Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 8, 6. 4. 2023

VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

• *Tři věty o střední hodnotě.* $a < b$ jsou reálná čísla a *hezká* funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\forall\, c \in (a,b)\ \exists\, f'(c)$ (i nevlastní).

Věta 1 (Rolleova) *f je hezká funkce & $f(a) = f(b)$, pak*

$$\exists\, c \in (a,\, b)\, \big(f'(c) = 0\big)\ .$$

Důkaz. $f(x) = f(a) = f(b)$ pro každé $x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$. Jinak třeba $f(d) > f(a) = f(b)$ pro nějaké $d \in [a,b]$ (případ $f(d) < f(a) = f(b)$ je podobný). Pak podle minimaxu z předminulé přednášky f nabývá v nějakém $c \in (a,b)$ globální maximum. Ale c je OLB $[a,b]$ a $\exists\, f'(c)$, takže podle věty 4 z minula se $f'(c) = 0$. □

Věta 2 (Lagrangeova) *f je hezká funkce, pak*

$$\exists\, c \in (a,\, b)\left(f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} =: z\right)\ .$$

Důkaz. $g(x) := f(x) - (x-a)\cdot z\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ splňuje předpoklady Rolleovy věty, zejména $g(a) = g(b) = f(a)$, takže $0 = g'(c) = f'(c) - z$ pro nějaké $c \in (a,b)$ a jsme hotovi. □

Geometricky to znamená, že existuje tečna ke G_f v nějakém bodě $(c, f(c))$, $c \in (a,b)$, rovnoběžná se sečnou $\kappa(a, f(a), b, f(b))$.

Věta 3 (Cauchyova) *f a g jsou hezké funkce, $g(b) \neq g(a)$ & g nemá nekonečné derivace, pak*

$$\exists\, c \in (a,\, b) \left(f'(c) = g'(c) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} =: g'(c) \cdot z \right).$$

Důkaz. $h(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \cdot z \colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ splňuje předpoklady Rolleovy věty, zejména $h(a) = h(b) = f(a)$, takže pro nějaké $c \in (a, b)$ je $0 = h'(c) = f'(c) - g'(c) \cdot z$ a jsme hotovi. $\square$

• *Úloha.* Kde by vadilo, kdyby derivace funkce g byla nekonečná?

• *Derivace a monotonie.* Pro množinu $M \subset \mathbb{R}$ pomocí $M^0 := \{a \in M \mid \exists\, \delta\, \big(U(a, \delta) \subset M\big)\}$ označíme její *vnitřek*. Vnitřek intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval $I^0 \subset I$, který vznikne vynecháním koncových bodů intervalu I.

Věta 4 (derivace a monotonie 1) *$I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\forall\, c \in I^0\, \exists\, f'(c)$ (i nevlastní).*

1. *$f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) na $I^0 \Rightarrow f$ na I neklesá (resp. neroste).*
2. *$f' > 0$ (resp. $f' < 0$) na $I^0 \Rightarrow f$ na I roste (resp. klesá).*

Důkaz. Nechť je $f' < 0$ na I^0 a $x < y$ jsou libovolná čísla v I. Podle věty 2 pro nějaké $z \in (x, y) \subset I^0$ je $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) < 0$. Protože jmenovatel $y - x > 0$, je čitatel záporný, tedy $f(x) > f(y)$ a f na I klesá. Zbývající tři možnosti v částech 1 a 2 se proberou podobně. $\square$

- *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 5 (derivace a monotonie 2) *Nechť* $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $f'_\pm(a)$ *níže mohou být nevlastní. Pak:*

1. a *je levý* LB M *a* $f'_-(a) < 0$, *resp.* $f'_-(a) > 0$, *pak*
$$\exists\,\delta\,\big(f[P^-(a,\delta)\cap M] > \{f(a)\},\ \ \textit{resp.}\ \ < \{f(a)\}\big)\ .$$
2. a *je pravý* LB M *a* $f'_+(a) < 0$, *resp.* $f'_+(a) > 0$, *pak*
$$\exists\,\delta\,\big(f[P^+(a,\delta)\cap M] < \{f(a)\},\ \ \textit{resp.}\ \ > \{f(a)\}\big)\ .$$

- *Úloha.* Co z něj plyne pro extrém funkce $|x|$ v 0?
- *Limitní rozšiřování derivací.*

Tvrzení 6 (rozšiřování derivací) $f\colon M \to \mathbb{R}$, f *spojitá v* $a \in M$, $(a,b) \subset D(f)$ $(a < b)$ & $\lim_{x\to a^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$. *Pak i* $f'_+(a) = L$.

