Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 13, 11. 5. 2023

RIEMANNŮV INTEGRÁL A JEHO UPGRADE HENSTOCK–KURZWEILŮV INTEGRÁL

• *Základní věta analýzy 1.* Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je *lipschitzovsky spojitá*, existuje-li $c > 0$, že

$$\forall\, x,\, y \in M\, \big(|f(x) - f(y)| \le c|x - y|\big)\ .$$

• *Úloha.* Lipschitzovsky spojitá funkce je stejnoměrně spojitá.

> **Věta 1 (ZVA 1)** *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a je v $\mathrm{R}(a,b)$. Pak pro $\forall\, x \in (a,b]$ je $f \in \mathrm{R}(a,x)$ a*
>
> $$F\colon [a,\, b] \to \mathbb{R},\ kde\ F(x) := \int_a^x f,\ je\ lipschitzovsky\ spojitá\,.$$
>
> *Dále: f je spojitá v $x \in [a,b] \Rightarrow F'(x) = f(x)$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathrm{R}(a,b)$. Podle tvrzení 5 v předešlé př. je $f \in \mathrm{R}(a',b')$ pro každé $a \le a' < b' \le b$. Tedy F je dobře definovaná a $F(a) = 0$. Protože f je omezená (tvrzení 8 předešlé př.), vezmeme omezující konstantu $d > 0$. Nechť $c := 1 + d$. Nechť $x < y$ jsou v $[a,b]$ a podle definice 1 předešlé př. nechť $(\overline{a},\overline{t})$ je takové dělení s body intervalu $[x,y]$, že $|\int_x^y f - R(\overline{a},\overline{t},f)| < y - x$. Podle tvrzení 5 v př. př. a definice funkce F se $|F(y) - F(x)|$ rovná

$$\big|\textstyle\int_x^y f\big| \le y - x + |R(\overline{a},\,\overline{t},\,f)| \le y - x + c(y - x)\ ,$$

a tak $|F(y) - F(x)| \le c|y - x|$. F je lipschitzovsky spojitá.

Nechť f je v $x_0 \in [a,b]$ spojitá a je dáno ε. Vezmeme číslo δ, že $x \in U(x_0,\delta) \cap [a,b] \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0),\varepsilon)$. Nechť $x \in$

$P(x_0, \delta) \cap [a, b]$ je libovolné, řekněme $x > x_0$ (pro $x < x_0$ je argument podobný). Vezmeme dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[x_0, x]$, že $|\int_{x_0}^x f - R(\overline{a}, \overline{t}, f)| < \varepsilon(x - x_0)$. Pak

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f - f(x_0)$$

je menší než

$$\begin{aligned} &\frac{R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) + \varepsilon(x - x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \\ &\overset{(1)}{<} \frac{(x - x_0)(f(x_0) + \varepsilon + \varepsilon)}{x - x_0} - f(x_0) = 2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Podobně se dokáže, že je i $> -2\varepsilon$. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$. □

• *Úloha.* Proč platí nerovnost (1)?

Jako bezprostřední důsledek ZVA 1 získáme další (a jednodušší) důkaz poslední věty 14 z př. 9, že každá spojitá funkce má primitivní funkci.

Důsledek 2 (ex. prim. funkce) *Nechť $a < b$. Každá spojitá funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci.*

Důkaz. Jestliže $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, pak $f \in \mathrm{R}(a, b)$ podle věty 15 př. př. Podle předchozí věty je $\int_a^x f$ na $[a, b]$ primitivní k $f(x)$. □

• *Srovnání* (R) $\int$ a (N) $\int$. Snadno najdeme funkci $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ integrovatelnou riemannovsky, ale ne newtonovsky, a naopak. Třeba

$$\begin{aligned} &(\mathrm{R}) \int_{-1}^1 \mathrm{sgn} = (\mathrm{R,\ N}) \int_{-1}^0 \mathrm{sgn} + (\mathrm{R,\ N}) \int_0^1 \mathrm{sgn} \\ &= [-x]_{-1}^0 + [x]_0^1 = -1 + 1 = 0\ , \end{aligned}$$

ale (N) $\int_{-1}^{1}$ sgn není definován, protože $\operatorname{sgn}(x)$ nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci (není tam Darbouxova).

