Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 4, 9. 3. 2023

ŘADY. LIMITY FUNKCÍ. ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

• *Řady.* Na řady se teď podíváme blíže. *Řada*

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

je jednak posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, jejímž členům a_n teď říkáme *sčítance*, jednak limita

$$\lim s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \in \mathbb{R}^*$$

posloupnosti

$$(s_n) := (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

částečných součtů s_n, které říkáme *součet řady*. Má-li řada vlastní součet, pak *konverguje*, jinak *diverguje*. Konvergence či divergence řady se nenaruší změnou jen konečně mnoha sčítanců, ale na rozdíl od limity posloupnosti se součet řady může změnit už změnou jediného sčítance.

U posloupností (a_n) se držíme indexů $n \in \mathbb{N}$, takže $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$, ale u řad sčítací index n často probíhá i množiny odlišné od $\mathbb{N}$ a často se také označuje jinými písmeny. Můžeme se tak setkat s řadami

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m,\ \ \sum_{j=6}^{100} b_j,\ \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,\ \ \sum_{\substack{n\in A\\ n\neq x}} u_n,\ \ \sum_{k\geq 0} c_k$$

a podobně, nemluvě o dvojitých a vícenásobných řadách. Následující tvrzení plyne hned z věty o monotónní posloupnosti.

Tvrzení 1 (nezáporné sčítance) *Když má řada* $\sum a_n$ *sčítance* $a_n \geq 0$ *pro každé* $n \geq n_0$*, pak* $\sum a_n$ *má součet a ten není* $-\infty$.

Podobné tvrzení platí pro řady se skoro všemi sčítanci nekladnými.

Tvrzení 2 (nutná podmínka konvergence řady) *Když řada* $\sum a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Když $\sum a_n$ konverguje, pak $S := \lim s_n \in \mathbb{R}$ (zde $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$). Podle výsledků o limitě podposloupnosti a podle aritmetiky limit je

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0\,.$$

□

Podle tohoto tvrzení tedy obě řady

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

divergují. První má součet $+\infty$ (viz tvrzení 1) a druhá (uvedená už v závěru minulé přednášky) nemá součet.

• *Harmonická řada.* Opačná implikace v předešlém tvrzení ale neplatí: uvažme řadu se sčítanci

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = \frac{1}{8},\ \ldots$$
$$\ldots,\ a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2^{k+1}},\ \ldots\ .$$

Pak zřejmě $\lim a_n = 0$, ale $s_1 < s_2 < \ldots$ a

$$s_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2}\ ,$$

takže $\sum a_n = \lim s_n = +\infty$ (proč?) a řada diverguje. Dostáváme tak následující výsledek.

Tvrzení 3 (harmonická řada) *Tzv.* harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

diverguje a má součet $+\infty$*.*

Důkaz. Nechť (h_n) jsou částečné součty harmonické řady a (s_n) jsou částečné součty předešlé řady $\sum a_n$. Pak $1/n > a_n$ pro každé n, tedy i $h_n > s_n$ pro každé n. Protože $\lim s_n = +\infty$, podle věty o jednom strážníkovi i $\lim h_n = +\infty$ a $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. □

Částečné součty harmonické řady jsou tzv. *harmonická čísla*. Zde je jejich asymptotika.

Věta 4 (o harmonických číslech) *Uvažme harmonická čísla* $h_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$*. Pak existuje konstanta* $c > 0$*, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *se*

$$h_n = \log n + \gamma + \Delta_n,\ |\Delta_n| \le \frac{c}{n}\ ,$$

kde $\gamma = 0.57721\dots$ *je tzv. Eulerova konstanta.*

- *Úloha.* Dokažte, že $h_n \in \mathbb{N} \iff n = 1$. Návod: $m = 2^k(2l-1)$.

Dokázat iracionalitu γ, že $\gamma \notin \mathbb{Q}$, je dosud nevyřešený problém.

