Martin Klazar

# MA 1, PŘEDNÁŠKA 2, 23. 2. 2023

## EXISTENCE LIMIT REÁLNÝCH POSLOUPNOSTÍ

• *Opakování.* Připomeňte si, co je úplné uspořádané těleso $\mathbb{R}$ a co jsou přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ a (s nulou) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Písmena $i$, $j$, $k$, $l$, $m$, $m_0$, $m_1$, $\dots$, $n$, $n_0$, $n_1$, $\dots$ označují přirozená čísla. Písmena $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $\delta$, $\varepsilon$ a $\theta$, případně s indexy, označují reálná čísla. Čísla $\delta$, $\varepsilon$, $\theta > 0$ – jsou vždy kladná – a představujeme si je jako blízká nule. Připomeňte si, že *(reálná) posloupnost* $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset \mathbb{R}$ je vlastně funkce $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

• *Počítání s nekonečny.* Pro nevlastní limity přidáme k $\mathbb{R}$ dva nové různé prvky, *nekonečna* $+\infty$ a $-\infty$. Souhrnně je označíme jako $\pm\infty$ či $\mp\infty$. Získáme tak *rozšířenou reálnou osu*

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \ .$$

V $\mathbb{R}^*$ se s $\pm\infty$ počítá následovně.

V řádku bereme vždy jen horní nebo jen dolní znaménka.

$$\begin{aligned}
A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \ &\Rightarrow \ A + (\pm\infty) = \pm\infty + A := \pm\infty \ , \\
A \in (0,\, +\infty) \cup \{+\infty\} \ &\Rightarrow \ A \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot A := \pm\infty \ , \\
A \in (-\infty,\, 0) \cup \{-\infty\} \ &\Rightarrow \ A \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot A := \mp\infty \ , \\
a \in \mathbb{R} \ &\Rightarrow \ \frac{a}{\pm\infty} := 0 \ ,
\end{aligned}$$

$-(\pm\infty) := \mp\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}\, \big(-\infty < a < +\infty\big)$ a $-\infty < +\infty$.

Odečtení prvku $A \in \mathbb{R}^*$ znamená přičtení $-A$ a dělení nenulovým $a \in \mathbb{R}$ znamená násobení číslem $1/a$. Všechny ostatní hodnoty operací, to jest výrazy (zde $A \in \mathbb{R}^*$)

$$\frac{A}{0},\ (\pm\infty)+(\mp\infty),\ 0\cdot(\pm\infty),\ (\pm\infty)\cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ \text{ a }\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty}\ ,$$

jsou nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy*. Speciálně multiplikativní inverzy $(\pm\infty)^{-1}$ nejsou definované, i když $1/\pm\infty = 0$. Prvky v $\mathbb{R}^*$ označujeme písmeny $A$, $B$, $K$ a $L$.

• *Úlohy.* Dokažte, že $(\mathbb{R}^*, <)$ je lineární uspořádání a že v něm *každá* podmnožina $B \subset \mathbb{R}^*$ má supremum i infimum.

• *Okolí bodů a nekonečen.* Připomeneme si značení reálných intervalů:

$$(a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\},\ (-\infty,\, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

a podobně.

**Definice 1 (okolí)** *$\varepsilon$-okolí bodu $b$, $U(b,\varepsilon)$, a prstencové $\varepsilon$-okolí bodu $b$, $P(b,\varepsilon)$, definujeme jako*

$$U(b,\,\varepsilon) := (b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)\ \text{ a }\ P(b,\,\varepsilon) := (b-\varepsilon,\, b)\cup(b,\, b+\varepsilon)\ ,$$

*takže $P(b,\varepsilon) = U(b,\varepsilon)\setminus\{b\}$. $\varepsilon$-okolí nekonečen jsou*

$$U(-\infty,\,\varepsilon) := (-\infty,\, -1/\varepsilon)\ \text{ a }\ U(+\infty,\,\varepsilon) := (1/\varepsilon,\, +\infty)\ .$$

*Klademe $P(\pm\infty,\varepsilon) := U(\pm\infty,\varepsilon)$.*

• *Úlohy.* Nechť $V, V' \in \{U, P\}$ a $A, B \in \mathbb{R}^*$. 1. Platí, že

$$A < B \Rightarrow \exists\,\varepsilon\,\big(a \in V(A,\,\varepsilon) \wedge b \in V'(B,\,\varepsilon) \Rightarrow a < b\big)\ .$$

Speciálně, když $A \ne B$, pak $\exists\,\varepsilon\,\big(V(A,\varepsilon)\cap V'(B,\varepsilon) = \emptyset\big)$.