Tuto potíž lze odstranit pomocí obecnějších primitivních funkcí. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval. Řekneme, že $F\colon I \to \mathbb{R}$ je *zobecněná antiderivace* funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$, pokud F je spojitá a $F'(x) = f(x)$ platí pro každé $x \in I$ s konečně mnoha výjimkami. *Rozšířený (nevlastní) Newtonův integrál* funkce $f\colon (A,B) \to \mathbb{R}$ pak definujeme jako

$$(\mathrm{N_e})\int_A^B f := [F]_A^B$$

pro libovolnou zobecněnou antiderivaci $F\colon (A,B) \to \mathbb{R}$ funkce f. Nyní se už správně

$$(\mathrm{N_e})\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x) = [\,|x|\,]_{-1}^{1} = 1 - 1 = 0\ .$$

Naopak

$$(\mathrm{N})\int_0^1 1/\sqrt{x} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2, \quad \text{ale} \quad (\mathrm{R})\int_0^1 1/\sqrt{x}$$

neexistuje, protože integrand $\frac{1}{\sqrt{x}}$ není na intervalu $(0,1)$ omezený (tvrzení 8 př. př.). Za chvíli uvidíme, jak vylepšit Riemannův integrál (R) $\int$ na lepší integrál (HK) $\int$, že se už správně

$$(\mathrm{HK})\int_0^1 1/\sqrt{x} = 2\ .$$

• *Úloha.* Proč se nemůže stát, že by oba integrály vyšly odlišně jako (R) $\int_a^b f \neq$ (N) $\int_a^b f$?

• *Čtvrtá definice* (R) $\int$ *je asi nejjednodušší.* Podává ji tato věta. Připomeňte si, co pro funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a,b]$ je Riemannův součet $R(\overline{a}, \overline{t}, f)$.

Věta 3 (4. def. (R) $\int$**)** *$a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak platí, že*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, b) \iff \exists\, c\, \forall\, \varepsilon\, \exists\, \overline{a}\, \underbrace{\forall\, \overline{t}\, \big(|c - R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| < \varepsilon\big)}_{V}\,.$$

Platí-li obě strany ekvivalence, pak (R) $\int_a^b f = c$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ plyne z definice 1 (R) $\int$ v př. př., když položíme $c := \int_a^b f$.

Dokážeme implikaci $\Leftarrow$. Podle jejího předpokladu vezmeme c a pro dané ε vezmeme dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ s vlastností V. Ukážeme, že pak pro $\forall$ dělení $\overline{b}$ intervalu $[a,b]$ s malou normou $\|\overline{b}\|$ se pro $\forall\, \overline{u}$ i $R(\overline{b}, \overline{u}, f)$ málo liší od c. Odtud plyne, že $f \in \mathrm{R}(a,b)$ a $c = \int_a^b f$.

Nechť $(\overline{b}, \overline{u})$ s $\overline{b} = (b_0, \ldots, b_l)$ je dělení s body intervalu $[a,b]$. Búno $\|\overline{b}\| < \frac{1}{3}\min_{1 \le i \le k}(a_i - a_{i-1})$. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ položíme $t_i := u_j$ pro některé j minimalizující funkční hodnotu v množině

$$M(i,\, \overline{b},\, \overline{u}) := \{f(u_j) \mid j \in [l] \wedge [b_{j-1},\, b_j] \subset [a_{i-1},\, a_i]\}$$

