Martin Klazar

MA 1, (POSLEDNÍ) PŘEDNÁŠKA 14, 18. 5. 2023

APLIKACE INTEGRÁLŮ

• *Délka grafu funkce.* $|uv|$ (≥ 0) označuje délku úsečky (v rovině) s koncovými body $u, v \in \mathbb{R}^2$. Pro $u = (u_x, u_y)$ a $v = (v_x, v_y)$ je $|uv| = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}$. Pro funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, a dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ definujeme součet

$$L(\overline{a},\ f) := \sum_{i=1}^{k} \left|\big(a_{i-1}, f(a_{i-1})\big)\,\big(a_i, f(a_i)\big)\right| \ .$$

Je to délka lomené čáry vepsané do $G_f = \{(x, f(x)) \mid a \le x \le b\}$ a spojující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

Tvrzení 1 (o vepsaných čarách) *Když f je jako výše a $\overline{a} \subset \overline{b}$ jsou dělení intervalu $[a, b]$, pak $L(\overline{a}, f) \le L(\overline{b}, f)$.*

• *Úloha.* Dokažte to.

Definice 2 ($\ell(G_f)$) *Délka grafu funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je*

$$\ell(G_f) := \sup\big(\{L(\overline{a},\ f) \mid \overline{a} \text{ je dělení intervalu } [a,\ b]\}\big) \ .$$

• *Úloha.* Spojitá a omezená funkce $f(x) := x\sin(1/x)\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(0) := 0$, má $\ell(G_f) = +\infty$. Návod: harmonická řada.

• *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 3 (vlastnosti délky) *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. (1) Je-li G_f úsečka uv pak $\ell(G_f) = |uv|$. (2) Když $a < c < b$, $g := f \mid (a,c)$ & $h := f \mid (c,b)$, pak $\ell(G_g) + \ell(G_h) = \ell(G_f)$. (3) Posun ani otočení G_f nemění $\ell(G_f)$. (4) Zvětšení G_f poměrem $c > 0$ zvětší $\ell(G_f)$ také poměrem c.*

Platí následující vzorec.

Věta 4 (vzorec pro $\ell(G_f)$) *Funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f' \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak*

$$\ell(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \in (0,\, +\infty)\ .$$

Důkaz. Nechť $g := \sqrt{1 + (f')^2}$. Víme, že $g \in \mathrm{R}(a,b)$ (úloha níže). Pro dané ε vezmeme δ, že pro každé dělení s body $(\overline{b}, \overline{t})$ intervalu $[a,b]$ s $\|\overline{b}\| < \delta$ je $\underline{|\int_a^b g - R(\overline{b}, \overline{t}, g)| < \varepsilon}$. Nechť $\overline{b}$ je dělení intervalu $[a,b]$, že $\underline{\ell(G_f) - \varepsilon < L(\overline{b}, f) \le \ell(G_f)}$. Pomocí tvrzení 1 můžeme vždy $\overline{b} = (b_0, \ldots, b_k)$ zjemnit tak, že $\|\overline{b}\| < \delta$. Ale

$$L(\overline{b},\, f) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - b_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\tfrac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}}\right)^2}\ .$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě se

$$\frac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = f'(t_i)$$

pro nějaké body $t_i \in (b_{i-1}, b_i)$, $i \in [k]$. Označíme je jako $\overline{t}$. Tedy $L(\overline{b}, f) = R(\overline{b}, \overline{t}, g)$ a ze dvou podtržených systémů nerovností plyne, že

$$\left| \int_a^b g - \ell(G_f) \right| < 2\varepsilon\ .$$

Tedy $\int_a^b g = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2} = \ell(G_f)$. $\Box$

- *Úloha.* Dokažte implikaci, že $f \in \mathrm{R}(a,b) \Rightarrow \sqrt{1+f^2} \in \mathrm{R}(a,b)$.
- *Úloha.* Zobecněte definici 2 a větu 4 pro $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
- *Úloha.* Proč se věta 4 *nedá* přímo použít pro výpočet délky půlkružnice G_f pro

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}\colon [-1,\, 1] \to \mathbb{R}\,?$$