2. Platí, že $\varepsilon \le \delta \Rightarrow V(A,\varepsilon) \subset V(A,\delta)$.

3. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí, že

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U(a,\, 1/k) = \{a\},\ \bigcap_{k=1}^{\infty} P(a,\, 1/k) = \emptyset$$

a $\bigcap_{k=1}^{\infty} U(\pm\infty, 1/k) = \emptyset$.

• *Limity (reálných) posloupností.* Není-li řečeno jinak, $(a_n)$, $(b_n)$ a $(c_n) \subset \mathbb{R}$ označují reálné posloupnosti. Následující definice patří v analýze k nejdůležitějším.

**Definice 2 (limita posloupnosti)** *Nechť $(a_n)$ je reálná posloupnost a $L \in \mathbb{R}^*$. Pokud*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0 \left(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L,\, \varepsilon)\right)\ ,$$

*píšeme, že* $\lim a_n = L$ *nebo* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *nebo* $a_n \to L$, *a řekneme, že posloupnost $(a_n)$ má limitu $L$.*

Pro $L \in \mathbb{R}$ mluvíme o *vlastní* limitě a pro $L = \pm\infty$ o limitě *nevlastní*. Posloupnost mající vlastní limitu *konverguje*, jinak *diverguje*. Vlastní limita $\lim a_n = a$ znamená, že pro každé reálné (a jakkoli malé) $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \in \mathbb{N}$ velký alespoň $n_0$ je vzdálenost mezi $a_n$ a $a$ menší než $\varepsilon$:

$$|a_n - a| < \varepsilon\ .$$

Nevlastní limita $\lim a_n = -\infty$ znamená, že pro každé (jakkoli záporné) $c \in \mathbb{R}$ existuje index $n_0$, že pro každý index $n$ velký alespoň $n_0$ je

$$a_n < c\ .$$

Podobně s opačnou nerovností pro limitu $+\infty$. *Eventuálně konstantní* posloupnost $(a_n)$ s $a_n = a$ pro každé $n \geq n_0$ je příklad konvergentní posloupnosti, samozřejmě $\lim a_n = a$.

**Definice 3 (robustnost)** *Nechť $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je množina všech reálných posloupností. Vlastnost $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nazveme robustní, pokud pro každé dvě posloupnosti $(a_n)$ a $(b_n)$ platí, že $\big(\exists\, n_0\, \big(n \geq n_0 \Rightarrow a_n = b_n\big)\big) \Rightarrow \big((a_n) \in V \iff (b_n) \in V\big)$.*

• *Úlohy.* Která z následujících vlastností posloupností je robustní? $V_1$: $(a_n)$ konverguje, $V_2$: $(a_n)$ diverguje a $V_3$: $\lim a_n = -\infty$.

**Tvrzení 4 (jednoznačnost** lim**)** *Limita posloupnosti je jednoznačná. Platí, že* $\lim a_n = K$ *a* $\lim a_n = L \Rightarrow K = L$.

**Důkaz.** Nechť $\lim a_n = K$ i $\lim a_n = L$ a $\varepsilon$ je libovolné. Podle definice 2 existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(K, \varepsilon)$ i $a_n \in U(L, \varepsilon)$. Tedy $\forall\, \varepsilon\, \big(U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) \neq \emptyset\big)$. Dle úlohy výše se $K = L$. □

• *Dvě limity.* Ukážeme, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. Což je jasné, pro dané $\varepsilon$ a každé $n \geq n_0 := 1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil$ je

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\underbrace{1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil}_{> 1/\varepsilon}} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \rightsquigarrow 1/n \in U(0,\, \varepsilon)\ .$$

