Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 5, 16. 3. 2023

VLASTNOSTI LIMIT FUNKCÍ. SPOJITOST FUNKCE V BODU

• *Jednostranná limita funkce.* Na rozdíl od $\mathbb{C}$ nebo od prostorů $\mathbb{R}^n$ dimenze $n \ge 2$ se reálná osa $\mathbb{R}$ po vypuštění libovolného bodu rozpadne na dva oddělené kusy. K danému bodu se tedy v $\mathbb{R}$ dá limitně blížit ze dvou směrů. Odpovídají jim dvě jednostranné limity funkce v daném bodě, limita zleva a limita zprava. Týká se to ale jen vlastních bodů, nikoli nekonečen.

Definice 1 (jednostranná okolí) *Pro reálná čísla ε a b definujeme levé, resp. pravé, ε-okolí bodu b jako*

$$U^-(b,\,\varepsilon) := (b-\varepsilon,\,b],\ \textit{resp. } U^+(b,\,\varepsilon) := [b,\,b+\varepsilon)\ .$$

Podobně je levé, resp. pravé, prstencové ε-okolí bodu b definované jako

$$P^-(b,\,\varepsilon) := (b-\varepsilon,\,b),\ \textit{resp. } P^+(b,\,\varepsilon) := (b,\,b+\varepsilon)\ .$$

Opět tedy $P^{\pm}(b,\,\varepsilon) = U^{\pm}(b,\,\varepsilon) \setminus \{b\}$. Pomocí těchto okolí definujeme jednostranné limitní body.

Definice 2 (jednostranné limitní body) *Bod $b \in \mathbb{R}$ je levým, resp. pravým, limitním bodem množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud*

$$\forall\,\delta\,\big(P^-(b,\,\delta) \cap M \ne \emptyset\big),\ \ \textit{resp. }\ \forall\,\delta\,\big(P^+(b,\,\delta) \cap M \ne \emptyset\big)\ .$$

Jako dříve je bod b levým (resp. pravým) limitním bodem množiny

M, právě když existuje taková posloupnost (a_n) ležící v $(-\infty, b) \cap M$ (resp. v $(b, +\infty) \cap M$), že $\lim a_n = b$.

• *Úlohy.* Ukažte, že levý (resp. pravý) limitní bod množiny je její limitní bod. Ukažte, že (vlastní) limitní bod množiny je jejím levým nebo pravým limitním bodem. Uveďte příklad (vlastního) limitního bodu množiny, který není jejím pravým limitním bodem.

Definice 3 (jednostranné limity) *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, a je levý (resp. pravý) limitní bod množiny M a nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak píšeme $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, resp. $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, a řekneme, že funkce f má v bodě a limitu zleva, resp. zprava, rovnou L, pokud*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon\, \exists \delta \quad & \big(f[P^-(a, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)\big)\ , \\ & \textit{resp. } \big(f[P^+(a, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)\big)\ . \end{aligned}$$

• *Úlohy.* Když $\lim_{x\to a} f(x) = L$, pak $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ nebo a není levý limitní bod definičního oboru. Podobně pro limitu zprava. Pokud $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$, pak i $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Konečně pokud $\lim_{x\to a^-} f(x) = K$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ a $K \neq L$, pak $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Uvažme *funkci signum*

$$\mathrm{sgn}(x)\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}\ ,$$

definovanou jako $\mathrm{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ a $\mathrm{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$. V nule nemá limitu, protože $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1$ a $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$. Jednoznačnost limity a Heineho definice fungují pro jednostranné limity velmi podobně jako pro oboustranné limity.

• *Spojitost funkce v bodě.* Následuje důležitá definice.

Definice 4 (spojitost funkce v bodě) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bodě a, když*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\, \big(f[U(a,\, \delta) \cap M] \subset U(f(a),\, \varepsilon)\big)\ .$$

Jinak je f v bodě a nespojitá.