Příklad. Spočítáme tedy alespoň délku čtvrtkružnice G_f pro

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}\colon I := [-1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2}] \to \mathbb{R}\;.$$

Pak $g := \sqrt{1+(f')^2}\colon I \to \mathbb{R}$ je $g(x) = \sqrt{1+x^2/(1-x^2)} = 1/\sqrt{1-x^2}$ a, podle ZVA 2,

$$\ell(G_f) = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} g(x) = \big[\arcsin x\big]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \big(-\frac{\pi}{4}\big) = \frac{\pi}{2}\;.$$

- *Plocha útvaru mezi grafy dvou funkcí.* Pro $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tento útvar definujeme jako

$$G_{f,\,g} := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \wedge f(x) \le y \le g(x)\}\;.$$

Připomínáme, že pro dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ je $I_i := [a_{i-1}, a_i]$ a $|I_i| := a_i - a_{i-1}$. Pro $f \le g$ a dané $\overline{a}$ definujeme součet

$$M(f,\, g,\, \overline{a}) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \big(\sup(g[I_i]) - \inf(f[I_i])\big) \in \mathbb{R}^* \;(\ge 0)\;.$$

Je to plocha sloupcového grafu vztyčeného na $\overline{a}$ s nejnižšími sloupci, které ještě pokrývají $G_{f,g}$.

• *Úloha.* Dokažte analogii tvrzení 1, že součty $M(\dots)$ po zjemnění dělení nevzrostou.

Definice 5 (plocha útvaru $G_{f,g}$) *Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \le g$. Plochu útvaru $G_{f,g}$ definujeme jako*

$$A(G_{f,\,g}) := \inf\big(\{M(f,\,g,\,\overline{a}) \mid \overline{a} \text{ je dělení intervalu } [a,b]\}\big)\ .$$

• *Úloha.* Jsou-li f a g omezené, je $A(G_{f,g}) \in [0, +\infty)$, tj. plocha není $+\infty$.

• *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 6 (vlastnosti plochy) *Nechť $f \le g$ jsou jako výše.* (1) *Je-li $G_{f,g}$ obdélník o rozměrech $s \times v$ pak $A(G_{f,g}) = s \cdot v$.* (2) *Když $a < c < b$, $f_1 := f \mid (a,c)$, $f_2 := f \mid (c,b)$ a podobně pro g_i, je $A(G_{f_1,g_1}) + A(G_{f_2,g_2}) = A(G_{f,g})$.* (3) *Posun ani otočení $G_{f,g}$ nemění $A(G_{f,g})$.* (4) *Zvětšení $G_{f,g}$ poměrem $c > 0$ zvětší $A(G_{f,g})$ poměrem c^2.*

Platí následující vzorec.

Věta 7 (vzorec pro $A(G_{f,g})$) *$f, g \in \mathrm{R}(a,b)$, $f \le g$ na $[a,b]$. Pak platí rovnost*

$$A(G_{f,g}) = \int_a^b (g - f)\ .$$

Důkaz. Nechť f a g jsou, jak uvedeno, $\overline{a} = (a_0, \dots, a_k)$ je dělení intervalu $[a,b]$ a je dáno ε. Díky integrovatelnosti f a g můžeme předpokládat, že $|\int_a^b (-f) - S(-f, \overline{a})| < \varepsilon$ a $|\int_a^b g - S(g, \overline{a})| < \varepsilon$, ale že i $|A(G_{f,g}) - M(f, g, \overline{a})| < \varepsilon$ (viz úloha). Protože ale ($I_i =$

$[a_{i-1}, a_i])$

$$\inf(f[I_i]) = -\sup((-f)[I_i]) \ ,$$

vidíme, že

$$M(f,\, g,\, \overline{a}) = S(g,\, \overline{a}) - (-S(-f,\, \overline{a})) = S(g,\, \overline{a}) + S(-f,\, \overline{a})$$

se liší od

$$\int_a^b g + \int_a^b (-f) = \int_a^b (g - f)$$

o méně než 2ε. Tedy $|A(G_{f,g}) - \int_a^b (g-f)| < 3\varepsilon$ a platí uvedená rovnost. $\square$

• *Úloha.* Doplňte podrobnosti v důkazu. Návod: horní součty ani součty $M(\dots)$ zjemněním dělení nevzrostou.