Důkaz. Nechť a, b, f a L jsou, jak uvedeno, a nechť je dáno ε. Existuje takové $\delta \le b - a$, že $x \in P^+(a,\delta) \Rightarrow f'(x) \in U(L,\varepsilon)$. Nechť $x \in P^+(a,\delta)$ je libovolné. Podle věty 2 existuje takové $y \in (a,x) \subset P^+(a,\delta)$, že
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y) \in U(L,\,\varepsilon)\ .$$
Tedy $f'_+(a) = L$. $\square$

- *Úloha.* Uveďte a dokažte verzi tohoto tvrzení pro derivace zleva.
- *l'Hospitalovo pravidlo* je metoda pro výpočet limit $\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ zkrácením zlomku $\frac{f(x)}{g(x)}$ infinitesimálním faktorem $x-A$.

Věta 7 (LHP) *$A \in \mathbb{R}$, $f, g\colon P^+(A,\delta) \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivace, $g' \neq 0$ a (1) $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} g(x) = 0$ nebo (2) $\lim_{x\to A} g(x) = \pm\infty$. Pak*

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)},\ \textit{pokud poslední limita existuje}.$$

Věta platí i pro $P^-(A,\delta)$, $P(A,\delta)$ a pro $A = \pm\infty$.

Důkaz. 1. Nechť $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} g(x) = 0$ a nechť $\lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L \in \mathbb{R}^*$. Definujeme $f(A) = g(A) := 0$. A je LB def. oboru zlomku $f(x)/g(x)$ (pokud $g = 0$ na $P^+(A,\theta)$, pak i $g' = 0$ na $P^+(A,\theta)$). Položíme

$$P_0^+(A,\, \delta) := \{x \in (A,\, A+\delta) \mid g(x) \neq 0\}\ .$$

Věta 3: $\exists$ funkce $c\colon P_0^+(A,\delta) \to P^+(A,\delta)$, že $\forall\, x \in P_0^+(A,\delta)$ je

$$c(x) \in (A,\, x) \wedge \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(A)}{g(x) - g(A)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\ ,$$

speciálně $\lim_{x\to A} c(x) = A$. Ale $A \notin P^+(A,\delta)$ – je splněna podmínka 1 věty o limitě složené funkce. Tato věta dává, že

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y\to A} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L\ .$$

2. Nechť $\lim_{x\to A} g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L \in \mathbb{R}^*$. Důkaz tohoto případu provedeme později pomocí integrálů. □

- *Úlohy.* Dokažte část 1 pro funkce definované na okolí $P^-(A,\delta)$ a $P(A,\delta)$ a pro prvek $A = \pm\infty$ (zde použijte substituci $x := 1/y$).

Spočítáme pomocí LHP pár limit. Například ($x > 0$)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\log x &= \lim_{x\to 0}\frac{(\log x)'}{(1/\sqrt{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{(-1/2)x^{-3/2}}\\ &= -2\lim_{x\to 0}x^{1/2} = 0\end{aligned}$$

Nebo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x - 1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(\cos x - 1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{-\sin x}\\ &= -2\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(\sin x)'} = -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = -2\ .\end{aligned}$$

• *Úloha.* Ukažte, že $\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon}\log x = 0 = \lim_{x\to+\infty} x^{-\varepsilon}\log x$ pro každé $\varepsilon > 0$.

• *Derivace vyšších řádů.* Od obecných definičních oborů přejdeme k otevřeným množinám. Každý bod takové množiny je její OLB.

Definice 8 ($f^{(n)}$) *Nechť $\emptyset \ne M \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $f_0 := f$ a pro $i = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ platí, že $D(f_{i-1}) = M$ a $f_i := (f_{i-1})'$. Pak každou funkci*

$$f^{(i)} := f_i\colon M \to \mathbb{R},\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

nazveme derivací řádu i funkce f či její i-tou derivací.