Zde $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ označuje *horní celou část* čísla $a$, je to nejmenší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \geq a$. Podobně *dolní celá část* $\lfloor a \rfloor$ čísla $a$ je největší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \leq a$. Druhý příklad je, že

$$\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \to -\infty\ .$$

Pro dané $c < 0$ totiž pro každé $n \geq n_0 > \max(\{4c^2, 2^6\})$ je

$$\overbrace{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}^{\text{netriviální}} = \overbrace{n^{1/2} \cdot \underbrace{(n^{-1/6} - 1)}_{n > 2^6 \Rightarrow \cdots < -1/2}}^{\text{triviální}} < \underbrace{-n^{1/2}}_{\cdots < -2|c|} /2 < -2|c|/2 = c\ .$$

Nemusíme nalézt optimální hodnotu indexu $n_0$ v závislosti na $\varepsilon$ či $c$, to se dá udělat jen v nejjednodušších případech typu $\lim \frac{1}{n}$, jinak to bývá problém. Stačí mít libovolnou hodnotu $n_0$, aby pro každé $n \geq n_0$ platila nerovnost (resp. náležení) v definici limity. I k tomu je ale dobré umět zacházet s nerovnostmi a odhady.

• *Podposloupnosti posloupností.* Podposloupnost vznikne z dané posloupnosti vypuštěním několika jejích členů tak, že stále zbude nekonečná posloupnost.

**Definice 5 (podposloupnost)** *Posloupnost $(b_n)$ je podposloupností posloupnosti $(a_n)$, existuje-li taková posloupnost přirozených čísel $m_1 < m_2 < \ldots$, že pro každé $n$ se*

$$b_n = a_{m_n} .$$

*Tento vztah označíme jako $(b_n) \preceq (a_n)$.*

Relace $\preceq$ na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je zřejmě reflexivní a tranzitivní.

• *Úloha.* Popište takové posloupnosti $(a_n) \neq (b_n)$, že $(a_n) \preceq (b_n)$ i $(b_n) \preceq (a_n)$.

**Tvrzení 6 ($\preceq$ zachovává limity)** *Nechť $(b_n) \preceq (a_n)$ a $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Pak i $\lim b_n = L$.*

**Důkaz.** Plyne hned z definic 2 a 5, protože posloupnost $(m_n)$ v poslední definici splňuje, že $m_n \geq n$ pro každé $n$. $\square$

Platí také následující užitečné tvrzení, ze kterého později dokážeme jen část 1.

**Tvrzení 7 (o podposloupnostech)** *$(a_n)$ buď libovolná reálná posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Platí následující.*

1. *$(a_n)$ má podposloupnost, která má limitu.*
2. *$(a_n)$ nemá limitu $\iff$ $(a_n)$ má dvě podposloupnosti s dvěma různými limitami.*
3. *Neplatí, že $\lim a_n = A$ $\iff$ $(a_n)$ má podposloupnost, jež má limitu různou od $A$.*

Abychom vyvrátili, že daná posloupnost má limitu, je tedy vždy možné předvést její dvě podposloupnosti s různými limitami. Např.

$$(a_n) := ((-1)^n) = (-1,\, 1,\, -1,\, 1,\, -1,\, \dots)$$

nemá limitu, protože $(1, 1, \dots) \preceq (a_n)$ i $(-1, -1, \dots) \preceq (a_n)$.

• *Úlohy.* Dokažte části 2 a 3 tvrzení 7.

• *Limita $n$-té odmocniny z $n$.* Výpočet limity je „triviální“, když při něm netřeba počítat limitu neurčitého výrazu. Jinak je „netriviální“. Třeba výpočty limit $\lim\,(2^n + 3^n)$ a $\lim \frac{4}{5n-3}$ jsou triviální, kdežto výpočty limit $\lim\,(2^n - 3^n)$ a $\lim \frac{4n+7}{5n-3}$ jsou netriviální. Netriviální limitu často spočteme tak, že ji algebraickou úpravou převedeme na limitu triviální, viz $\lim\left(\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}\right)$ výše. Následující limita z $n^{1/n}$ je netriviální, protože $n \to +\infty$, ale $1/n \to 0$ a $(+\infty)^0$ je také neurčitý výraz. Jak uvidíme, exponent převládne a $n^{1/n} \to 1$. Nejdřív ale připomeneme jednu spíše kombinatorickou větu.