- *Riemannova věta.* Na začátku první přednášky jsme se v paradoxu nekomutativity nekonečných součtů setkali s řadou

$$1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \dots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n} + \dots$$

se „zřejmým“ součtem 0. Ten jsme zpřeházením sčítanců změnili na kladný. Součet 0 je ale skutečně správný, protože řada má částečné součty 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, 0, ... a ty jdou v limitě k 0.

Věta 5 (Riemannova) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada stejného typu, jako je předchozí, tedy nechť platí:*

1. $\lim a_n = 0$,
2. $\sum a_{k_n} = +\infty$, *kde a_{k_n} jsou kladné sčítance řady, a*
3. $\sum a_{z_n} = -\infty$, *kde a_{z_n} jsou záporné sčítance řady.*

Pak pro každé $S \in \mathbb{R}^*$ existuje taková bijekce $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S\ .$$

• *Úloha.* Ukažte, že existuje i taková bijekce π, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ vůbec součet nemá.

Věta je nazvána po *Bernhardu Riemannovi (1826–1866)*.

• *Absolutně konvergentní řady* jsou naopak řady, jejichž součet se žádným přerovnáním sčítanců nezmění. Teprve ony představují správné zobecnění konečných součtů na nekonečné.

Definice 6 (AK řady) *Řada $\sum a_n$ je absolutně konvergentní, zkráceně* AK, *konverguje-li řada $\sum |a_n|$.*

Tvrzení 7 *Každá* AK *řada konverguje.*

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ je AK řada s částečnými součty (s_n). Stačí ukázat, že (s_n) je Cauchyova – podle věty o Cauchyově podmínce pak (s_n) konverguje. Nechť (t_n) jsou částečné součty řady $\sum |a_n|$. Pro každé dva indexy $m \leq n$ je

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| = |t_n - t_m| \; .$$

Ale (t_n) je Cauchyova (dle v. o CP), takže i (s_n) je Cauchyova. $\square$

Věta 8 (komutativita AK řad) *Nechť* $\sum a_n$ *je řada. Pak* $\sum a_n$ *je* AK, *právě když*

$$\forall \text{ bijekci } \pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} \in \mathbb{R}\right)$$

ve smyslu součtů.

- *Úloha.* Když je řada $\sum a_n$ AK, pak i každé její přerovnání $\sum a_{\pi(n)}$ je AK.
- *Geometrické řady* jsou řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \ldots$$

s parametrem $q \in \mathbb{R}$ zvaným *kvocient*.

Věta 9 (o geometrické řadě) *Součet geometrické řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} 1/(1-q) & \ldots \quad -1 < q < 1 \; , \\ +\infty & \ldots \quad 1 \leq q \; , \\ \textit{neexistuje} & \ldots \quad q \leq -1 \; . \end{cases}$$

Důkaz. Pro každé $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí identita

$$s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} + \frac{q^n}{q-1} \; .$$

Pro $q < -1$ tedy podle aritmetiky limit máme $\lim s_{2n-1} = +\infty$, $\lim s_{2n} = -\infty$ a tedy $\lim s_n$ neexistuje – geometrická řada nemá součet. Pro $q = -1$ je podobně $s_{2n-1} = 1$, $s_{2n} = 0$ a geometrická řada opět nemá součet. Pro $-1 < q < 1$ je $\lim q^n = 0$, takže podle aritmetiky limit má geometrická řada součet $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$. Pro $q = 1$ je $s_n = n$, takže geometrická řada má součet $\lim s_n = +\infty$. Pro $q > 1$ je $\lim q^n = +\infty$, takže podle aritmetiky limit má geometrická řada součet $\lim s_n = +\infty$. $\square$

Jedno rychlé použití vzorce pro součet geometrické řady:

$$27.272727\cdots = 27(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots) = 27 \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}}$$
$$= \frac{27 \cdot 100}{99} = \frac{300}{11}\ .$$

• *Úlohy.* Pro $q \in (-1, 1)$ a $m \in \mathbb{Z}$ platí, že

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots = q^m/(1-q)\ .$$

Která geometrická řada je AK?