Tedy $f^{(0)}$ je f sama a $f^{(1)} = f'$. Pokud $f^{(n)}\colon M \to \mathbb{R}$ má v $b \in M$ derivaci, i nevlastní, píšeme

$$f^{(n+1)}(b) := (f^{(n)})'(b) \in \mathbb{R}^*$$

a mluvíme o $n+1$-té derivaci funkce f v bodě b. Funkci $f^{(2)}$, druhou derivaci funkce f, označujeme i jako f''. Například, pro $M = \mathbb{R}$, $(x \sin x)'' = (\sin x + x\cos x)' = 2\cos x - x\sin x$.

• *Úloha.* Určete posloupnosti $\big((\sin x)^{(n)}\big)$ $(M = \mathbb{R})$ a $\big((1/x)^{(n)}\big)$ $(M = \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

• *Druhá derivace a extrémy.* Následující kritérium extrému je poměrně známé.

Tvrzení 9 (f'' a extrémy) *Nechť je $f, f' \colon U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, $f'(a) = 0$ & $\exists\, f''(a) \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:*

1. *$f''(a) > 0 \Rightarrow f$ má v a ostré lokální minimum.*
2. *$f''(a) < 0 \Rightarrow f$ má v a ostré lokální maximum.*

Důkaz. Dokážeme jen 1, důkaz 2 je podobný. Nechť tedy existuje $f' \colon U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$. Podle tvrzení 5 existuje takové $\theta \le \delta$, že $f' < f'(a) = 0$ na $P^-(a, \theta)$ a $f' > f'(a) = 0$ na $P^+(a, \theta)$. Nechť $x \in P^-(a, \theta)$. Podle věty 2 existuje $y \in (x, a) \subset P^-(a, \theta)$, že

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(y) < 0\ .$$

Protože jmenovatel $a - x$ je kladný, je čitatel záporný a $f(a) < f(x)$. Pro $x \in P^+(a, \theta)$ je $f'(y) > 0$, jmenovatel je záporný, čitatel je tedy opět záporný a opět $f(a) < f(x)$. Proto má f v a ostré lokální minimum. $\square$

• *Úloha.* Na základě funkcí x^3, $-x^4$, x^4 a bodu $a = 0$ ukažte, že když $f''(a) = 0$, nelze o lokálním extrému funkce v bodu a nic říci.

• *Konvexita a konkavita funkcí.* Nechť $B := (c, d) \in \mathbb{R}^2$ a $\ell : y = sx + b$ je nesvislá přímka. Když $d \ge sc + b$, resp. $d > sc + b$, píšeme $B \ge \ell$, resp. $B > \ell$, a řekneme, že B *leží nad* ℓ, resp. *ostře* *nad* ℓ. Opačné nerovnosti definují, že B *leží pod* ℓ, resp. *ostře pod* ℓ, symbolicky $B \le \ell$, resp. $B < \ell$.

Definice 10 (konvexní a konkávní) *$I \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je (na I) konvexní, pokud*

$$\forall\,(a < b < c) \subset I\,\big((b,\ f(b)) \le \kappa(a,\ f(a),\ c,\ f(c))\big)\ .$$

Pro $\le \rightsquigarrow <$ je f (na I) ryze konvexní. Pro opačné „nerovnosti" je f (na I) konkávní, resp. ryze konkávní.

$\kappa(a, f(a), c, f(c))$ je sečna G_f jdoucí body $(a, f(a))$ a $(c, f(c))$.

• *Úloha.* Nechť $I := \mathbb{R}$. Ukažte, že funkce x^2 je ryze konvexní, že $|x|$ je konvexní a že $|x|$ není ryze konvexní.

• *Úloha.* Dokažte, že (ryzí) konvexita, resp. (ryzí) konkavita, se zachovává při zúžení funkce na podinterval.

• *Úloha.* Dokažte, že f je (ryze) konvexní $\iff$ $-f$ je (ryze) konkávní.

Věta 11 ($\exists$ jednostr. derivace) *Každá konvexní, resp. konkávní, funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ má (vlastní) jednostranné derivace*

$$f'_-,\ f'_+\colon I \to \mathbb{R}$$

a ty jsou neklesající, resp. nerostoucí.

• *Úloha.* Rozšiřte to na libovolný interval a odvoďte odtud, že každá konvexní, resp. konkávní, funkce je spojitá. Musí mít derivaci?

Věta 12 (konv., konk., f'') *$I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá, $D(f) = I^0$, $\forall\, c \in I^0\ \exists\, f''(c) \in \mathbb{R}^*$.*

1. *$f'' \geq 0$, resp. $f'' \leq 0 \Rightarrow f$ je konvexní, resp. konkávní.*
2. *$f'' > 0$, resp. $f'' < 0 \Rightarrow f$ je r. konv., resp. r. konk.*

- *Úloha.* Dokažte následující lemma.