• *Úloha.* Dokažte *Binomickou větu*, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a $n$

v $\mathbb{N}_0$ se

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}\ .$$

**Tvrzení 8 ($n^{1/n} \to 1$)** *Platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ .$$

**Důkaz.** Vždy $n^{1/n} \geq 1$. Kdyby $n^{1/n} \not\to 1$, existovalo by číslo $c > 0$ a posloupnost $2 \leq n_1 < n_2 < \dots$, že pro každé $i$ je $n_i^{1/n_i} > 1 + c$. Podle Binomické věty by pro každé $i$ bylo

$$\begin{aligned} n_i &> (1+c)^{n_i} \\ &= \sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} c^j = 1 + \binom{n_i}{1} c + \binom{n_i}{2} c^2 + \cdots + \binom{n_i}{n_i} c^{n_i} \\ &\geq \frac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2\ . \end{aligned}$$

Pro každé $i$ pak

$$n_i > \frac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 \rightsquigarrow 1 + \frac{2}{c^2} > n_i\ .$$

To je spor, posloupnost $n_1 < n_2 < \dots$ není shora omezená. $\square$

• *Robustně monotónní posloupnosti.* Uvedeme pět vět (10, 12, 15, 17 a 18) o existenci limit. Pro první z nich definujeme různé druhy monotonie posloupností. Posloupnost $(a_n)$ je *neklesající* (resp. *nerostoucí*), když pro každé $n$ je $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$). Je *klesající* (resp. *rostoucí*), když pro každé $n$ je $a_n > a_{n+1}$ (resp. $a_n < a_{n+1}$). Je *monotonní*, je-li neklesající nebo nerostoucí. Je *ryze monotonní*, je-li klesající nebo rostoucí.

**Definice 9 (robustní monotonie)** *Posloupnost $(a_n)$ je robustně neklesající, resp. robustně nerostoucí, když existuje $m$, že posloupnost $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ je neklesající, resp. nerostoucí. Posloupnost $(a_n)$ je robustně monotonní, je-li robustně neklesající nebo robustně nerostoucí.*

Robustní monotonie je robustní vlastnost. Posloupnost $(a_n)$ je *shora omezená*, pokud $\exists\, c\, \forall\, n\, \big(a_n \le c\big)$, jinak je $(a_n)$ *shora neomezená*. Otočením nerovnosti máme *omezenost zdola*, resp. *neomezenost zdola*. Posloupnost $(a_n)$ je *omezená*, je-li shora i zdola omezená.

- *Úloha.* Která z těchto pěti vlastností posloupností je robustní?

**Věta 10 (o robustně monotónní posloupnosti)**
*Každá robustně monotónní posloupnost $(a_n)$ má limitu. Je-li $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ neklesající a $M := \{a_n \mid n \ge m\}$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup(M) & \dots\ M \text{ je shora omezená a} \\ +\infty & \dots\ M \text{ je shora neomezená.} \end{cases}$$

*Je-li $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ nerostoucí a $M := \{a_n \mid n \ge m\}$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf(M) & \dots\ (a_n) \text{ je zdola omezená a} \\ -\infty & \dots\ M \text{ je zdola neomezená.} \end{cases}$$

**Důkaz.** Probereme pouze první případ posloupnosti neklesající od indexu $m$, druhý případ je velmi podobný. Když je $(a_n)$ shora neomezená, pak pro dané $c$ existuje $k$, že

$$a_k > \max(\{c,\, a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_m\})\ .$$

Tedy $a_k > c$ i $k > m$. Tudíž pro každé $n \geq k$ je

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_k > c \rightsquigarrow a_n > c$$

a $a_n \to +\infty$.

Pro shora omezenou $(a_n)$ položíme $s := \sup(\{a_n \mid n \geq m\})$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice suprema existuje $k \geq m$, že $s - \varepsilon < a_k \leq s$. Tedy pro každé $n \geq k$ je

$$s - \varepsilon < a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_n \leq s \rightsquigarrow s - \varepsilon < a_n \leq s$$

a $a_n \to s$. □

• *Robustně kvazimonotónní posloupnosti.* Podmínku pro robustně neklesající posloupnost, že $a_m \leq a_{m+1} \leq \ldots$, zmírníme tak, že požadujeme pro každé $k$ s $k \geq m$, aby $a_n < a_k$ nastalo jen pro konečně mnoho $n$.