Příklad. Spočítáme plochu jednotkového kruhu. Vezmeme funkce

$$f(x) := -\sqrt{1-x^2},\ g(x) := \sqrt{1-x^2}\colon [-1,\, 1] \to \mathbb{R}$$

a pro jednotkový kruh $G_{f,g}$ dostaneme plochu

$$A(G_{f,\, g}) = \int_{-1}^{1} (g - f) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x \ .$$

Pro $x := \sin t\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, kde $\mathrm{d}x = \cos(t)\, \mathrm{d}t$, poslední integrál přejde druhým substitučním pravidlem v integrál

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2} \ ,$$

který se podle ZVA 2 rovná

$$(1/2)\big[\sin(2t)/2\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} + (1/2)\big[t\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 - 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \ .$$

Tedy $A(G_{f,g}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

Příklad. Zobecníme to a spočítáme plochu uvnitř elipsy s x-ovou poloosou $a > 0$ a y-ovou poloosou $b > 0$. Je dána rovnicí

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\ .$$

Vezmeme tedy funkce

$$f(x) := -b\sqrt{1-(x/a)^2},\ f(x) := b\sqrt{1-(x/a)^2} \colon [-a,\, a] \to \mathbb{R}$$

a spočítáme, že $A(G_{f,g})$ se rovná

$$\int_{-a}^{a}(g-f) = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-(x/a)^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Substituce $x := at$, $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$, převádí poslední integrál v integrál, který jsme už spočítali:

$$a\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi a}{2}\ .$$

Takže $A(G_{f,g}) = 2b \cdot \frac{\pi a}{2} = \pi ab$.

• *Objem rotačního tělesa.* Pro $a < b$ a funkci $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ definujeme *rotační těleso*

$$T_f := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b \wedge y^2 + z^2 \le f(x)^2\}\ .$$

Vznikne rotací útvaru $G_{\le f} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ kolem osy x. Pro dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ definujeme součet (opět $I_i := [a_{i-1}, a_i]$ a $|I_i| := a_i - a_{i-1}$)

$$K(\overline{a},\, f) := \pi\sum_{i=1}^{k}|I_i| \cdot \sup(f[I_i])^2\ .$$

Je to objem vzpěračských kotoučů nasazených na ose x, s průřezy danými dělením $\overline{a}$ a s nejmenšími poloměry, které ještě pokrývají útvar T_f.

- *Úloha.* Dokažte analogii tvrzení 1, že součty $K(\dots)$ po zjemnění dělení nevzrostou.

Definice 8 (objem útvaru T_f) $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$. *Objem útvaru T_f definujeme jako*

$$V(T_f) := \inf\big(\{K(f,\overline{a}) \mid \overline{a} \text{ je dělení intervalu } [a,b]\}\big)\ .$$

- *Úloha.* Je-li f omezená, je $V(T_f) \in [0,+\infty)$, tj. objem není $+\infty$.
- *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 9 (vlastnosti objemu) *Nechť f je jako výše.* (1) *Je-li $G_{\le f}$ obdélník o rozměrech $s \times v$ pak $V(T_f) = \pi s v^2$.* (2) *Když $a < c < b$, $f_1 := f \mid (a,c)$ a $f_2 := f \mid (c,b)$, je $V(T_{f_1}) + V(T_{f_2}) = V(T_f)$.* (3) *Posun $G_{\le f}$ nemění $V(T_f)$.* (4) *Zvětšení $G_{\le f}$ poměrem $c > 0$ zvětší $V(T_f)$ poměrem c^3.*

Platí následující vzorec.

Věta 10 (vzorec pro $V(T_f)$) $f \in \mathrm{R}(a,b)$ *je nezáporná funkce. Pak*

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2\ .$$

Důkaz. Nechť f je, jak uvedeno, a je dáno ε. Díky úloze výše vezmeme dělení $\overline{a}$, že $|K(\overline{a},f) - V(T_f)| < \varepsilon$ a $|S(\overline{a},f^2) - \int_a^b f^2| < \varepsilon$. Protože zřejmě $\pi S(\overline{a},f^2) = K(\overline{a},f)$, je $|\pi \int_a^b f^2 - V(T_f)| < 2\varepsilon$.

