde $q(x)$ je reálný polynom stupně nejvýše $n-1$. Z

$$0 = \lim_{x\to b}\frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b}\frac{(x-b)\cdot q(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b}\frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}}$$

indukcí plyne, že $q(x)$ je nulový polynom. To je tedy i $p(x)$. $\square$

Důkaz věty 2. Nejprve indukcí podle n dokážeme aproximaci pro $T_n^{f,b}(x)$, tj. že $\lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0$. Pro $n = 1$ podle AL funkcí je $\lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_1^{f,b}(x))}{x-b} = \lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \lim_{x\to b} f'(b) = f'(b) - f'(b) = 0$. Pro $n \ge 2$ podle LHP, identity v úloze a indukce máme, že $\lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n}$ se rovná

$$\lim_{x\to b}\frac{\big(f(x)-T_n^{f,b}(x)\big)'}{\big((x-b)^n\big)'} = \frac{1}{n}\lim_{x\to b}\frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',b}(x)}{(x-b)^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0\ .$$

Nechť $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s $\deg p \le n$ splňuje, že $\lim_{x\to b}\frac{f(x)-p(x)}{(x-b)^n} = 0$. Pak se ale $\lim_{x\to b}\frac{p(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n}$ rovná

$$\lim_{x\to b}\frac{p(x)-f(x)}{(x-b)^n} + \lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0 + 0 = 0\ .$$

Podle předešlého lemmatu je $p(x) = T_n^{f,b}(x)$. $\square$

• *Taylorovy polynomy elementárních funkcí.* Omezíme se na střed v nule. V následujících vzorcích je $n \in \mathbb{N}$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n x^j/j!$.
2. $f(x) = \sin x \Rightarrow T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j+1}/(2j+1)!$.
3. $f(x) = \cos x \Rightarrow T_{2n}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j}/(2j)!$.
4. $f(x) = (1+x)^a$ s $a \in \mathbb{R} \Rightarrow T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{a}{j} x^j$, kde
$$\binom{a}{j} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-j+1)}{j!}$$
s $\binom{a}{0} := 1$ je *zobecněný binomický koeficient.*
5. $f(x) = \log(1+x) \Rightarrow T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x^j/j$.
6. $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=1}^n x^j/j$.
7. $f(x) = \arctan x \Rightarrow T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j+1}/(2j+1)$.
8. $f(x) = \arcsin x \Rightarrow T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{j-1/2}{j} x^{2j+1}/(2j+1)$.
9. $f(x) = \arccos x \Rightarrow T_{2n+1}^{f,0}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{j=0}^n \binom{j-1/2}{j} x^{2j+1}/(2j+1)$.

Důkaz vzorce 1. Na $\mathbb{R}$ se $\exp^{(j)}(x) = \exp(x)$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ a $\exp(0) = 1$. □

Důkaz vzorců 2 a 3. Na $\mathbb{R}$ se $\sin^{(j)}(x) = \sin x$ pro $j \equiv 0 \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = \cos x$ pro $j \equiv 1 \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = -\sin x$ pro $j \equiv 2, \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = -\cos x$ pro $j \equiv 3 \pmod 4$ a $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = \ 1$. Pro kosinus podobně. □

Důkaz vzorce 4. Na $(-1,1)$ se pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ a každé $a \in \mathbb{R}$

$$((1+x)^a)^{(j)} = a(a-1)\dots(a-j+1)(1+x)^{a-j} \ ,$$

s $((1+x)^a)^{(0)} = (1+x)^a$. Patrně $(1+0)^{a-j} = 1$. $\square$

Důkaz vzorců 5 a 6. Na $(-1,1)$ se pro každé $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(\log(1+x))^{(j)} &= (-1)(-2)\dots(-j+1)\cdot(1+x)^{-j} \\ &= (-1)^{j+1}(j-1)!\cdot(1+x)^{-j}\end{aligned}$$

a $(\log(1+x))^{(0)} = \log(1+x)$. Dále platí, že $\log(1+0) = 0$ a $(1+0)^{-j} = 1$. Dále $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\log(1+(-x))$. $\square$

Důkaz vzorce 7. Použijeme následující tvrzení.