Srovnání s definicí $\lim_{x \to a} f(x) = L$: $L \rightsquigarrow f(a)$, $P(a, \delta) \rightsquigarrow U(a, \delta)$. Například $\mathrm{sgn}(x)$ je nespojitá v $x = 0$, ale $\forall\, x \neq 0$ je spojitá.

• *Úloha.* Ukažte, že funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M$, právě když

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\, \big(x \in M \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)\ .$$

Tvrzení 5 (o spojitosti v bodě) *Nechť je $b \in M \subset \mathbb{R}$, b je limitní bod množiny M a je dána funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$. Následující tři tvrzení jsou vzájemně ekvivalentní.*

1. *Funkce f je v bodě b spojitá.*
2. $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.
3. $\forall\, (a_n) \subset M$ *s* $\lim a_n = b$ *se* $\lim\, f(a_n) = f(b)$.

Důkaz. Implikace $1 \Rightarrow 2$. Předpokládáme, že f je spojitá v b podle definice 4 a že je dáno ε. Tedy existuje takové δ, že $f[U(b, \delta) \cap M] \subset U(f(b), \varepsilon)$. Tedy i $f[P(b, \delta) \cap M] \subset U(f(b), \varepsilon)$ a, podle definice limity funkce, $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.

Implikace $2 \Rightarrow 3$. Předpokládáme, že $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$, že je dána posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ a že je dáno ε. Tedy, podle definice limity funkce, existuje takové δ, že

$$f[P(b,\,\delta) \cap M] \subset U(f(b),\,\varepsilon)\ . \tag{*}$$

Vezmeme takové n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(b, \delta)$. Odtud plyne, že $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(f(b), \varepsilon)$: buď $a_n \neq b$, kdy můžeme použít inkluzi (*), anebo $a_n = b$, pak ale $f(a_n) = f(b) \in U(f(b), \varepsilon)$. Proto $\lim f(a_n) = f(b)$.

Implikace $3 \Rightarrow 1$, to jest $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$. Předpokládáme, že f není spojitá v b podle definice 4. Tedy existuje takové ε, že pro každé δ existuje takové $a = a(\delta) \in U(b, \delta) \cap M$, že $f(a) \notin U(f(b), \varepsilon)$. Pro každé n *vybereme* nějaké takové $a_n := a(1/n)$ a dostáváme posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$, ale $f(a_n) \notin U(f(b), \varepsilon)$ pro každé n a $(f(a_n))$ nemá limitu $f(b)$. Část 3 neplatí. $\square$

V důkazu poslední implikace jsme opět použili množinový axiom výběru.

Rozmyslíme si, co se děje se spojitostí funkce v bodě definičního oboru, který není jeho limitním bodem.

Definice 6 (izolované body) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $b \in M$. Bod b je izolovaný bod množiny M, když*

$$\exists\, \varepsilon \left(U(b,\,\varepsilon) \cap M = \{b\}\right)\ .$$

• *Úloha.* Ukažte, že pro $b \in M \subset \mathbb{R}$ vždy platí, že b není limitním bodem M, právě když b je izolovaným bodem M.

Tvrzení 7 (spojitost v iz. bodě) *Nechť je $b \in M \subset \mathbb{R}$, b je izolovaný bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom je f v bodě b spojitá.*

Důkaz. Nechť b, M a f jsou, jak je uvedeno. Pak existuje δ, že $U(b,\delta) \cap M = \{b\}$. Pro toto δ inkluze

$$f[U(b,\,\delta) \cap M] = \{f(b)\} \subset U(f(b),\,\varepsilon)$$

platí pro každé ε. Podle definice 4 je f spojitá v b. $\square$

- *Úloha.* Nechť $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost zapsaná jako funkce. V kterých bodech svého definičního oboru $\mathbb{N}$ je spojitá?