(pro každé i je $M(i, \overline{b}, \overline{u}) \ne \emptyset$, viz úloha níže). Nechť $X \subset \mathbb{N}$ je množina těch j, že (b_{j-1}, b_j) obsahuje (nutně jediný) bod z $\overline{a}$. Podle úlohy níže je f omezená a položíme $d := \sup_{a \le x \le b} |f(x)| \ge 0$. Pak

$$R(\overline{b},\, \overline{u},\, f) - \sum_{j \in X}(b_j - b_{j-1})f(u_j) + 2\sum_{j \in X}(b_j - b_{j-1})d \ge R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)\,,$$

což podle vlastnosti V je větší než $c-\varepsilon$. Všechny intervaly $[a_{i-1}, a_i]$ jsou totiž současně pokryty intervaly $[b_{j-1}, b_j]$ tak, že každý $[b_{j-1}, b_j]$ je použit jednou, kromě intervalů s $j \in X$ (kde jsme $f(u_j)$ nahradili hodnotou d), které jsou použity dvakrát. Tedy, protože $|X| \le k$,

$$R(\overline{b},\ \overline{u},\ f) \overset{(1)}{>} c - \varepsilon - 3k \cdot \|\overline{b}\| \cdot d\ .$$

Volbou maximalizujících u_j v množinách $M(i, \overline{b}, \overline{u})$ a odečtením dvojnásobku hořejší sumy podobně vidíme, že také $R(\overline{b}, \overline{u}, f) < c + \varepsilon + 3k \cdot \|\overline{b}\| \cdot d$. Tedy

$$|R(\overline{b},\ \overline{u},\ f) - c| < \varepsilon + 3k \cdot \|\overline{b}\| \cdot d < 2\varepsilon\ ,$$

když navíc $\|\overline{b}\| < \varepsilon/3kd$. Jsme hotovi. $\square$

• *Úloha.* Proč je každá množina $M(i, \overline{b}, \overline{u})$ neprázdná?

• *Úloha.* Ukažte, že funkce splňující pravou stranu ekvivalence je omezená. Návod: viz důkaz tvrzení 8 v př. př.

• *Úloha.* Proč platí nerovnost (1)?

• *Definice* (R) $\int$ *podle J.-G. Darbouxe.* Uvedeme další, už asi pátou, ekvivalentní definici (R) $\int_a^b$. Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce, $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$ je dělení intervalu $[a, b]$, $I_i := [a_{i-1}, a_i]$ a $|I_i| := a_i - a_{i-1}$.

Definice 4 (dolní a horní součty) *Konečný součet*

$$\begin{aligned} s(\overline{a},\ f) &:= \textstyle\sum_{i=1}^k |I_i| \cdot \inf(f[I_i]) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\ \ a \\ S(\overline{a},\ f) &:= \textstyle\sum_{i=1}^k |I_i| \cdot \sup(f[I_i]) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{aligned}$$

– infima a suprema počítáme v $(\mathbb{R}^*, <)$ – nazveme po řadě dolním a horním součtem (pro dělení $\overline{a}$ a funkci f).

- *Úloha.* Dokažte, že f je shora (resp. zdola) neomezená $\iff$ každý h. (resp. d.) součet $S(\overline{a}, f) = +\infty$ (resp. $s(\overline{a}, f) = -\infty$).
- *Úloha.* Dokažte následující tvrzení.

Tvrzení 5 (monotonie d. a h. součtů) *Nechť $\overline{a} \subset \overline{b}$ jsou dělení intervalu $[a, b]$ a nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak*

$$s(\overline{a},\ f) \le s(\overline{b},\ f) \wedge S(\overline{a},\ f) \ge S(\overline{b},\ f)\ .$$

Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $\mathcal{D} = \mathcal{D}(a, b)$ označuje množinu všech dělení intervalu $[a, b]$.

Definice 6 (d. a h. $\int$) *Prvek*

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\big(\{s(\overline{a},\ f) \mid \overline{a} \in \mathcal{D}\}\big) \in \mathbb{R}^*\ ,$$

respektive

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\big(\{S(\overline{a},\ f) \mid \overline{a} \in \mathcal{D}\}\big) \in \mathbb{R}^*\ ,$$

(infima a suprema opět bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$) je takzvaný dolní, resp. horní, integrál funkce f přes interval $[a, b]$.