• *Zeta (dzéta) funkce* $\zeta(s)$ je funkce $\zeta(s)\colon \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definovaná řadou. Zde ji definujeme jen pro reálné $s > 1$. Použijeme funkci reálné mocniny a^b pro $a > 0$, kterou zavedeme ve druhé polovině přednášky. Takže pro $s \in \mathbb{R}$ vezmeme řadu

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\ .$$

Věta 10 (o zeta funkci) *Pro $s \le 1$ má řada $\zeta(s)$ součet $+\infty$. Pro $s > 1$ (absolutně) konverguje.*

- *Úloha.* Dokažte, že pro $s \le 1$ je součet $\zeta(s) = +\infty$.

Leonhard Euler (1707–1783) odvodil vzorce pro hodnoty $\zeta(2n)$ pro každé n, například $\zeta(2) = \pi^2/6$ a $\zeta(4) = \pi^4/90$. Vzorec pro žádnou hodnotu $\zeta(2n-1)$ není znám. Je ale známo, že $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

... ——————————————————————— ...

- *Limity funkcí.* Pro $A \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon > 0$ máme ε-okolí $U(A, \varepsilon)$ a prstencová ε-okolí $P(A, \varepsilon) = U(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ prvku A.

Definice 11 (limitní body) *Prvek $L \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, když $\forall\, \varepsilon \big(P(L, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\big)$.*

Jinými slovy, $L \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, právě když existuje posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{L\}$ s $\lim a_n = L$.

Zobecníme pojem limity z posloupností na funkce. Připomeňme si, že pro $f\colon A \to B$ a $C \subset A$ je $f[C] = \{f(x) \mid x \in C\} \subset B$.

Definice 12 (limita funkce) *Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, A je limitní bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Pokud*

$$(*) \qquad \forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta \left(f[P(A, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)\right) ,$$

píšeme $\lim_{x \to A} f(x) = L$ a řekneme, že funkce f má v A limitu L.

Vzhledem k $P(A, \delta)$ v definici limita nezávisí na hodnotě $f(A)$. Funkce f ani nemusí, a pro $A = \pm\infty$ ani nemůže, být v prvku A definovaná. Pro posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je

$$\lim a_n = \lim_{x \to +\infty} a(x) ,$$

kde napravo posloupnost chápeme jako funkci $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

• *Důležitá úloha.* Když A není limitní bod množiny M, pak $(*)$ platí pro každé $L \in \mathbb{R}^*$ a tato obecnější „limita“ funkce tak není jednoznačná!

Tvrzení 13 (jednoznačné limity) *Limita funkce je jednoznačná: když $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $K, L, L' \in \mathbb{R}^*$ a K je limitní bod množiny M, pak platí implikace*

$$\lim_{x \to K} f(x) = L \wedge \lim_{x \to K} f(x) = L' \Rightarrow L = L' \ .$$

Důkaz. Přímý, jako pro limitu posloupnosti. $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta$, že *neprázdná* množina $f[P(K,\delta) \cap M]$ je obsažená v $U(L,\varepsilon)$ i v $U(L',\varepsilon)$. Tedy $\forall\, \varepsilon\ \big(U(L,\varepsilon) \cap U(L',\varepsilon) \neq \emptyset\big)$. Tudíž, jak víme, $L = L'$. $\square$

Následující věta ukazuje, jak redukovat limitu funkce na limity posloupností.

Věta 14 (Heineho definice) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, K, L jsou prvky $\mathbb{R}^*$, K je limitní bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak*

$$\lim_{x \to K} f(x) = L \iff$$
$$\iff \forall\, (a_n) \subset M \setminus \{K\} \left(\lim a_n = K \Rightarrow \lim f(a_n) = L\right) .$$

Tedy L je limita funkce f v K, právě když pro každou posloupnost (a_n) v M, která má limitu K, ale nikdy se K nerovná, funkční hodnoty $(f(a_n))$ mají limitu L.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že $\lim_{x \to K} f(x) = L$, že $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ má limitu K a je dáno ε. Pak existuje δ, že pro každé $x \in M \cap P(K,\delta)$ je $f(x) \in U(L,\varepsilon)$. Pro toto δ existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in P(K,\delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(L,\varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

