Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 6, 23. 3. 2023

SPOJITOST FUNKCÍ

• *Heineho definice spojitosti funkce v bodě.* Z minulé přednášky víme, že spojitost funkce $f\colon M\to\mathbb{R}$ v bodě $a\in M\subset\mathbb{R}$ znamená, že

$$\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta\,\big(f[U(a,\,\delta)\cap M]\subset U(f(a),\,\varepsilon)\big)\;.$$

V této přednášce použijeme několikrát následující ekvivalenci.

Tvrzení 1 (Heineho definice) *Funkce $f\colon M\to\mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a\in M\subset\mathbb{R}$, právě když*

$$\forall\,(a_n)\subset M\,\big(\lim\,a_n=a\Rightarrow\lim\,f(a_n)=f(a)\big)\;.$$

Důkaz. Tuto ekvivalenci jsme už dokázali pro limitní body v tvrzení 5 minulé přednášky jako 1 $\iff$ 3. Je-li $a\in M$ izolovaný bod množiny M, je f v a spojitá podle tvrzení 7 minulé přednášky. Pak však $\lim\,a_n=a$ znamená, že $a_n=a$ pro každé $n\ge n_0$. Tedy i $f(a_n)=f(a)$ pro každé $n\ge n_0$ a $\lim\,f(a_n)=f(a)$. □

Definice 2 (spojitost na množině) *Funkce $f\colon M\to\mathbb{R}$ je spojitá (na $M\subset\mathbb{R}$), je-li spojitá v každém bodu $a\in M$.*

• *Husté množiny.* Zavedeme vztah hustoty jedné množiny ve druhé.

Definice 3 (husté množiny) *Nechť je $N\subset M\subset\mathbb{R}$. Řekneme, že množina N je hustá v množině M, když*

$$\forall\,a\in M\;\forall\,\delta\,\big(U(a,\,\delta)\cap N\ne\emptyset\big)\;.$$

Je jasné, že N je hustá v M, právě když pro každý bod $a \in M$ existuje taková posloupnost $(b_n) \subset N$, že $\lim b_n = a$.

- *Úloha.* Ukažte, že obě množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 4 (hustota a spojitost) *Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$, množina N je hustá v M a $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou takové dvě spojité funkce, že $\forall\, x \in N\, \big(f(x) = g(x)\big)$. Potom*

$$f = g\ ,$$

takže se funkce f a g úplně shodují.

Důkaz. Nechť $y \in M$ je libovolný bod a $(a_n) \subset N$ je posloupnost s $\lim a_n = y$. Pak

$$f(y) = f\,(\lim\, a_n) = \lim\, f(a_n) = \lim\, g(a_n) = g\,(\lim\, a_n) = g(y)\ .$$

Zde druhá a čtvrtá rovnost plynou z tvrzení 1. Třetí rovnost plyne z předpokladu rovnosti f a g na N. Proto $f = g$ úplně. □

Když $A \subset B$ a C jsou množiny a $f\colon B \to C$ je funkce, její *zúžení* (či *restrikce*) na A je funkce $f \mid A\colon A \to C$ daná jako $(f \mid A)(x) := f(x)$ pro každé $x \in A$.

Věta 5 (H. Blumberg, 1922) $\forall\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \exists\ M \subset \mathbb{R}$, *že M je hustá v $\mathbb{R}$ a restrikce $f \mid M$ je spojitá funkce.*

Henry Blumberg (1886–1950) byl americký matematik, který se narodil v Litvě v městě Žagarė.

- *Počet spojitých funkcí.* Pro $M \subset \mathbb{R}$ zavedeme značení

$$C(M) := \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\}$$

pro množinu spojitých reálných funkcí definovaných na M. Budeme potřebovat následující množinovou větu.

Věta 6 (Cantor–Bernsteinova) *$\exists$ injekce $f\colon X \to Y$ a $\exists$ injekce $g\colon Y \to X \Rightarrow \exists$ bijekce $h\colon X \to Y$, že $\forall\, x \in X\, \big(h(x) = f(x) \vee h(x) = g^{-1}(x)\big)$.*

Kolik je spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Tolik jako reálných čísel.