Tvrzení 7 ($\underline{\int} \le \overline{\int}$) *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Pro každá dvě dělení $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{D}(a, b)$ platí, že*

$$s(\overline{a}, f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(\overline{b}, f)\ .$$

Důkaz. Nechť f je, jak uvedeno, a $\overline{a}$ a $\overline{b}$ jsou dělení intervalu $[a, b]$. Už známe trik s $\overline{c} := \overline{a} \cup \overline{b}$. Pak totiž $\overline{a}, \overline{b} \subset \overline{c}$ a podle tvrzení 5 je

$$s(\overline{a},\, f) \le s(\overline{c},\, f) \le S(\overline{c},\, f) \le S(\overline{b},\, f) \ \text{ a } \ s(\overline{a},\, f) \le S(\overline{b},\, f)\ .$$

Důkaz se nyní dokončí pomocí následující úlohy. $\square$

• *Úloha.* V každém lineárním uspořádání $(X, \prec)$ pro každé dvě množiny $A, B \subset X$ splňující $A \preceq B$, to jest $a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \preceq b$, je $\sup(A) \preceq \inf(B)$, když tyto prvky existují.

Pravá strana následující ekvivalence podává pátou, Darbouxovu, definici Riemannova integrálu.

Tvrzení 8 (Riemann = Darboux) $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. *Pak*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, b) \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}\ .$$

Když platí obě strany $\iff$, *pak* $(\mathrm{R})\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f \in \mathrm{R}(a, b)$. Pak je f omezená a infima v $s(\overline{a}, f)$ a suprema v $S(\overline{a}, f)$ jsou konečná. Můžeme je tak libovolně těsně aproximovat funkčními hodnotami a dostaneme, že pro $\forall\, \varepsilon\ \forall\, \overline{a} \in \mathcal{D}(a, b)\ \exists\, \overline{t}$ pro $\overline{a}$, že

$$|s(\overline{a},\, f) - R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| < \varepsilon\ ,$$

a že pro $\forall\, \varepsilon\ \forall\, \overline{a} \in \mathcal{D}(a, b)\ \exists\, \overline{t}$ pro $\overline{a}$, že

$$|S(\overline{a},\, f) - R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| < \varepsilon\ .$$

Odtud podle tvrzení 7 zde a definice 1 v př. př. plyne implikace i poslední část tvrzení.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $I := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$, funkce f je tedy podle úlohy výše omezená. Buď dáno ε. Podle tohoto předpokladu a podle tvrzení 7 vezmeme taková dělení $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{D}(a, b)$, že

$$s(\overline{a}, f) \leq I \leq S(\overline{b}, f) \wedge 0 \leq S(\overline{b}, f) - s(\overline{a}, f) < \varepsilon\ .$$

Položíme $\overline{c} := \overline{a} \cup \overline{b}$. Podle tvrzení 5 a 7 je

$$s(\overline{a},\ f) \leq s(\overline{c},\ f) \leq \big\{I,\ R(\overline{c},\ \overline{t},\ f)\big\} \leq S(\overline{c},\ f) \leq S(\overline{b},\ f))$$

pro libovolné body $\overline{t}$ v $\overline{c}$. Tedy $|R(\overline{c}, \overline{t}, f) - I| < \varepsilon$ a $f \in \mathrm{R}(a, b)$ podle tvrzení 3. □

• *Henstock–Kurzweilův integrál.* Viděli jsme, že (N) $\int_0^1 1/\sqrt{x} = 2$, ale že (R) $\int_0^1 1/\sqrt{x}$ neexistuje, protože integrand $1/\sqrt{x}$ je neomezený. Riemannův integrál neumí integrovat neomezené funkce, což je jeho nedostatek. V roce 1957 český matematik *Jaroslav Kurzweil (1926–2022)* a o něco později anglický matematik *Ralph Henstock (1923–2007)* upravili podmínku $\|\overline{a}\| < \delta$, aby tento nedostatek odstranili. Uvedeme definici jejich integrálu a dokážeme pro něj základní větu.