Implikace $\Leftarrow$ pomocí své obměny $\neg \Rightarrow \neg$. Předpokládáme, že $\lim_{x\to K} f(x) = L$ neplatí, a odvodíme z toho, že pravá strana ekvivalence neplatí. Takže existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje bod $b = b(\delta) \in M \cap P(K,\delta)$, že $f(b) \notin U(L,\varepsilon)$. Položíme $\delta = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a pro každé n *vybereme* takový bod $b_n := b(1/n) \in M \cap P(K,1/n)$, že $f(b_n) \notin U(L,\varepsilon)$. Posloupnost (b_n) leží v $M \setminus \{K\}$ a konverguje ke K, ale posloupnost hodnot $(f(b_n))$ nekonverguje k L. Pravá strana ekvivalence tedy neplatí. $\square$

V důkazu implikace $\Leftarrow$ jsme použili tzv. *axiom výběru.*

Spočítáme si alespoň jednu limitu funkce: díky identitě $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ máme, že

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1}\\ &= \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

- *Exponenciální funkce.* Je z elementárních funkcí nejdůležitější.

Definice 15 (exponenciála) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ položíme*

$$\mathrm{e}^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$$

- *Úloha.* Pomocí geometrických řad dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je tato řada AK.

Tvrzení 16 (exponenciální identita) *Platí, že*

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R} \left(\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \right) .$$

Tvrzení 17 (vlastnosti funkce e^x) *Platí následující.*

1. $\exp(0) = 1$ *a* $\forall\, x$ *je* $\exp(x) > 0$ *a* $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.
2. $\forall\, x\, \forall\, y$ *platí, že* $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$.
3. $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
4. $\exp$ *je bijekce z* $\mathbb{R}$ *do* $(0, +\infty)$.

Definice 18 ((reálné) číslo e) e *označuje číslo* $\exp(1) = \sum_{n \ge 0} 1/n! = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2.71828\ldots$. *Říká se mu Eulerovo číslo.*

• *Úloha.* Dokažte, že e je iracionální. Návod: rovnici $\sum_{j \ge 0} \frac{1}{j!} = \frac{n}{m}$ vynásobte číslem $m!$.

• *Logaritmus* $\log x$ je inverzní funkce k exponenciále, takže $\log := \exp^{-1} \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Základní vlastnosti dostaneme invertováním vlastností exponenciály.

Tvrzení 19 (vlastnosti logaritmu) *Platí následující.*

1. $\log(1) = 0$ *a* $\forall\, x,\, y > 0$ *je* $\log(xy) = \log x + \log y$ *a* $x < y \Rightarrow \log(x) < \log(y)$.
2. $\lim_{x \to 0} \log(x) = -\infty$ *a* $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$.
3. $\log$ *je bijekce z* $(0, +\infty)$ *do* $\mathbb{R}$.

- *Reálná mocnina a^b.* Zde ji zavedeme pouze pro $a \geq 0$. Samozřejmě ale víme, že třeba $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Definice 20 (a^b) *Pro $a, b \in \mathbb{R}$ s $a > 0$ definujeme*

$$a^b := \exp(b \log a)$$

a pro $b > 0$ klademe $0^b := 0$.

Pro číslo $\mathrm{e} = \exp(1)$ a každé reálné $x \in \mathbb{R}$ pak skutečně máme, že $\mathrm{e}^x = \exp(x \log(\exp(1))) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$.

Tvrzení 21 (mocninné identity) $\forall\, a, b > 0\ \forall\, x, y$ *platí identity*

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \& \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}\ .$$

Důkaz. **1.** $(ab)^x = \exp(x \log(ab)) = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x \log a) \exp(x \log b) = a^x b^x$. **2.** $a^x a^y = \exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp((x + y) \log a) = a^{x+y}$. **3.** $(a^x)^y = \exp(y \log(\exp(x \log a))) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$. $\square$

Ale $\big((-1)^2\big)^{1/2} = 1^{1/2} = 1 \neq -1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot 1/2}$.