Lemma 13 (o sklonech) *Nechť (a, a'), (b, b') a (c, c') jsou v $\mathbb{R}^2$, $a < b < c$. Pak*

$$\frac{b' - a'}{b - a} \leq \frac{c' - b'}{c - b} \Rightarrow (b,\, b') \leq \kappa(a,\, a',\, c,\, c')\ .$$

Též $\ldots < \ldots \Rightarrow \ldots < \ldots$ a podobně pro $\geq$ a $>$.

Jdeme zleva doprava a na nesvislou úsečku AB napojíme nesvislou úsečku BC se stejným či větším sklonem. Pak spojovací bod B leží pod přímkou jdoucí krajními body A a C.

Důkaz věty 12. Nechť I a f jsou, jak uvedeno, a nechť $f'' \geq 0$ na I^0, další tři případy v 1 a 2 se proberou podobně. Nechť $(a < b < c) \subset I$. Podle věty 2 existují $y \in (a, b)$ a $z \in (b, c)$, že

$$s := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(y) \ \text{ a } \ t := \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(z)\ .$$

Podle věty 4 je f' na I^0 neklesající, protože f'' je nezáporná. Z $y < z$ je $s = f'(y) \leq f'(z) = t$, kde s je sklon úsečky $(a, f(a))(b, f(b))$ a t úsečky $(b, f(b))(c, f(c))$. Podle Lemmatu 13 bod $(b, f(b))$ leží pod přímkou $\kappa(a, f(a), c, f(c))$. Podle definice 10 je f konvexní. $\Box$

- *Inflexní body.* Zhruba řečeno jde o body grafu funkce, kde graf přechází (lokálně) z jedné strany tečny na druhou. Přesněji takto.

Definice 14 (inflexní body) *$a \in M \subset \mathbb{R}$, a je* OLB *M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a ℓ je tečna ke G_f v $(a, f(a))$. Tento bod je inflexním bodem grafu funkce f, existuje-li δ, že*

$$x \in P^-(a,\delta) \cap M \wedge x' \in P^+(a,\delta) \cap M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,\, f(x)) \leq \ell \wedge (x',\, f(x')) \geq \ell\ ,$$

anebo platí opačné „nerovnosti".

- *Úloha.* Ukažte, že počátek $(0,0)$ je inflexním bodem grafu funkce $f(x) = x^3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tvrzení 15 (inflexe není) *$f, f'\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, $\exists\, f''(a) \in \mathbb{R}^*$, ale $f''(a) \neq 0$. Pak $(a, f(a))$ není inflexním bodem G_f.*

Důkaz. Nechť $f''(a) > 0$, případ s $f''(a) < 0$ je podobný. Nechť ℓ je tečna ke G_f v $(a, f(a))$ – má sklon $f'(a)$ a prochází bodem $(a, f(a))$. Podle tvrzení 5 existuje $\theta \leq \delta$, že pro každé $x \in P^-(a,\theta)$ a každé $x' \in P^+(a,\theta)$ je

$$f'(x) < f'(a) < f'(x')\ . \tag{1}$$

Nechť $x \in P^-(a,\theta)$, $x' \in P^+(a,\theta)$ a s a t jsou po řadě sklony sečen

$$\kappa(x,\, f(x),\, a,\, f(a)) \;\text{ a }\; \kappa(a,\, f(a),\, x',\, f(x'))$$

grafu G_f. Nerovnosti (1) a věta 2 $\Rightarrow s < f'(a) < t$. Tedy

$$(x,\, f(x)) > \ell \wedge (x',\, f(x')) > \ell$$

a podmínka v definici 14 není splněna. $\square$

Postačující podmínku pro inflexi uvedeme bez důkazu.

Věta 16 (inflexe je) *$f, f', f''\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, $f''(a) = 0$, a buď $f'' \geq 0$ na $P^-(a,\delta)$ a $f'' \leq 0$ na $P^+(a,\delta)$, anebo naopak. Pak $(a, f(a))$ je inflexním bodem G_f.*

• *Asymptoty funkce.* Asymptota funkce je přímka (i svislá), k níž se graf funkce neomezeně blíží.