Definice 9 (kalibry) *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$. Funkci $\delta_c\colon [a, b] \to (0, +\infty)$ nazveme kalibrem (na $[a, b]$). Dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$, $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, intervalu $[a, b]$ nazveme δ_c-jemným, pokud*

$$\forall\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k\, \big(a_i - a_{i-1} < \delta_c(t_i)\big)\ .$$

Takže pokud $\|\overline{a}\| < \delta$, dělení $\overline{a}$ s libovolnými body $\overline{t}$ je δ_c-jemné pro konstantní kalibr $\delta_c = \delta$.

Tvrzení 10 (Cousinovo lemma) *$a < b$ jsou v $\mathbb{R}$. Pak*

$$\forall \text{ kalibr } \delta_c \ \exists\ \delta_c\text{-jemné } \overline{a} \in \mathcal{D}(a, b) \text{ s body } \overline{t}.$$

Dokonce každý konečný systém $[a_i, b_i]$, $i \in I$, disjunktních podintervalů v $[a, b]$ s body $t_i \in [a_i, b_i]$, které splňují $b_i - a_i < \delta_c(t_i)$, lze doplnit do δ_c-jemného dělení s body intervalu $[a, b]$.

Důkaz. Viz **K**. □

Definujeme Henstock–Kurzweilův integrál. Podle tvrzení 10 lze implikaci v definici vždy splnit netriviálně, s platným předpokladem. Definice je tedy korektní.

Definice 11 (Henstock–Kurzweilův $\int$) *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je* HK-*integrovatelná, symbolicky psáno $f \in \mathrm{HK}(a, b)$, pokud $\exists\, c\ \forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta_c$, kalibr na $[a, b]$, že pro $\forall$ dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a, b]$ platí, že*

$$(\overline{a}, \overline{t}) \text{ je } \delta_c\text{-jemné} \Rightarrow |R(\overline{a}, \overline{t}, f) - c| < \varepsilon\ .$$

Pak také píšeme

$$(\mathrm{HK}) \int_a^b f = c \quad \text{nebo} \quad (\mathrm{HK}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = c$$

a řekneme, že Henstock–Kurzweilův integrál funkce f přes interval $[a, b]$ se rovná c.

- *Úloha.* Ukažte, že $\mathrm{R}(a, b) \subset \mathrm{HK}(a, b)$.

Následující věta[1] ukazuje, že Henstock–Kurzweilův integrál je správný partner Newtonova integrálu.

Věta 12 (HK. $\int$ a N. $\int$) *$a < b$, $F, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, F je spojitá a $F' = f$ na (a,b). Pak $f \in \mathrm{HK}(a,b)$ a*

$$(\mathrm{HK}) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (\mathrm{N}) \int_a^b f \ .$$

Důkaz. Nechť a, b, F a f jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Definujeme takový kalibr $\delta_c(x)$ na $[a,b]$, že pro každé δ_c-jemné dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a,b]$ se hodnoty $F(b) - F(a)$ a $R(\overline{a}, \overline{t}, t)$ málo liší.

Pro $x \in (a,b)$ můžeme vzhledem k rovnosti $F'(x) = f(x)$ vzít takovou hodnotu $\delta_c(x) > 0$, že pro $y \in [a,\, b]$ platí implikace

$$y \in U(x,\, \delta_c(x)) \Rightarrow |F(y) - F(x) - f(x)(y-x)| \leq \varepsilon |y-x| \ . \quad (*)$$

Pro $x = a, b$ můžeme vzít takové hodnoty $\delta_c(a), \delta_c(b) > 0$, že

$$|f(a)\delta_c(a)|,\ |f(b)\delta_c(b)| < \varepsilon \wedge |F(y) - F(a)|,\ |F(z) - F(b)| < \varepsilon \quad (**)$$

pro každé $y \in [a, a + \delta_c(a))$ a každé $z \in (b - \delta_c(b), b]$.