Tvrzení 4 (TP f' a f) *$f, f', \dots, f^{(n)}\colon U(0,\delta) \to \mathbb{R}$, kde $n \in \mathbb{N}$, a $\exists\, f^{(n+1)}(0) \in \mathbb{R}$. Pak z $f'(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + o(x^n)$ plyne, že $(x \to 0)$*

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1}\cdot x^{j+1} + o(x^{n+1}) \ .$$

Důkaz. Pracujeme se středem 0. Podle věty 2 o jednoznačnosti TP z předpokladu plyne, že pro $j = 0, 1, \dots, n$ se $a_j = f^{(j+1)}(0)/j!$. Podle téže věty je tedy koeficient u x^{j+1} v TP funkce f roven

$$\frac{f^{(j+1)}(0)}{(j+1)!} = \frac{a_j}{j+1} \ .$$

$\square$

TP funkce $\arctan x$ tedy dostáváme z $T_{2n}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j x^{2j}$ její derivace $f(x) = \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- *Úloha.* Proč má $\frac{1}{1+x^2}$ Taylorův polynom $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j x^{2j}$?
- *Úloha.* Dokažte touto metodou vzorce 8 a 9.
- *Počítání limit pomocí Taylorových polynomů.* Použijeme opět větu 2. Pomocí $T_1^{f,0}$ ve vzorci 2 třeba hned vidíme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x} = 1+0=1\ .$$

Nebo, pomocí $T_2^{f,0}$ ve vzorci 3,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(\cos x-1)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(1-x^2/2-1+o(x^2))^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4/4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{4}+o(x^4)/x^4} = 4\ .\end{aligned}$$

- *Těžší úloha.* V brožurce V. I. Arnolda *Gjujgens i Barrou, N'juton i Guk* (Nauka, Moskva 1989) je na str. 21 úloha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)} =?$$

- *Taylorovy řady.* Taylorova řada funkce vznikne z jejích Taylorových polynomů prodloužením do nekonečna.

Definice 5 (Taylorovy řady) *Nechť $f^{(n)}\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ pro každé $n\in\mathbb{N}_0$. Pokud pro každé $x\in U(a,\delta)$ se*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n\ ,$$

řekneme, že na $U(a,\delta)$ je funkce f součtem své Taylorovy řady $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$ se středem a.

Taylorovy polynomy jsou tedy částečné součty Taylorových řad. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ a funkci $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ s vlastní $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ definujme *zbytek Taylorova polynomu* $T_n^{f,\,a}(x)$ jako

$$R_n^{f,\,a}(x) := f(x) - T_n^{f,\,a}(x),\ x \in U(a,\,\delta)\ .$$

Věta 6 (zbytky TP) *$f, f', \dots, f^{(n+1)}\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak platí následující.*

1. *(Lagrangeův zbytek) $\forall\, x \in P(a,\delta)\ \exists\, c$ mezi a a x, že*

$$R_n^{f,\,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}\ .$$

2. *(Cauchyův zbytek) $\forall\, x \in P(a,\delta)\ \exists\, c$ mezi a a x, že*

$$R_n^{f,\,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n!} \cdot (x-a)\ .$$

Důkaz je/bude v **K**. Pro všech devět vzorců výše pro TP nyní uvedeme, pro jaké $x \in \mathbb{R}$ dávají Taylorovu řadu funkce f se středem v 0 konvergující k $f(x)$.

- *Úlohy.* Pomocí předešlé věty dokažte následující vzorce.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \big(\mathrm{e}^x = \sum_{n \ge 0} x^n/n!\big)$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \big(\sin x = \sum_{n \ge 0} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!\big)$.
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \big(\cos x = \sum_{n \ge 0} (-1)^n x^{2n}/(2n)!\big)$.
4. $\forall\, x \in (-1,1)\ \forall\, a \in \mathbb{R}\ \big((1+x)^a = \sum_{n \ge 0} \binom{a}{n} x^n\big)$.
5. $\forall\, x \in (-1,1)\ \big(\log(1+x) = \sum_{n \ge 1} (-1)^{n+1} x^n/n\big)$.

6. $\forall\, x \in (-1,1)\ \big(\log\big(\frac{1}{1-x}\big) = \sum_{n\ge 1} x^n/n\big)$.
7. $\forall\, x \in (-1,1)\ \big(\arctan x = \sum_{n\ge 0}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)\big)$.
8. $\forall\, x \in (-1,1)\ \big(\arcsin x = \sum_{n\ge 0}\binom{n-1/2}{n} x^{2n+1}/(2n+1)\big)$.
9. $\forall\, x \in (-1,1)\ \big(\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n\ge 0}\binom{n-1/2}{n} x^{2n+1}/(2n+1)\big)$.