Definice 17 (svislé asymptoty) *$M \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý* LB *M a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Když*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty \ ,$$

nazveme přímku $x = b$ levou svislou asymptotou funkce f. Pravé svislé asymptoty se definují podobně.

• *Úloha.* Ukažte, že osa y je levou i pravou svislou asymptotou funkce $f(x) = 1/x\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ a že je pravou svislou asymptotou funkce $f(x) = \log x\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Definice 18 (asymptoty v nekonečnu) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ je* LB *M, $s, b \in \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Když*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - sx - b) = 0 \ ,$$

nazveme přímku $y = sx + b$ asymptotou funkce f v $+\infty$. Asymptoty v $-\infty$ se definují podobně.

• *Úloha.* Dokažte: $y = sx + b$ asymptotou funkce f v $+\infty$ $\iff$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = s$ a $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - sx) = b$. Analogicky pro asymptoty v $-\infty$.

• *Úloha.* Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = 1/x$ v $+\infty$ i v $-\infty$.

• *Určení průběhu funkce.* Funkce f je zadána nějakým vzorcem $V(x)$. Přísně vzato to není funkce podle naší definice a (množinovou) funkci f teprve definujeme. Její průběh určíme následovně.

1. Určíme její definiční obor
$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{hodnota } V(x) \in \mathbb{R} \text{ je definovaná}\} .$$
Pak $f\colon M \to \mathbb{R}$ s $f(x) := V(x)$. Skoro vždy vyjde sjednocení nejvýše spočetně mnoha intervalů.

2. Není f speciálního tvaru (sudá, lichá, periodická, ...)?

3. Určíme množiny $C(f) = \{a \in M \mid f \text{ je spojitá v } a\}$ a $D(f) \subset M$ (definiční obor derivace).

4. V bodech nespojitosti funkce f a v limitních bodech množiny M ležících mimo M nalezneme jednostranné limity funkce f.

5. Určíme průsečíky grafu G_f s osami x a y a určíme obraz $f[M]$.

6. V bodech $a \in M$, kde $\neg\exists\, f'(a)$, spočteme jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$. Může při tom pomoci tvrzení 6.

7. Pomocí věty 4 určíme maximální intervaly monotonie funkce f a najdeme její lokální a globální extrémy.

8. Zjistíme, kde existuje f'', a pomocí věty 12 určíme maximální intervaly konvexity a konkavity grafu G_f.

9. Pomocí tvrzení 15 a věty 16 nalezneme inflexní body grafu G_f.

10. Nalezneme asymptoty funkce f.

11. Rukou, počítačem či Internetem načrtneme její graf.

• *Příklad.* Nechť

$$V(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \; .$$

1. Definiční obor je

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\pi n - \pi/2,\, \pi n + \pi/2) \; .$$

2. f je π-periodická, protože $\sin(\pi + x) = -\sin x$ a $\cos(\pi + x) = -\cos x$. Je to lichá funkce, protože sinus je lichý a kosinus sudý.

3. Díky spojitosti sinu a kosinu a díky aritmetice spojitosti je naše funkce spojitá na M. Rovněž $D(f) = M$.

4. Pro $b(n) := \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, je

$$\lim_{x\to b(n)^-} f(x) = +\infty \;\text{ a }\; \lim_{x\to b(n)^+} f(x) = -\infty \; .$$

Limity v $\pm\infty$ neexistují.

5. G_f protíná osu y pouze v bodě $(0,0)$ a osu x právě v bodech $(b(n) - \frac{\pi}{2}, 0) = (\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Díky spojitosti f (nabývání mezihodnot) a hořejším nekonečným limitám je jasné, že

$$f[M] = f\big[\,(b(n) - \pi,\, b(n))\,\big] = \mathbb{R} \; .$$

6. $D(f) = M$, není co počítat.

7. Protože

$$f'(x) = 1/\cos^2 x > 0 \text{ na } M \; ,$$

je f na každém intervalu $(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n + \frac{\pi}{2})$ rostoucí. Vzhledem k tomu a vzhledem k periodičnosti f nemá žádné extrémy.

8. Druhá derivace je

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \colon M \to \mathbb{R} \; .$$

Protože $f'' < 0$ na $(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n)$ a $f'' > 0$ na $(\pi n, \pi n + \frac{\pi}{2})$, je f na $(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n]$ ryze konkávní a na $[\pi n, \pi n + \frac{\pi}{2})$ ryze konvexní.