**Definice 11 (robustní kvazimonotonie)** *Posloupnost $(a_n)$ je robustně kvazineklesající, resp. robustně kvazinerostoucí, když existuje $m$, že pro každé $k$ s $k \geq m$ je množina $\{n \mid a_n < a_k\}$, resp. množina $\{n \mid a_n > a_k\}$, konečná. Posloupnost $(a_n)$ je robustně kvazimonotónní, je-li robustně kvazineklesající nebo robustně kvazinerostoucí.*

• *Úlohy.* Popište posloupnost, která není robustně monotónní, ale je robustně kvazimonotónní. Zapište robustní kvazimonotonii pomocí kvantifikátorů.

Následující věta používá veličiny $\limsup$ a $\liminf$ posloupnosti. Ty jsou vždy definované, mohou nabývat hodnoty $\pm\infty$ a zavedeme je v příští přednášce.

**Věta 12 (o robustně kvazimonotónní posloupnosti)** *Každá robustně kvazimonotónní posloupnost $(a_n)$ má limitu. Je-li $(a_n)$ robustně kvazineklesající, resp. robustně kvazinerostoucí, pak*

$$\lim\, a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}^*, \ \ \textit{resp.}\ \lim\, a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}^*\ .$$

*Kvazimonotónní posloupnosti*, v nichž $m = 1$, zavedl anglický matematik *Godfrey H. Hardy (1877–1947)*.

• *Bolzano–Weierstrassova věta.* Pro její důkaz potřebujeme pomocný výsledek, který je zajímavý sám o sobě.

**Tvrzení 13 ($\exists$ monotónní podposloupnost)** *Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.*

**Důkaz.** Pro danou posloupnost $(a_n)$ uvážíme množinu

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, m \left(n \le m \Rightarrow a_n \ge a_m\right)\}\ .$$

Když je $M$ nekonečná, $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$, máme nerostoucí podposloupnost $(a_{m_n})$. Když je $M$ konečná, vezmeme číslo $m_1 > \max(M)$ (pro $M = \emptyset$ je $m_1$ libovolné). Pak jistě $m_1 \notin M$ a tedy existuje číslo $m_2 > m_1$, že $a_{m_1} < a_{m_2}$. Protože $m_2 \notin M$, existuje $m_3 > m_2$, že $a_{m_2} < a_{m_3}$, a tak dál. Dostaneme rostoucí podposloupnost $(a_{m_n})$. $\square$

Z věty 10 a z předešlého tvrzení hned dostáváme dva následující výsledky. První z nich je část 1 tvrzení 7.

**Důsledek 14 ($\exists$ podposloupnost s limitou)** *Každá reálná posloupnost má podposloupnost, která má limitu.*

**Věta 15 (Bolzano–Weierstrassova)** *Omezená posloupnost reálných čísel má vždy konvergentní podposloupnost.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ je omezená posloupnost a $(b_n) \preceq (a_n)$ je její monotónní podposloupnost zaručená předešlým tvrzením. Patrně je $(b_n)$ omezená a podle věty 10 má vlastní limitu. $\square$

*Karl Weierstrass (1815–1897)* byl německý matematik. Je uznáván jako „otec" moderní matematické analýzy. *Bernard Bolzano (1781–1848)* byl kněz, filosof a matematik s italskými, německými a českými kořeny. V Praze je po něm nazvána ulice u Hlavního nádraží, v Celetné ulici ho připomíná pamětní deska a na Olšanských hřbitovech leží jeho hrob.

- *Úloha.* Udělejte si procházku po Praze po těchto místech.
- *Cauchyova podmínka.* S Cauchyovými posloupnostmi zlomků jsme se už setkali v definici reálných čísel.

**Definice 16 (cauchyovskost)** *Posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *je Cauchyova (též cauchyovská), pokud*

$$\forall \varepsilon \, \exists n_0 \left( m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \right) ,$$

*tj.* $\cdots \Rightarrow a_m \in U(a_n, \varepsilon)$.

Cauchyovost posloupnosti reálných čísel je robustní vlastnost.