Některé z těchto rozvojů platí i obecněji. Rozvoj 4 s $a \in \mathbb{N}_0$ platí pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rozvoj 5 platí i pro $x = 1$, rozvoj 6 platí i pro $x = -1$, rozvoj 7 platí i pro $x = 1$ a rozvoje 8 a 9 platí i pro $x = \pm 1$.

• *Úloha.* Dokažte, že pro $x = \pm 1$ ve vzorcích 8 a 9 příslušná nekonečná řada $\sum_{n\ge 0}\binom{n-1/2}{n}/(2n+1)$ (absolutně) konverguje. Návod: $\binom{n-1/2}{n}$ odhadněte Stirlingovou formulí $n! \sim c\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n$, $c > 0$ a $n \to \infty$, a použijte řadu $\zeta(s)$.

Koeficienty v Taylorových řadách se dají často vyložit kombinatoricky. Zde je jeden příklad za mnohé další. Nechť B_n je počet rozkladů n-prvkové množiny. Např. $B_2 = 2$ díky dvěma rozkladům $\{\{1,2\}\}$ a $\{\{1\},\{2\}\}$ množiny $\{1,2\}$. Klademe $B_0 := 1$.

Tvrzení 7 (Bellova čísla B_n) $\forall\, x \in (-1,1)$ *platí rozvoj*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1} = \exp(\exp(x) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}\ .$$

• *Úloha.* $B_4 = ?$

• *Primitivní funkce. Netriviální* interval je $\neq \emptyset, \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Netriviální jsou přesně ty neprázdné intervaly, jejichž každý bod je jejich limitním bodem.

Definice 8 (primitivní funkce) *$I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval a $F, f\colon I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je primitivní (funkce) k f, symbolicky $F = \int f$, pokud $F' = f$ na (celém) I. Někdy se F také nazývá antiderivací funkce f.*

Zde tedy pro každé $b \in I$, i v krajních bodech, je $F'(b)$ oboustranná derivace. Antiderivace dané funkce sice není určena jednoznačně, ale její nejednoznačnost se dá dobře popsat.

• *Úloha.* Když $F, f\colon I \to \mathbb{R}$ a F je primitivní k f, pak i $F + c$ je primitivní k f, pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Věta 9 (nejednoznačnost PF) *$I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, $F_1, F_2, f\colon I \to \mathbb{R}$ a F_1 i F_2 je primitivní k f. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$, že $F_1 - F_2 = c$ na I.*

Důkaz. Nechť F_1, F_2, f a I jsou, jak uvedeno, a $a < b$ jsou dvě libovolná čísla z I. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě, použité pro funkci $F_1 - F_2$ a interval $[a, b]$, existuje $c \in (a, b)$, že

$$\begin{aligned}\frac{(F_1 - F_2)(b) - (F_1 - F_2)(a)}{b - a} &= (F_1 - F_2)'(c) = F_1'(c) - F_2'(c) \\ &= f(c) - f(c) = 0\ .\end{aligned}$$

Tedy $F_1(b) - F_2(b) = F_1(a) - F_2(a)$, takže $F_1(x) - F_2(x) = c$ pro nějakou konstantu c a každé $x \in I$. □

Ve zbytku přednášky dokážeme existenci antiderivace ke každé spojité funkci. Musíme si ale připravit několik nástrojů.

• *Prohození limity a derivace.* V této pasáži je naším cílem věta popisující situaci, kdy lze beze změny výsledku prohodit operace limity pro $n \to \infty$ a derivování. Větu použijeme níže v důkazu věty 14 o existenci antiderivace. Nejdřív ale zavedeme bodovou a stejnoměrnou konvergenci a dokážeme Moore–Osgoodovu větu.

Definice 10 ($f_n \to f$) *$f, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ pro $M \subset \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Když*

$$\forall\,\varepsilon\;\forall\,x \in M\;\exists\,n_0\,\big(n \ge n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big)\;,$$

píšeme $f_n \to f$ (na M) a řekneme, že na M funkce f_n konvergují bodově k funkci f.

Jinak řečeno, $\forall\,x \in M\,\big(\lim f_n(x) = f(x)\big)$.