Věta 7 (# spojitých funkcí) *$\exists$ bijekce $h\colon \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$.*

Důkaz. Podle C.–B. věty stačí nalézt injekce $f\colon \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$ a $g\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Injekce f je jasná, $f(a) := (b \mapsto a)$, tj. $f(a)$ je konstantní funkce s hodnotou a.

Definujeme injekci $g\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Reálná čísla jsou nekonečné desetinné rozvoje, např. $-\pi = -3.141592\ldots$ nebo $2022.00000\ldots$. Podle tvrzení 4 je každá $j \in C(\mathbb{R})$ jednoznačně určená svými spočetně mnoha hodnotami $j(x)$ pro $x \in \mathbb{Q}$. Nechť $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jsou bijekce, například ($k, l, n \in \mathbb{N}$)

$$s(n) = s(2^{k-1} \cdot (2l - 1)) = (s_1(n),\, s_2(n)) := (k,\, l)\ .$$

Cifry $0, 1, \ldots, 9$, desetinnou tečku . a znaménko minus $-$ kódujeme dvěma ciframi:

$$c(0) := 00,\ c(1) := 01,\ \ldots,\ c(9) := 09,\ c(.) := 10 \ \text{ a } \ c(-) := 11\ .$$

Zobrazení $g\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ má na funkci $j \in C(\mathbb{R})$ hodnotu

$$g(j) := 0.a_1\, a_2\, a_3\ \ldots\ a_{2n-1}\, a_{2n}\ \ldots\ .$$

Cifry $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ definujeme následovně. Pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ uvážíme desetinný rozvoj

$$j(r(k)) =: b(1,\, k)\, b(2,\, k)\ \ldots\ b(l,\, k)\ \ldots$$

hodnoty $j(r(k))$ funkce j na zlomku $r(k) \in \mathbb{Q}$, s použitými symboly $b(l,k) \in \{0, 1, \dots, 9, ., -\}$. Pak definujeme

$$a_{2n-1}\, a_{2n} = c(b(l,\, k)) := c(b(s_1(n),\, s_2(n)))\ .$$

Ukazuje se, že zobrazení g je prosté. $\square$

• *Úloha.* Dokažte zobecnění, že pro každou neprázdnou $M \subset \mathbb{R}$ existuje bijekce $h\colon \mathbb{R} \to C(M)$.

• *Spojitá funkce nabývá všechny mezihodnoty.* Obraz funkce signum je množina $\{-1, 0, 1\}$, ale nic dalšího kromě těchto tří bodů. Obraz intervalu spojitou funkcí takto vypadat nemůže.

Věta 8 (nabývání mezihodnot) *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$. Pak*

$$\exists\, d \in (a, b)\, \big(f(d) = c\big)\ .$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Nechť

$$A := \{x \in [a, b] \mid f(x) < c\} \ \text{ a } \ d := \sup(A) \in [a,\, b]\ .$$

Číslo d je korektně definované, protože množina A je neprázdná ($a \in A$) a shora omezená (např. b je její horní mez). Ukážeme, že jak $f(d) < c$, tak $f(d) > c$ vede ke sporu, takže $f(d) = c$. Ze spojitosti funkce f v a a v b plyne, že $d \in (a, b)$. Nechť $f(d) < c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že existuje δ, že $x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) < c$. Pak ale A obsahuje čísla větší než d, ve sporu s tím, že d je horní mez množiny A. Nechť $f(d) > c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že existuje δ, že $x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) > c$. Pak ale každé

$x \in [a, d)$ dostatečně blízké d leží mimo A, což je ve sporu s tím, že d je nejmenší horní mez množiny A. □

Důsledek 9 (spojitý obraz intervalu) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval (tj. konvexní množina) a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak*

$$f[I] = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$$

je též interval.

Důkaz. Předešlá věta ukazuje, že množina $f[I]$ je konvexní. □

- *Úloha.* Dokažte následující důsledek.

Důsledek 10 (alpinistický) *Horolezec začne o půlnoci stoupat na horu, po 24 hodinách dosáhne opět o půlnoci vrcholu a okamžitě zase 24 hodin sestupuje do základního tábora. Dokažte, že existuje čas $t_0 \in [0, 24]$, kdy se v těchto dvou dnech pokaždé nachází ve stejné nadmořské výšce.*

Následující důsledek ale dokážeme. Připomeňme si, že funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je (na $M \subset \mathbb{R}$) *rostoucí*, resp. *klesající*, pokud pro každé $x, y \in M$ platí, že $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$.