- *Jednostranná spojitost.* Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f je *zleva*, resp. *zprava*, *spojitá* v bodě a, když

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta \quad \big(f[U^-(a,\,\delta) \cap M] \subset U(f(a),\,\varepsilon)\big)\ ,$$
$$\text{resp.}\ \ \big(f[U^+(a,\,\delta) \cap M] \subset U(f(a),\,\varepsilon)\big)\ .$$

- *Úloha.* Dokažte, že funkce je v daném bodu spojitá, právě když je v něm zleva i zprava spojitá.

- *Riemannova funkce.* Tato funkce

$$r\colon \mathbb{R} \to \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

je definovaná jako

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \dots\ \ x \text{ je iracionální číslo a} \\ \frac{1}{n} & \dots\ \ x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ a } \frac{m}{n} \text{ je zlomek v základním tvaru}\ . \end{cases}$$

Tvrzení 8 (o Riemannově funkci) *Riemannova funkce je spojitá právě a jenom v iracionálních číslech.*

Důkaz. Nechť $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, kde $\frac{m}{n}$ je zlomek v základním tvaru, a nechť $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. Pro každé δ patrně existuje v $U(x,\delta)$ iracionální číslo α. Ale $r(\alpha) = 0 \notin U(r(x),\varepsilon) = U(\frac{1}{n},\varepsilon)$, takže funkce r není v bodě x spojitá.

Nechť je číslo $x \in \mathbb{R}$ iracionální a je dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Definujeme kladné δ jako $\delta := \min(M)$ pro množinu

$$M := \{|x - \tfrac{m}{n}| \mid \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q},\, \tfrac{m}{n} \in U(x,\, 1),\, 1/n \geq \varepsilon\}\ .$$

Toto $\delta > 0$ existuje, protože $M \neq \emptyset$, je konečná a její prvky jsou kladná čísla (viz následující úloha). Též $y \in U(x, \delta) \Rightarrow r(y) \in U(r(x), \varepsilon) = U(0, \varepsilon)$, protože pro každé $y \in U(x, \delta)$ je $r(y) = 0$ nebo $r(y) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Proto je funkce r spojitá v bodě x. $\square$

• *Úloha.* Zdůvodněte uvedené vlastnosti množiny M.

• *Limita monotónní funkce.* Monotonie funkcí se definuje podobně jako pro posloupnosti reálných čísel.

Definice 9 (monotonie funkcí) *Nechť M je množina reálných čísel a $f\colon M \to \mathbb{R}$.*

1. *Funkce f je (na M) neklesající, když pro každé $x, y \in M$ platí, že $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, a*
2. *Funkce f je (na M) nerostoucí, když pro každé $x, y \in M$ platí, že $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*

Funkce f je (na M) monotónní, je-li neklesající nebo nerostoucí.

Připomeňte si, kdy je množina reálných čísel shora (resp. zdola) (ne)omezená. Následující věta je formulována pro jednostrannou limitu a ne pro oboustrannou, protože to je přirozenější.

Věta 10 (limita monotónní funkce) *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *je levý limitní bod množiny* M *a nechť* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *je pro nějaké* δ *na* $P^-(a,\delta) \cap M$ *neklesající. Pak následující limita existuje a s označením* $N := f[P^-(a,\delta) \cap M] \subset \mathbb{R}$ *je*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & \ldots\ N \text{ je shora neomezená a} \\ \sup(N) \in \mathbb{R} & \ldots\ N \text{ je shora omezená}\,. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť N je shora neomezená a je dáno ε. Existuje tedy takové $x \in P^-(a,\delta) \cap M$, že $f(x) > 1/\varepsilon$. Protože f je na $P^-(a,\delta) \cap M$ neklesající, pro $\theta := a - x$ je $y \in P^-(a,\theta) \cap M \Rightarrow x < y < a \Rightarrow f(y) \ge f(x) > 1/\varepsilon$. Tedy $f[P^-(a,\theta) \cap M] \subset U(+\infty,\varepsilon)$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