Tedy platí uvedená rovnost. $\square$

Příklad. Zbývá nám už jen spočítat objem jednotkové koule. Je to $V(T_f)$ pro

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\colon [-1,\, 1] \to [0,\, +\infty)\ .$$

Pak

$$V(T_f) = \pi \int_{-1}^{1} f^2 = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\ .$$

Poslední integrál se podle ZVA 2 rovná

$$\big[x - x^3/3\big]_{-1}^{1} = 1 - (-1) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

a objem jednotkové koule je $\frac{4}{3}\pi$.

• *Odhad monotónního součtu pomocí integrálu.* Následující jednoduchý obecný odhad se často hodí.

Věta 11 ($\sum f(n)$ pro monotónní f) *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{Z}$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je monotónní. Pak $\exists\, \theta \in [0, 1]$, že*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = (\mathrm{R}) \int_a^b f + \theta \cdot (f(b) - f(a))\ .$$

Důkaz. Podle věty 16 v př. 12 je $f \in \mathrm{R}(a, b)$. Nechť f je neklesající, pro nerostoucí f argumentujeme podobně. Pro $m = a, a + 1, \dots, b-1$ díky monotonii $(\mathrm{R}) \int$ (úloha níže) je $f(m) \le \int_m^{m+1} f \le f(m+1)$, to jest platí nerovnosti

$$\int_m^{m+1} f \le f(m+1) \le \int_m^{m+1} f + f(m+1) - f(m)\ .$$

Jejich sečtení $\sum_{m=a}^{b-1}$ dává díky aditivitě (R) $\int$ uvedený odhad. $\square$

- *Úloha.* Dokažte, že když $f, g \in \mathrm{R}(a, b)$ a $f \leq g$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Důsledek 12 (harmonická čísla 1) *Pro $n \in \mathbb{N}$ platí, že*

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \delta(n), \quad 1/n \leq \delta(n) \leq 1 \ .$$

Důkaz. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak podle věty 11 existuje $\theta \in [0, 1]$, že

$$H_n = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \int_1^n 1/x + \theta(1/n - 1).$$

Podle ZVA 2 se to rovná $[\log x]_1^n + \delta = \log n + \delta$ s $\delta \in [\frac{1}{n}, 1]$. $\square$

- *Úloha.* Pro $m < n$ v $\mathbb{N}$ odhadněte sumu $\sum_{i=m}^{n} 1/\sqrt{i}$.

Důsledek 13 (slabý Stirling) *Pro $n \in \mathbb{N}$ platí, že*

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log i = n \log n - n + \delta(n), \quad 1 \leq \delta(n) \leq 1 + \log n \ .$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ opět podle věty 11 existuje $\theta \in [0, 1]$, že

$$\sum_{i=1}^{n} \log i = \sum_{i=2}^{n} \log i = \int_1^n \log x + \theta(\log n - \log 1).$$

Podle ZVA 2 se to rovná $[x \log x - x]_1^n + \theta \log n = n \log n - n + \delta$ s $\delta \in [1, 1 + \log n]$. $\square$

- *Integrální kritérium konvergence řad.* Opět důsledek věty 11.

Důsledek 14 (integrální kritérium) *Nechť m je v $\mathbb{Z}$ a $f\colon [m,+\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí. Pak*

$$\text{řada } \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ konverguje } \iff \lim_{n\to\infty} \int_m^n f < +\infty \ .$$

Důkaz. Riemannovy integrály výše existují díky monotonii f. Podle věty 11 pro každé celé číslo $N \geq m+2$ máme identitu ($\theta \in [0,1]$)

$$\sum_{n=m}^{N} f(n) = f(m) + \int_m^N f + \underbrace{\theta(f(N) - f(m))}_{-f(m)\leq \ldots \leq 0} \ .$$

Pro $N \to \infty$ odtud vyplývá uvedená ekvivalence (viz úloha). $\square$

- *Úloha.* Jak přesně?