Důsledek 11 (spojitost a prostota na intervalu) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá prostá funkce. Potom f je buď rostoucí anebo klesající.*

Důkaz. Kdyby f nebyla ani rostoucí ani klesající, existovala by v I taková tři čísla $a < b < c$, že $f(a) < f(b) > f(c)$ nebo $f(a) > f(b) < f(c)$. V prvním případu se každé d splňující $f(a), f(c) <$

$d < f(b)$ nabývá podle věty 8 jako hodnoty $d = f(x) = f(y)$ pro nějaké $x \in (a, b)$ a nějaké $y \in (b, c)$, což je ve sporu s prostotou funkce f. Ve druhém případu máme velmi podobný spor. $\square$

• *Spojitost a kompaktnost.* Kompaktní množiny hrají v analýze, ale i jinde (třeba v optimalizaci), důležitou roli.

Definice 12 (kompaktní množiny) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, když každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} \in M$.*

Podle Bolzano–Weierstrassovy věty a věty o limitě a uspořádání víme, že každý interval $[a, b]$ je kompaktní. Všechny kompaktní množiny popíšeme později. Teď pro ně dokážeme důležitou větu.

Věta 13 (princip minima a maxima) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existují takové body $a, b \in M$, že*

$$\forall\, x \in M \left(f(a) \le f(x) \le f(b)\right).$$

Řekneme, že f nabývá na M v bodu a minimum (nejmenší hodnotu) $f(a)$ a v bodu b maximum (největší hodnotu) $f(b)$.

Důkaz. Dokážeme existenci maxima funkce f, důkaz existence minima je velmi podobný. Patrně $f[M] \ne \emptyset$. Ukážeme, že tato množina je shora omezená. Kdyby nebyla, existovala by posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim f(a_n) = +\infty$. Podle kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $a := \lim a_{m_n} \in M$. Pak i $\lim f(a_{m_n}) = +\infty$. To je ale spor s tím, že podle tvrzení 1 je

$\lim f(a_{m_n}) = f(a)$. Lze tedy definovat

$$s := \sup(f[M]) \in \mathbb{R}$$

a podle definice suprema existuje $(a_n) \subset M$ s $\lim f(a_n) = s$. Díky kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $b := \lim a_{m_n} \in M$. Podle tvrzení 1 je $\lim f(a_{m_n}) = f(b) = s$. Protože $s = f(b)$ je horní mez množiny $f[M]$, je $f(b) \geq f(x)$ pro každé $x \in M$. $\square$

• *Úloha.* Ukažte, že spojité funkce $f, g\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a $g(x) = x$, nenabývají na $[0, 1)$ maximum.

Zavedeme globální a lokální extrémy.

Definice 14 (extrémy) *Nechť je $a \in M \subset \mathbb{R}$ a nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f má na M v bodu a globální maximum, resp. globální minimum, když*

$$\forall\, x \in M \left(f(x) \leq f(a), \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(a)\right).$$

Funkce f má na M v bodu a lokální maximum, resp. lokální minimum, když

$$\exists\, \delta\; \forall\, x \in U(a, \delta) \cap M \left(f(x) \leq f(a), \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(a)\right).$$

Platí-li pro každé $x \neq a$ tyto nerovnosti jako ostré ($<$, resp. $>$), mluvíme o ostrém globálním maximu, atd.

• *Otevřené a uzavřené množiny v $\mathbb{R}$.* Definujeme dva druhy množin.

Definice 15 (otevřené, uzavřené množiny) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, když $\forall\, a \in M\ \exists\, \delta \big(U(a, \delta) \subset M\big)$. Je uzavřená, když je $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená.*

• *Úlohy.* Dokažte, že množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ jsou otevřené i uzavřené. Dokažte, že sjednocení (resp. průnik) libovolně mnoha otevřených (resp. uzavřených) množin je otevřená (resp. uzavřená) množina. Platí to také, když sjednocení $\leftrightarrow$ průnik a libovolně $\to$ konečně.