Nechť je N shora omezená, $s := \sup(N)$ a je dáno ε. Podle definice suprema existuje takové $x \in P^-(a,\delta) \cap M$, že $s - \varepsilon < f(x) \le s$. Protože f je na $P^-(a,\delta) \cap M$ neklesající, pro $\theta := a - x$ je $y \in P^-(a,\theta) \cap M \Rightarrow x < y < a \Rightarrow s - \varepsilon < f(x) \le f(y) \le s$. Tedy $f[P^-(a,\theta) \cap M] \subset U(s,\varepsilon)$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = s$. $\square$

• *Úloha.* Popište další varianty věty: pro lokálně nerostoucí funkci a/nebo nevlastní limitní bod a/nebo limitu zprava.

• *Úloha.* Ukažte, že funkce $\mathrm{sgn}(x)\colon \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ ($\mathrm{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ a $\mathrm{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$) je na celém $\mathbb{R}$ monotónní, ale $\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x)$ neexistuje.

• *Aritmetika limit funkcí.* Následující větu formulujeme pro oboustranné limity a dokážeme ji Heineho definicí limity funkce. Nebudeme proto odvozovat odhady velikostí součtů, součinů a podílů. Už jsme si je odbyli v AL posloupností.

Věta 11 (AL funkcí) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $A, K, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod množiny M, funkce f, $g\colon M \to \mathbb{R}$ mají limity $\lim_{x \to A} f(x) = K$, $\lim_{x \to A} g(x) = L$ a výraz $K + L$, resp. KL, resp. K/L není neurčitý. Pak, po řadě,*

$$\lim_{x \to A} (f(x) + g(x)) = K + L,\ \lim_{x \to A} f(x)g(x) = KL$$

a $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}$, kde pro $g(x) = 0$ klademe $\frac{f(x)}{g(x)} := 0$.

Důkaz. Důkazy si jsou podobné a proto probereme jen podíl. Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ s $\lim a_n = A$. Podle Heineho definice limity funkce (implikace $\Rightarrow$) se $\lim f(a_n) = K$ a $\lim g(a_n) = L$. Předpokládáme, že $L \neq 0$, takže $g(a_n) \neq 0$ pro každé $n \geq n_0$, a že oba prvky K a L nejsou nekonečna. Podle věty o AL posloupností se pak

$$\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{K}{L} \,.$$

Protože toto platí pro každou posloupnost $(f(a_n)/g(a_n))$ s (a_n) jako výše, podle Heineho definice limity funkce (implikace $\Leftarrow$) je $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = K/L$. $\square$

- *Úloha.* Obměňte větu pro jednostranné limity.

- *Limity funkcí a* $(\mathbb{R}^*, <)$. Uvedeme dvě věty. Pro $M, N \subset \mathbb{R}$ porovnání $M < N$ znamená, že $a \in M, b \in N \Rightarrow a < b$.

Věta 12 (limita funkce a $(\mathbb{R}^*, <)$) *Nechť $A, K, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ a $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ mají limity $\lim_{x\to A} f(x) = K$ a $\lim_{x\to A} g(x) = L$. Platí následující.*

1. $K < L \Rightarrow \exists\,\delta\ \big(f[P(A,\delta)\cap M] < g[P(A,\delta)\cap M]\big)$.
2. $\forall\,\delta\ \exists\,x,\, y \in P(A,\delta)\cap M$ *s* $f(x) \ge g(y) \Rightarrow K \ge L$.

Důkaz. 1. Protože $K < L$, existuje ε, že $U(K,\varepsilon) < U(L,\varepsilon)$. Pak podle předpokladu o limitách funkcí f a g existuje δ, že $f[P(A,\delta)\cap M] \subset U(K,\varepsilon)$ a $g[P(A,\delta)\cap M] \subset U(L,\varepsilon)$. Tedy

$$f[P(A,\delta)\cap M] < g[P(A,\delta)\cap M]\ .$$

2. Jako pro limity posloupností je část 2 identická části 1, je to jen obměna implikace. □

Symbol $I(a,b)$ označuje uzavřený reálný interval s konci a a b.