- *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 22 (0^0 je neurčitý výraz) *Pro každé $A \geq 0$ existují takové posloupnosti $(a_n) \subset (0, +\infty)$ a (b_n), že*

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad a \quad \lim\, (a_n)^{b_n} = A\ .$$

- *Úloha.* Volte obě posloupnost tak, že $\lim\, (a_n)^{b_n}$ neexistuje.

• *Kosinus a sinus.* Tyto funkce $\cos, \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pocházejí z geometrie, ale lze je definovat řadami.

Definice 23 (kosinus a sinus) *$\forall\, t \in \mathbb{R}$ nechť*

$$\cos t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \quad a \quad \sin t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\ .$$

Tedy $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$ *a* $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$.

• *Úloha.* Pomocí geometrických řad dokažte, že pro každé t jsou obě řady AK.

Jako

$$S := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

označíme jednotkovou kružnici (tj. s poloměrem 1) v rovině se středem v počátku $(0, 0)$.

Věta 24 (o běžkyni) *Nechť $t \in \mathbb{R}$. Běžkyně, jež vyběhne po dráze S jednotkovou rychlostí z bodu $(1, 0) \in S$ a běží proti (resp. po) směru hodinových ručiček pro $t > 0$ (resp. $t \le 0$) se v čase $|t|$ nachází v bodě*

$$(\cos t,\, \sin t) \in S\ .$$

Kosinus a sinus tedy mají známé geometrické vlastnosti.

Definice 25 (první definice π) *Jako π označíme číslo*

$$2 \cdot \min(\{x > 0 \mid \cos x = 0\}) = 3.14159\dots\ .$$

Definice 26 (druhá definice π) *Toto číslo můžeme neformálně definovat i tak, že obvod kružnice S, tedy čas, kdy běžkyně opět proběhne startem, je 2π.*

Je to neformální definice, neboť délka kruhového oblouku není definovaná. Bez důkazu uvedeme základní vlastnosti sinu a kosinu.

Tvrzení 27 (vlastnosti sinu a kosinu) *Jsou tyto.*

1. *2π-periodičnost.* $\cos(t+2\pi) = \cos t$, $\sin(t+2\pi) = \sin t$.
2. *Na* $[0, \pi/2]$ *sinus roste z* 0 *do* 1.
3. $\forall\, t \in [0, \pi]\,\big(\sin(t) = \sin(\pi - t)\big)$, $\forall\, t \in [0, 2\pi]\,\big(\sin(t) = -\sin(2\pi - t)\big)$.
4. $\forall\, t$ *se* $\cos t = \sin(t + \pi/2)$ *a* $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
5. *součtové vzorce.* $\forall\, s,\, t \in \mathbb{R}$ *je*

$$\begin{aligned} \sin(s \pm t) &= \sin s \cdot \cos t \pm \cos s \cdot \sin t\ , \\ \cos(s \pm t) &= \cos s \cdot \cos t \mp \sin s \cdot \sin t\ . \end{aligned}$$

• *Úloha.* Odvoďte z těchto vlastností, že $\cos, \sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

• *Další trigonometrické funkce, inverzy.* Dále tu jsou funkce *tangens* a *kotangens*,

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \ \text{ a } \ \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}\ .$$

Arkus sinus (*inverzní sinus*) a *arkus kosinus* (*inverzní kosinus*) je, po řadě, inverz restrikce sinu a kosinu na interval $[-\pi/2, \pi/2]$ a $[0, \pi]$. Jsou to bijekce

$$\arcsin\colon [-1,\, 1] \to [-\pi/2,\, \pi/2] \ \text{ a } \ \arccos\colon [-1,\, 1] \to [0,\, \pi]\ .$$

Podobně *arkus tangens* a *arkus kotangens* je, po řadě, inverz restrikce funkce tangens a kotangens na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ a $(0, \pi)$. Jsou to bijekce

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2,\ \pi/2) \ \text{ a } \ \operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\ \pi)\ .$$

DĚKUJI ZA POZORNOST!