Příklad. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n)$ diverguje, tj. má součet $+\infty$, protože

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{\mathrm{d}y}{y \log y} = \lim_{n\to\infty} \big[\log(\log y)\big]_2^n = \lim_{n\to\infty} \log\log n = +\infty \ .$$

- *Úloha.* Dokažte, že pro každé reálné $c > 1$ řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^c}$ konverguje.

- *Úloha.* Ukažte, že kritérium zůstává v platnosti, i pro f nerostoucí jen na $[m', +\infty]$, $m' > m$.

- *Jeden vzorec typu $\sum = \int$.* Připomínáme, že $\lfloor a \rfloor$ je dolní celá část čísla $a \in \mathbb{R}$, to jest největší $m \in \mathbb{Z}$ s $m \leq a$, a že $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0,1)$ je zlomková část čísla a.

Věta 15 ($\sum f(n)$ pro f s f') *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{Z}$ & $f, f' \in \mathrm{R}(a,b)$ & f je spojitá v b. Pak platí identita*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f + \int_a^b \{x\} f'(x) =: \int_a^b f + T\ .$$

Důkaz. Identitu stačí dokázat pro $b = a+1$, což nazveme elementární identitou. Identitu s obecnými mezemi $a < b$ pak totiž dostaneme jako součet elementárních identit s mezemi a a $a+1$, $a+1$ a $a+2$, $\dots$, $b-1$ a b. Dokažme tedy elementární identitu. Podle integrace per partes (věta 13 v př. př.) pro $b = a+1$ je

$$T = \int_a^{a+1} (x-a) f'(x) = \big[(x-a)f(x)\big]_a^{a+1} - \int_a^{a+1} f\ ,$$

takže opravdu $\sum_{a<n\le a+1} f(n) = \big[(x-a)f(x)\big]_a^{a+1} = f(a+1)$. $\Box$

• *Úloha.* Kde se potřebuje spojitost funkce f v bodě b? Platí věta bez tohoto předpokladu?

• *Úloha.* Ale když pro integrál T ve větě 15 použijeme formuli per partes přímo, dostaneme

$$T = \big[\{x\}f(x)\big]_a^b - \int_a^b \big(\{x\}\big)' f(x) = 0 - 0 - \int_a^b f(x)\ .$$

Takže pravá strana identity ve větě 15 je 0?? Jak je to?

Pomocí této identity zesílíme důsledek 12 pro harmonická čísla a odvodíme tak odhad, který jsme zmínili ve větě 4 v př. 4.

Důsledek 16 (harmonická čísla 2) *Existuje* $\gamma \in \mathbb{R}$, *že*

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \gamma + O(1/n) \quad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Důkaz. Podle věty 15 se pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$H_n = 1 + \int_1^n 1/x - \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2} = \log n + 1 - \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}}{x^2}}_{I_n}\ .$$

Ukážeme, že pro nějakou konstantu $c > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je $I_n = c + O(1/n)$. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ s $m \le n$ položíme

$$I_{m,\,n} := \int_m^n \frac{\{x\}}{x^2}\ .$$

Existuje vlastní limita $c := \lim I_n$, protože (I_n) je cauchyovská posloupnost: pro $m \le n$ je

$$|I_n - I_m| = |I_{m,\,n}| \le \int_m^n x^{-2} = m^{-1} - n^{-1} < m^{-1}\ .$$

Podobně pro každé m existuje vlastní limita

$$c_m := \lim_{n\to\infty} I_{m,n}$$

a $0 \le c_m \le m^{-1}$. Z $I_m = I_n - I_{m,n}$ pak limitním přechodem $n \to \infty$ máme, že

$$I_m = \lim_{n\to\infty} I_n - \lim_{n\to\infty} I_{m,\,n} = c - c_m = c + O(1/m).$$

Můžeme tak položit $\gamma := 1 - c$. $\square$

Jak jsme uvedli už v př. 4, $\gamma = 0.57722\ldots$ a není známo, zda to je iracionální číslo.

DĚKUJI ZA POZORNOST!