Tvrzení 16 (uzavřené množiny) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená $\iff \forall\,(a_n) \subset M \,\big(\lim a_n = a \Rightarrow a \in M\big)$.*

Důkaz. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená a $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a$. Kdyby $a \in \mathbb{R} \setminus M$, pro nějaké δ by platilo, že $U(a, \delta) \cap M = \emptyset$. To ale vzhledem k $a_n \to a$ není možné. Když $M \subset \mathbb{R}$ není uzavřená, existuje $a \in \mathbb{R} \setminus M$, že pro každé n máme nějaké $a_n \in U(a, 1/n) \cap M$. Tedy $(a_n) \subset M$ a $a_n \to a \notin M$. $\square$

Díky následujícímu popisu struktury si lze otevřené množiny celkem dobře představit. Otevřenými intervaly v něm rozumíme intervaly tvaru $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ a (a, b) s $a < b$.

Tvrzení 17 (struktura ot. množin) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, právě když existuje takový systém otevřených intervalů $\{I_j \mid j \in X\}$, že indexová množina X je nejvýše spočetná, intervaly I_j jsou vzájemně disjunktní a*

$$\bigcup_{j \in X} I_j = M\ .$$

Uzavřené množiny jsou doplňky otevřených, jsou to tedy sjednocení „mezer“ mezi hořejšími intervaly I_j. Pokud $|X| = n \in \mathbb{N}_0$, je těchto mezer nejvýše $n+1$. Obtížně představitelným faktem ale je, že pro spočetnou X může být množina mezer nespočetná. To je příčinou horší představitelnosti uzavřených množin.

• *Charakterizace kompaktních množin.* Víme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, pokud $\exists\, c\, \forall\, a \in M\, \big(|a| < c\big)$.

Věta 18 (kompaktní množiny v $\mathbb{R}$) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, právě když M je omezená a uzavřená.*

Důkaz. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je omezená a uzavřená a $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost. Protože (a_n) je omezená, má podle Bolzano–Weierstrassovy věty konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $a := \lim a_{m_n} \in \mathbb{R}$. Protože M je uzavřená, $a \in M$. Tedy M je kompaktní.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ není omezená. Sestrojíme takovou posloupnost $(a_n) \subset M$, že $|a_m - a_n| > 1$ pro každé dva indexy $m \neq n$. Tuto vlastnost dědí i každá podposloupnost, která tedy nemůže být konvergentní a M není kompaktní. První člen posloupnosti a_1 v M volíme libovolně. Nechť už jsou definovány členy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující, že $|a_i - a_j| > 1$ pro každé dva indexy i, j s $1 \leq i < j \leq n$. Protože M není omezená, existuje bod $a_{n+1} \in M$, že $|a_{n+1}| > 1 + \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$. Pak patrně $|a_{n+1} - a_i| > 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Takto definujeme celou (a_n).

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ není uzavřená. Pak existuje konvergentní posloupnost $(a_n) \subset M$, že $a := \lim a_n \in \mathbb{R} \setminus M$. Stejnou limitu a má i každá její podposloupnost, která tedy nemá limitu v M. Tedy M není kompaktní. $\square$

- *Úloha.* Dokažte, že každá množina $[a,b] \setminus P(c,\delta)$ je kompaktní.
- *Stejnoměrná spojitost.* Následující zesílení spojitosti je důležité.

Definice 19 (stejnoměrná spojitost) *Pro $M \subset \mathbb{R}$ je funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ (na M) stejnoměrně spojitá, pokud*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta \left(a,\, b \in M \wedge |a-b| \le \delta \Rightarrow |f(a)-f(b)| \le \varepsilon\right)\,.$$

Tvrzení 20 (kompaktnost a st. spoj.) *Je-li $M \subset \mathbb{R}$ kompaktní a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá, je f stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ není stejnoměrně spojitá a $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní. Ukážeme, že pak f není spojitá. Tedy (negace definice 19)

$$\exists\, \varepsilon\ \forall\, \delta\ \exists\, a,b \in M\ \left(|a-b| \le \delta \wedge |f(a)-f(b)| > \varepsilon\right)\,.$$