Věta 13 (dva funkční strážníci) *Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod $M \subset \mathbb{R}$ a funkce $f, g, h\colon M \to \mathbb{R}$ splňují podmínky, že $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} h(x) = L$ a $\exists\,\delta\ \forall\,x \in P(A,\delta)\cap M\ \big(g(x) \in I(f(x), h(x))\big)$. Pak též*

$$\lim_{x\to A} g(x) = L\ .$$

Důkaz. Nechť A, L, M, f, g a h jsou, jak je uvedeno, a je dáno ε. Tedy existuje δ, že množiny $f[P(A,\delta)\cap M]$ a $h[P(A,\delta)\cap M]$ jsou obsažené v $U(L,\varepsilon)$. Odtud a díky konvexitě okolí $U(L,\varepsilon)$ máme pro každé $x \in P(A,\delta)\cap M$, že $I(f(x), h(x)) \subset U(L,\varepsilon)$. Podle předpokladu je $g[P(A,\delta)\cap M] \subset U(L,\varepsilon)$ a $\lim_{x\to A} g(x) = L$. □

• *Limita složené funkce.* Skládání funkcí je operace nemající obdobu v oboru posloupností a následující limitní věta je v tomto ohledu novinkou. Po důkazu vysvětlíme, proč je naše následující formulace lepší než formulace jiné.

Věta 14 (limita složené funkce) *Nechť $A, K, L \in \mathbb{R}^*$, $M, N \subset \mathbb{R}$, A je limitní bod M, K je limitní bod N a funkce $g\colon M \to N$ a $f\colon N \to \mathbb{R}$ mají limity $\lim_{x\to A} g(x) = K$ a $\lim_{x\to K} f(x) = L$. Pak složená funkce*

$$f(g)\colon M \to \mathbb{R} \text{ má limitu } \lim_{x\to A} f(g)(x) = L$$

$\iff$ *platí podmínka 1 nebo podmínka 2.*

1. *$K \in N$ (pak $K \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f(K) = L$ (pak $L \in \mathbb{R}$).*
2. *$\exists\, \delta \big(K \notin g[P(A,\delta) \cap M]\big)$.*

Neplatí-li ani 1 ani 2, pak limita $\lim_{x\to A} f(g)(x)$ neexistuje nebo $\lim_{x\to A} f(g)(x) = f(K) \neq L$.

Důkaz. Buď dáno ε. Podle předpokladu o limitách obou funkcí existuje takové δ, že (i) $f[P(K,\delta) \cap N] \subset U(L,\varepsilon)$, a takové θ, že (ii) $g[P(A,\theta) \cap M] \subset U(K,\delta)$. Nechť platí 1. Inkluzi (i) pak zesílíme na $f[U(K,\delta) \cap N] \subset U(L,\varepsilon)$. V řetězci dvou inkluzí

$$\begin{aligned} f(g)[P(A,\,\theta) \cap M] &= f[g[P(A,\,\theta) \cap M]] \\ &\subset f[U(K,\,\delta) \cap N] \subset U(L,\,\varepsilon) \end{aligned}$$

díky tomu platí druhá z nich a $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$.

Nechť platí 2. Pak vezmeme θ menší než ono δ a inkluzi (ii) zesílíme na $g[P(A,\theta)\cap M]\subset P(K,\delta)$. V řetězci dvou inkluzí

$$\begin{aligned} f(g)[P(A,\,\theta)\cap M] &= f[g[P(A,\,\theta)\cap M]] \\ &\subset f[P(K,\,\delta)\cap N]\subset U(L,\,\varepsilon) \end{aligned}$$

díky tomu platí první z nich a opět $\lim_{x\to A} f(g(x)) = L$.