Definice 11 ($f_n \rightrightarrows f$) *$f, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ pro $M \subset \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Když*

$$\forall\,\varepsilon\;\exists\,n_0\;\forall\,x \in M\,\big(n \ge n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\big)\;,$$

píšeme $f_n \rightrightarrows f$ (na M) a řekneme, že na M funkce f_n konvergují stejnoměrně k funkci f.

Teď se chce navíc, aby jedno n_0 vyhovovalo pro každé $x \in M$. Patrně $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$, naopak to obecně neplatí. Následující větě se také říká Moore–Osgoodova věta.

Věta 12 (výměna limit) *Nechť $f_n, f\colon M \to \mathbb{R}$ pro indexy $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ (na M), $A \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny M a $\lim_{x\to A} f_n(x) =: a_n \in \mathbb{R}$ pro každé n. Potom následující vlastní limity existují a rovnají se:*

$$\lim a_n = \lim_{x\to A} f(x), \quad \textit{tj.} \quad \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to A} f_n(x) = \lim_{x\to A}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\ .$$

Důkaz. Z předpokladu, že $f_n \rightrightarrows f$ (na M), plyne, že $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ je stejnoměrně Cauchyova v $x \in M$: pro každé ε existuje n_0, že pro každé $x \in M$ a každé $m, n \geq n_0$ je $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Pro každé dva pevné indexy $m, n \geq n_0$ pak limitní přechod $\lim_{x\to A}$ dává nerovnost $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Tedy $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova posloupnost a má vlastní limitu $\lim a_n =: a \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí odhad

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{V_1} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{V_2} + \underbrace{|a_n - a|}_{V_3}\ .$$

Buď dáno ε. Protože $\lim a_n = a$, existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow V_3 < \varepsilon/3$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ (na M), existuje n_1, že $n \geq n_1 \Rightarrow V_1 < \varepsilon/3$ pro každé $x \in M$. Vezmeme index $m \geq \max(n_0, n_1)$. Protože $\lim_{x\to A} f_m(x) = a_m$, můžeme vzít δ, že $V_2 < \varepsilon/3$ pro $n := m$ a každé $x \in P(A, \delta) \cap M$. Pro $n := m$ a každé $x \in P(A, \delta) \cap M$ tak je

$$|f(x) - a| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

a $\lim_{x\to A} f(x) = a = \lim a_n$. □

Věta 13 (výměna df/dx a $\lim_{n\to\infty}$) *$I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval a $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, splňují následující podmínky.*

1. *$\forall\, n\, \big(f_n'\colon I \to \mathbb{R}\big)$.*
2. *$f_n' \rightrightarrows f$ (na I) pro nějakou funkci $f\colon I \to \mathbb{R}$.*
3. *$\exists\, a \in I$, že posloupnost $(f_n(a)) \subset \mathbb{R}$ konverguje.*

Pak $f_n \to F$ (na I) pro nějakou funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$, existuje $F'\colon I \to \mathbb{R}$ a na I se $F' = f$, tj. $\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.

Důkaz. Nechť f_n, I, f a a jsou, jak uvedeno, a $b \in I$ je libovolný bod. Nejprve dokážeme, že posloupnost $(f_n(b)) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova. Pro $b = a$ to platí podle podmínky 3. Předpokládáme, že třeba $a < b$, případ $b < a$ je podobný. Nechť je dáno ε. Z podmínek 2 a 3 plyne, že posloupnost funkcí (f_n') je na I stejnoměrně Cauchyova a že posloupnost $(f_n(a))$ je Cauchyova. Tedy existuje n_0, že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in I$ a také $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. Vezmeme dva libovolné indexy $m, n \geq n_0$ a na funkci $f_m - f_n$ a interval $[a, b]$ použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Tím pro nějaké číslo $c \in (a, b)$ dostaneme po řadě rovnost a odhad

$$\frac{(f_m - f_n)(b) - (f_m - f_n)(a)}{b - a} = (f_m - f_n)'(c)$$

a

$$\begin{aligned} |f_m(b) - f_n(b)| &\leq |b - a| \cdot |f_m'(c) - f_n'(c)| + |f_m(a) - f_n(a)| \\ &< (b - a)\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1)\ . \end{aligned}$$

Takže posloupnost $(f_n(b))$ je Cauchyova, tedy konvergentní, a pro každé $b \in I$ můžeme definovat

$$F(b) := \lim f_n(b) \in \mathbb{R} .$$

Získali jsme funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$, že $f_n \to F$ (na I).