Pro $n = 1,2,\dots$ položíme $\delta = 1/n$ a odpovídající body a a b označíme a_n a b_n. Protože M je kompaktní, (a_n) a (b_n) mají podposloupnosti s touž limitou v M ($|a_n - b_n| \le 1/n$). Pro jednoduchost značení předpokládáme, že již $\lim a_n = \lim b_n = c \in M$. Kdyby f byla v c spojitá, podle Heineho definice by platilo, že $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c)$. Ale podle Δ-ové nerovnosti a vlastnosti čísel a_n a b_n získané negováním platí, že

$$\forall\, n \left(f(a_n) \notin U(f(c),\, \varepsilon/2) \vee f(b_n) \notin U(f(c),\, \varepsilon/2)\right)\,.$$

Tedy $\lim f(a_n) = f(c)$ nebo $\lim f(b_n) = f(c)$ neplatí a f není v c spojitá. $\square$

- *Úloha.* Ukažte, že spojité funkce $f,g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ a $g(x) = \sin(1/x)$, nejsou stejnoměrně spojité.

• *Úloha.* Dokažte následující tvrzení, jež zachycuje důležitou vlastnost stejnoměrně spojitých funkcí.

Tvrzení 21 (rozšíření) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá a $c \in \mathbb{R}$ je limitní bod množiny M. Pak pro každou $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = c$ existuje jednoznačná vlastní limita $\lim f(a_n) \in \mathbb{R}$. Funkci f tak můžeme rozšířit do bodu c hodnotou*

$$f(c) := \lim f(a_n)\ .$$

• *Aritmetika spojitosti.* Pro dvě funkce $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ definujeme jejich *součtovou*, *součinovou* a *podílovou funkci* po řadě (zhruba) jako ($x \in M$)

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),\ (fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

a $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$.

Tvrzení 22 (aritmetika spojitosti) *Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ a $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Potom součtová i součinová funkce $f+g$, $fg\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá. I (zúžená) podílová funkce $f/g\colon \{x \in M \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ je spojitá.*

Důkaz. Všechny tři důkazy jsou podobné a proto dokážeme jen část pro podílovou funkci. Nechť $a \in M$ je libovolný bod s $g(a) \neq 0$ a $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost s $\lim\ a_n = a$. Podle tvrzení 1 (implikace $\Rightarrow$) je $\lim\ f(a_n) = f(a)$ a $\lim\ g(a_n) = g(a)$. Podle věty o aritmetice limit posloupností je

$$\begin{aligned}\lim\,(f/g)(a_n) &= \lim\ f(a_n)/g(a_n) = \lim\ f(a_n)/\lim\ g(a_n)\\ &= f(a)/g(a) = (f/g)(a)\ .\end{aligned}$$

Podle tvrzení 1 (implikace $\Leftarrow$) je funkce f/g v bodě a spojitá. $\square$

Definice 23 (racionální funkce) *Nechť $m, n \in \mathbb{N}_0$ a a_0, $\dots$, a_m, b_0, $\dots$, b_n s $b_n \neq 0$ jsou reálná čísla. Odpovídá jim tzv. (reálná) racionální funkce (jedné proměnné)*

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} := \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} \colon M \to \mathbb{R}\ ,$$

kde $M = \{a \in \mathbb{R} \mid q(a) \neq 0\}$. Rac. funkce značíme $\mathbb{R}(x)$.

Mnohočlen $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, resp. $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, je *čitatel*, resp. *jmenovatel*, racionální funkce $r(x)$. Jak víme, $q(x)$ má nejvýše n různých reálných kořenů, takže definiční obor $M = \mathbb{R} \setminus Z$, kde $|Z| \leq n$. Racionální funkce nad dalšími tělesy a okruhy vedle $\mathbb{R}$ a obecně s více proměnnými zkoumá Algebraická geometrie.

- *Úloha.* Dokažte tento důsledek.

Důsledek 24 (jejich spojitost) *Každá $r(x) \in \mathbb{R}(x)$ je spojitá na svém definičním oboru.*

- *Úlohy.* Popřemýšlejte, jak by se dokazovalo následující tvrzení.