Nechť ani 1 ani 2 neplatí. Neplatnost podmínky 1 znamená, že K je v N, ale $f(K)\neq L$. Neplatnost podmínky 2 říká, že $\forall\, n\ \exists\, a_n \in P(A,1/n)\cap M\ \big(g(a_n)=K\big)$. Posloupnost (a_n) leží v $M\setminus\{A\}$, má limitu $\lim a_n = A$ a

$$\lim\, f(g)(a_n) = \lim\, f(g(a_n)) = \lim\, f(K) = f(K)\ (\neq L)\ .$$

Podle Heineho definice $\lim_{x\to A} f(g(x))$ tedy tato limita buď neexistuje, anebo se rovná $f(K)$, což není L. $\square$

Podmínka 1, která je implikací, je splněna vždy, když $K\notin N$. Tedy například vždy, když $K=\pm\infty$. Jinde se tato podmínka neformuluje jako implikace, jako zde, ale jako požadavek, že $f(K)=L$. Zeslabením na naši podmínku 1 jsme zde dostali větu ve tvaru ekvivalence. To je novum, jiné formulace věty o limitě složené funkce ekvivalencemi nejsou (jsou to jen implikace). Další předností naší formulace věty je, že uvádí, co nastane, když ani jedna z podmínek 1 a 2 není splněna.

• *Úloha.* Ukažte na dvou příkladech, že když není splněna ani podmínka 1 ani podmínka 2, mohou nastat obě uvedené možnosti.

• *Úlohy.* Ukažte, jak z předešlé věty plyne následující často užívaná ekvivalence. Když $M\subset(0,+\infty)$ a 0 je pravým limitním bodem M, pak pro každou funkci $f\colon M\to\mathbb{R}$ a každé $L\in\mathbb{R}^*$ platí ekvivalence

$$\lim_{y\to 0} f(y) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f(1/x) = L\ .$$

Jak je ale přesně definovaná funkce $f(1/x)$ na pravé straně? Zformulujte tuto ekvivalenci i pro limitu v $-\infty$.

• *Asymptotické symboly O, o a $\sim$.* Jsou to nejčastěji užívané symboly označující asymptotické vztahy mezi funkcemi. Dále se lze setkat s Θ, $\ll$, Ω a dalšími.

Definice 15 (velké O) *Nechť je $M \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ a $N \subset M$. Pokud*

$$\exists\, c \geq 0\ \forall\, x \in N\ \big(|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|\big)\ ,$$

píšeme $f(x) = O(g(x))$ $(x \in N)$ a řekneme, že funkce f je na množině N velké O z funkce g.

• *Úlohy.*

1. Je $x^2 = O(x^3)$ $(x \in \mathbb{R})$?
2. Je $x^3 = O(x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$?
3. Je $x^3 = O(x^2)$ $(x \in (-20, 20))$?
4. Je $\log x = O(x^{1/3})$ $(x \in (0, +\infty))$?
5. Je $\log x = O(x^{1/3})$ $(x \in (1, +\infty))$?

Zbylé dva asymptotické symboly se definují limitně.

Definice 16 (malé o a $\sim$) *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ jsou funkce a $\exists\, \delta\ \forall\, x \in P(A,\delta) \cap M\ \big(g(x) \neq 0\big)$.*

1. *Když $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x))\ (x \to A)$ – pro x jdoucí k A je f malé o z g.*
2. *Když $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = 1 \Rightarrow f(x) \sim g(x)\ (x \to A)$ – pro x jdoucí k A se f asymptoticky rovná g.*

- *Úlohy.*

1. Je $x^2 = o(x^3)\ (x \to +\infty)$?
2. Je $x^3 = o(x^2)\ (x \to 0)$?
3. Je $x^2 = o(x^3)\ (x \to 0)$?
4. Je $(x+1)^3 \sim x^3\ (x \to 1)$?
5. Je $(x+1)^3 \sim x^3\ (x \to +\infty)$?
6. Je $e^{-1/x^2} = o(x^{20})\ (x \to 0)$?

DĚKUJI ZA POZORNOST!