9. Vzhledem k $f''(x) = 0 \iff x = \pi n$ a k hořejšímu znaménku funkce f'', inflexní body jsou právě

$$\big(b(n) - \tfrac{\pi}{2},\, 0\big) = (\pi n,\, 0)\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

10. Vzhledem k limitám v části 4 je každá přímka $x = b(n) = \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, levá i pravá svislá asymptota funkce f. Ani v $-\infty$ ani v $+\infty$ asymptotu nemá.

11. Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

• *Další příklad.* Podle skript R. Černý a M. Pokorný, *Základy matematické analýzy pro studenty fyziky* 1, MatfyzPress, Praha 2020, str. 193–194, vezmeme

$$V(x) = \arcsin\big(2x/(1 + x^2)\big)\,.$$

1. Definiční obor je

$$M = \mathbb{R}\,,$$

protože definiční obor arkus sinu je $[-1, 1]$ a $2|x| \le 1 + x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ vzhledem k $x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2 \ge 0$.

2. Tato funkce je lichá, tj. $f(-x) = -f(x)$, protože $\sin x$, $\arcsin x$ a $\frac{2x}{1+x^2}$ jsou liché funkce. Není periodická.

3. Podle vět o spojitosti inverzu, racionální funkce a složené funkce je f spojitá na M. Vzorce pro derivaci arkus sinu, složené funkce a podílu dávají, že na

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{2x}{1+x^2} \ne \pm 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = M \setminus \{-1, 1\}$$

se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x/(1+x^2))^2}} \cdot \frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= 2\cdot\frac{(1-x^2)/(1+x^2)^2}{|(1-x^2)/(1+x^2)|} = 2\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2\cdot\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}\ . \end{aligned}$$

4. Patrně

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0\ ,$$

protože $\frac{2x}{1+x^2} \to 0$ pro $x \to \pm\infty$.

5. G_f protíná obě osy právě a jen v počátku, v bodě $(0,0)$. Za chvilku zjistíme, že

$$f[M] = f[\mathbb{R}] = [-\pi/2,\ \pi/2]\ .$$

6. Patrně $\lim_{x\to1^{\pm}} f'(x) = \mp1$ a podle tvrzení 6 se $f'_{\pm}(1) = \mp1$. Vzhledem k lichosti f se $f'_{\pm}(-1) = \pm1$.

7. Protože $f' < 0$ na $(-\infty,-1)$, $f' > 0$ na $(-1,1)$ a $f' < 0$ na $(1,+\infty)$, podle věty 4 f na $(-\infty,-1]$ klesá, na $[-1,1]$ roste a na $[1,+\infty)$ klesá. Též $f(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f(x) > 0$ pro $x > 0$ (a $f(0) = 0$). Podle těchto intervalů monotonie a znamének a podle nulových limit výše vidíme, že f má v $x = -1$ ostré globální minimum s hodnotou $f(-1) = -\pi/2$, že v $x = 1$ má symetricky (díky lichosti) ostré globální maximum s hodnotou $f(1) = \pi/2$ a že nemá žádné další lokální extrémy. Z těchto extrémů a spojitosti f (nabývání mezihodnot) plyne výše uvedený obraz $f[M]$.

8. Druhá derivace se na $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ rovná

$$f''(x) = \frac{-4x\cdot\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\ .$$

Protože $f'' < 0$ na $(-\infty, -1)$, $f'' > 0$ na $(-1, 0)$, $f'' < 0$ na $(0, 1)$ a $f'' > 0$ na $(1, +\infty)$, podle věty 12 je f na $(-\infty, -1]$ ryze konkávní, na $[-1, 0]$ ryze konvexní, na $[0, 1]$ ryze konkávní a na $[1, +\infty)$ ryze konvexní.

9. Vzhledem k $f''(x) = 0 \iff x = 0$ (druhé derivace $f''(\pm 1)$ neexistují) a k hořejším znaménkům f'' je podle tvrzení 15 a věty 16 bod $(0, 0)$ jediný inflexní bod naší funkce (v bodech $(-1, f(-1))$ a $(1, f(1))$ neexistují tečny).

10. Vzhledem k limitám v části 4 je $y = 0 = 0x + 0$ asymptotou funkce f v $-\infty$ i v $+\infty$. Nemá svislé asymptoty.

11. Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

DĚKUJI ZA POZORNOST!