Tvrzení 25 (spojitost elem. funkcí) *Všechny dříve zavedené elementární funkce* $\exp x$, $\log x$, $\cos x$, $\sin x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, $\cot x$ *a* $\mathrm{arccot}\ x$ *jsou spojité na svých definičních oborech.*

- *Spojitost složených a inverzních funkcí.* Skládání funkcí a jejich invertování jsou další operace produkující nové spojité funkce.

Tvrzení 26 (spojitost a skládání) *Nechť $M, N \subset \mathbb{R}$ jsou množiny a $g\colon M \to N$ a $f\colon N \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak složená funkce $f(g) = f \circ g\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá.*

Důkaz. Nechť $a \in M$ a $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a$. Podle implikace $\Rightarrow$ tvrzení 1 je $\lim g(a_n) = g(a)$ a též

$$\lim f(g)(a_n) = \lim f(g(a_n)) = f(g(a)) = f(g)(a) .$$

Podle implikace $\Leftarrow$ tvrzení 1 je funkce $f(g)$ v bodě a spojitá. $\square$

Každá prostá funkce $f\colon A \to B$ má inverz čili inverzní funkci $f^{-1}\colon f[A] \to A$ danou předpisem

$$\forall\, y \in f[A]\ \forall\, x \in A\, \big(f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y\big) .$$

Následující dva důkazy jsou logicky docela zajímavé.

Věta 27 (spojitost inverzů) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá prostá funkce. Inverz $f^{-1}\colon f[M] \to M$ je spojitý v každé z následujících situací.*

1. *M je kompaktní množina.*
2. *M je interval.*
3. *M je otevřená množina.*
4. *M je uzavřená množina a f je monotónní.*

Důkaz. 1. M je kompaktní, $b \in f[M]$ a $(b_n) \subset f[M]$ má $\lim b_n = b$. Nechť $a := f^{-1}(b) \in M$ a $a_n := f^{-1}(b_n) \in M$. Dokážeme, že $\lim a_n = a$, což podle tvrzení 1 dává spojitost f^{-1} v b. Nechť (a_{m_n})

je podposloupnost posloupnosti $(a_n) \subset M$ s $\lim a_{m_n} = L \in \mathbb{R}^*$. Ale M je omezená a uzavřená, takže $L \in M$. Podle tvrzení 1 je $\lim f(a_{m_n}) = f(L) = b$, protože $(f(a_{m_n}))$ je podposloupnost posloupnosti (b_n). Vzhledem k prostotě f se $L = a$. Tedy posloupnost (a_n) nemá dvě podposloupnosti s různými limitami a podle části 2 tvrzení 7 ve druhé přednášce má limitu. Tou ovšem je, jak jsme právě nahlédli, číslo a.

2. M je interval. Podle důsledku 11 je f rostoucí nebo klesající. Nechť je f klesající, případ rostoucí f je podobný. Podle důsledku 9 je $f[M]$ interval. Nechť $b \in f[M]$ a buď dáno ε. Ukážeme, že f^{-1} je v b zprava spojitá. Triviálně to platí, když b je pravý konec intervalu $f[M]$, protože pak $U^+(b, \delta) \cap f[M] = \{b\}$. Nechť b není pravý konec intervalu $f[M]$. Protože f^{-1} klesá, $a := f^{-1}(b) \in M$ není levý konec intervalu M a búno je ε tak malé, že $[a - \varepsilon, a] \subset M$. Položíme

$$\delta := f(a - \varepsilon) - f(a) = f(a - \varepsilon) - b > 0 \ .$$

Podle věty 8 je f (klesající) bijekce z $[a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta]$ a tedy také z $(a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta)$. Tedy $[b, b+\delta) \subset f[M]$ a $U^+(b,\ \delta) \cap f[M] = U^+(b,\ \delta) = [b, b+\delta)$. Takže

$$f^{-1}[\,U^+(b,\ \delta) \cap f[M]\,] = U^-(a,\ \varepsilon) \subset U(a,\ \varepsilon) = U(f^{-1}(b),\ \varepsilon)$$

a f^{-1} je v b zprava spojitá. Spojitost funkce f^{-1} v b zleva se dokáže podobně. Tedy f^{-1} je v b spojitá.

3 a 4 viz **K**. $\square$

• *Úloha.* Odvoďte z této věty spojitost logaritmu a inverzů goniometrických funkcí.

DĚKUJI ZA POZORNOST!