- *Úloha.* Dokažte, že každá Cauchyova posloupnost reálných čísel je omezená.

**Věta 17 (Cauchyova podmínka)** *Posloupnost reálných čísel* $(a_n)$ *je konvergentní, právě když* $(a_n)$ *je Cauchyova.*

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim a_n = a$ a je dáno $\varepsilon$. Pak existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2$. Tedy

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

a $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost. (Použili jsme vyjádření $a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$ a $\Delta$-ovou nerovnost $|c + d| \leq |c| + |d|$.)

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost. Jak víme z úlohy, $(a_n)$ je omezená. Proto má podle Bolzano–Weierstrassovy věty konvergentní podposloupnost $(a_{m_n})$ s limitou $a$. Pro dané $\varepsilon$ tak máme $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2$ a že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Vždy $m_n \geq n$, takže

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Tedy $a_n \to a$. $\square$

Pro zajímavost, francouzský matematik *Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)* pobýval v letech 1833–38 v Praze v politickém exilu.

• *Úlohy.* Ukažte, že v lineárním uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ předešlá věta neplatí. Kde jsme v posledním důkazu použili úplnost $\mathbb{R}$?

• *Feketeho lemma.* Věta níže je pojmenována podle maďarsko-izraelského matematika *Michaela Feketeho (1886–1957)*, který byl v letech 1946–48 rektorem Hebrejské Univerzity v Jeruzalémě.

• *Úloha.* fekete $=$?

První podmínce na posloupnost $(a_n)$ ve větě se říká *superaditivita* a druhé *subaditivita.*

**Věta 18 (Feketeho lemma)** *$(a_n) \subset \mathbb{R}$ buď posloupnost a $M := \{a_n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\forall\, m\, \forall\, n\, \big(a_{m+n} \geq a_m + a_n\big) \Rightarrow$*

$$\lim a_n/n = \begin{cases} \sup(M) & \dots \ \ M \text{ je shora omezená a} \\ +\infty & \dots \ \ M \text{ je shora neomezená.} \end{cases}$$

$\forall\, m\, \forall\, n\, \big(a_{m+n} \leq a_m + a_n\big) \Rightarrow$

$$\lim a_n/n = \begin{cases} \inf(M) & \dots \ \ M \text{ je zdola omezená a} \\ -\infty & \dots \ \ M \text{ je zdola neomezená}\,. \end{cases}$$

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ je superaditivní. Pro shora omezenou $M$ buď $c \in \mathbb{R}$ libovolné číslo menší než $\sup(M)$ a pro shora neomezenou $M$ buď $c \in \mathbb{R}$ libovolné. Podle definice suprema, popř. neomezenosti shora, vezmeme takové $m$, že $a_m/m > c$. Nechť $n \geq m$ je libovolné. Napíšeme ho jako $n = km + l$, kde $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq l < m$. Díky superaditivitě je

$$\frac{a_n}{n} \geq \frac{ka_m}{km + l} + \frac{a_l}{n} = \frac{a_m/m}{1 + l/km} + \frac{a_l}{n}\,.$$

Pro $n \to \infty$ i $k \to \infty$, tedy $1 + l/km \to 1$ a $a_l/n \to 0$. Proto existuje $n_0$, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n/n > c$. Odtud plyne, že $a_n/n \to \sup(M)$, popř. $a_n/n \to +\infty$. Pro subaditivní posloupnosti je argument téměř stejný, jen se otočí nerovnosti. □

• *Kombinatorické úlohy o abba-prostých slovech.* Nechť $f(n)$ je maximální délka $l$ slova $u = a_1 a_2 \dots a_l$ nad $n$-prvkovou abecedou splňujícího následující podmínky.

1. Pro každé $i = 1, 2, \dots, l - 1$ se $a_i \neq a_{i+1}$.

2. Slovo $u$ neobsahuje podslovo typu $abba$. Tedy neexistují čtyři indexy $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq l$, že $a_{k_1} = a_{k_4} \neq a_{k_2} = a_{k_3}$.

a) Pomocí Feketeho lemmatu dokažte, že existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim f(n)/n$.

b) Dokažte, že $f(n) = 3n - 2$.

DĚKUJI ZA POZORNOST