Dokážeme, že $F' = f$ na I. Použijeme předešlou větu a pak ověříme, že jsou splněny její předpoklady. Pro libovolné $b \in I$ se opravdu

$$\begin{aligned} F'(b) &= \lim_{x \to b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = \lim_{x \to b} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \\ &\overset{\text{věta 12}}{=} \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = \lim_{n \to \infty} f_n'(b) = f(b) . \end{aligned}$$

Ověříme předpoklady tohoto použití věty 12. Použili jsme ji pro posloupnost funkcí

$$g_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \colon I \setminus \{b\} \to \mathbb{R} .$$

Jistě $\lim_{x \to b} g_n(x) = f_n'(b)$ pro každé n a také $\lim f_n'(b) = f(b)$. Zbývá ověřit, že $g_n \rightrightarrows g$ (na $I \setminus \{b\}$) pro funkci

$$g(x) := \frac{F(x) - F(b)}{x - b} .$$

Pro to stačí ověřit, že posloupnost $(g_n(x))$ je na $I \setminus \{b\}$ stejnoměrně Cauchyova (viz úloha níže). Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I \setminus \{b\}$ platí identita

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= \frac{|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(b) - f_n(b))|}{|x - b|} \\ &\overset{\text{Lagr. v. o s. h.}}{=} \frac{\cancel{|x - b|} \cdot |f_m'(c) - f_n'(c)|}{\cancel{|x - b|}} \\ &= \underbrace{|f_m'(c) - f_n'(c)|}_{V}, \ c \text{ leží mezi } b \text{ a } x . \end{aligned}$$

Podle podmínky 2 pro dané ε existuje n_0, že pro každé $m, n \geq n_0$ a každé $c \in I$ je $V < \varepsilon$. Posloupnost $(g_n(x))$ je tedy na $I \setminus \{b\}$ stejnoměrně Cauchyova a důkaz je hotový. $\square$

• *Úloha.* Dokažte: $f_n \to f$ (na M) a (f_n) je na M stejnoměrně Cauchyova. Pak $f_n \rightrightarrows f$ (na M).

• *Spojitá funkce má primitivní funkci.* Abychom to teď dokázali, potřebujeme ještě jeden nástroj, stejnoměrnou spojitost. Tu jsme ale už zavedli v přednášce 6. Takže si teď jen připomeňme (definice 19 v př. 6), že $f\colon M \to \mathbb{R}$ je (na $M \subset \mathbb{R}$) stejnoměrně spojitá, pokud $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta \big(a, b \in M \wedge |a - b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon\big)$ a že (tvrzení 20 v př. 6) každá spojitá funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je pro kompaktní $M \subset \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

Věta 14 ($\exists$ antiderivace) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak f má primitivní funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$.*

Stručný důkaz. I buď nejprve kompaktní, $I = [a, b]$ s $a < b$. Funkce $g\colon I \to \mathbb{R}$ je *lomená čára*, když je spojitá a existuje dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ intervalu I, že každá restrikce $g \mid [a_{i-1}, a_i]$ je lineární, tj. tvaru $g(x) = c_i x + d_i$. Díky stejnoměrné spojitosti funkce f

$$\forall\, n\ \exists\, \text{lomená čára } g_n \big(x \in I \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| < 1/n\big)\ .$$

Protože $\int(cx + d) = cx^2/2 + dx + e$, podle tvrzení 6 z minula existují $G_n\colon I \to \mathbb{R}$, že $G_n = \int g_n$ a $G_n(a) = 0$. Pak ale, protože $g_n \rightrightarrows f$ (na I) a $G_n' = g_n$ na I, podle věty 13 existuje $F\colon I \to \mathbb{R}$, že $G_n \to F$ (na I), ale hlavně $F' = f$ na I, to jest $F = \int f$.

Pokud interval I není kompaktní, vyjádříme ho jako sjednocení vnořených netriviálních kompaktních intervalů I_n: $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ a $\bigcup_{n\geq 1} I_n = I$. Na každém I_n vezmeme vhodnou $F_n = \int(f \mid I_n)$ a pak $F := \bigcup_{n\geq 1} F_n$ je na I primitivní funkce k f. $\square$

Podrobněji v **K**. Tuto větu dokážeme později ještě jednou jednodušeji pomocí Riemannova integrálu.

DĚKUJI ZA POZORNOST!