Nechť dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$, $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$, intervalu $[a,b]$ je δ_c-jemné. Když $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ a $t_i \neq a, b$, pak

$$\begin{aligned} &|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \overset{\Delta\text{-ner.}}{\leq} |F(a_i) - F(t_i) - \\ &- f(t_i)(a_i - t_i)| + |F(t_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(t_i - a_{i-1})| \leq \\ &\overset{(*)}{\leq} \varepsilon |a_i - t_i| + \varepsilon |t_i - a_{i-1}| = \varepsilon (a_i - a_{i-1}) \ . \end{aligned}$$

[1] J. Lukeš a J. Malý, *Measure and integral*, matfyzpress, Praha 2013, str. 96–97.

Když $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ s $t_i \in \{a, b\}$, pak

$$\begin{aligned}&|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \\ &\overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} |F(a_i) - F(a_{i-1})| + |f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \overset{(**)}{<} 2\varepsilon\ ,\end{aligned}$$

protože $i = 1 \wedge t_1 = a$ nebo $i = k \wedge t_k = b$. Dohromady

$$\begin{aligned}&|F(b) - F(a) - R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| \overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} \\ &\le \sum_{i=1}^{k} |F(a_i) - F(a_{i-1}) - (a_i - a_{i-1})f(t_i)| < \varepsilon(b-a) + 4\varepsilon\ ,\end{aligned}$$

jak jsme slíbili. Takže $F(b) - F(a) = (\mathrm{HK}) \int_a^b f$. $\square$

- *Úloha.* Položme $1/\sqrt{0} := 0$. Pak $(\mathrm{HK}) \int_0^1 1/\sqrt{x} = ?$.
- *Integrace per partes a substitucí pro* (R) $\int$. Uvedeme už třetí verze těchto vzorců. Poprvé šlo o primitivní funkce, pak o Newtonův integrál. Zde je upravíme pro Riemannův integrál. Substituce se teď ukazuje být překvapivě netriviální. V následující větě jsou hodnoty $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ a $g(b)$ libovolné.

Věta 13 (per partes pro R. $\int$) *$a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, F, G, f, $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $F' = f$, $G' = g$ a $Fg, fG \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak platí, že*

$$\int_a^b Fg = \big[FG\big]_a^b - \int_a^b fG\ .$$

Důkaz. Podle linearity Riemannova integrálu i $fG + Fg \in \mathrm{R}(a,b)$. Z této linearity, z $FG = \int (fG + Fg)$ a ze ZVA 2 (věta 17, př. 12) máme, že

$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\int_a^b fG + (\mathrm{R})\int_a^b Fg &= (\mathrm{R})\int_a^b (fG+Fg)\\ &= (\mathrm{N})\int_a^b (fG+Fg) = \big[FG\big]_a^b\,,\end{aligned}$$

což je jen úprava dokazované rovnosti. □

Následující tvrzení o substituci v Riemannově integrálu je jednoduché, ale ne zcela uspokojivé.

Věta 14 (R. $\int$ substitucí) *Nechť $G\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ má na $[a,b]$ spojitou derivaci G' a $f\colon G[\,[a,b]\,]\to\mathbb{R}$ je spojitá. Pak platí rovnost*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)G'\,.$$

Důkaz. Pro $x\in G[\,[a,b]\,]$ uvážíme funkci

$$F(x) := \int_{G(a)}^x f$$

(úloha níže). Podle ZVA 1 (věta 1) a vzorce pro derivaci složené funkce (věta 18 v př. 7) je na $[a,b]$ funkce $F(G)$ primitivní k funkci $f(G)G'$. Podle ZVA 2 (věta 17 př. př.) a definice funkce F se

$$\int_a^b f(G)G' = \big[F(G)\big]_a^b = F(G(b)) - \underbrace{F(G(a))}_{=0} = \int_{G(a)}^{G(b)} f\,.$$

□

• *Úloha.* Ukažte, že $G[\,[a,b]\,]$ je kompaktní interval a že F je dobře definovaná.

Neuspokojivé ale je, že tu pracujeme vlastně jen s Newtonovými integrály a že tato věta je už obsažená v části 1 věty 5 o substituci v Newtonově integrálu v přednášce 11. Větu o substituci pouze pro Riemannův integrál dokázal teprve v r. 1961 H. Kestelman. Uveďme ji zde ve vylepšené podobě (s ekvivalencí pro riemannovskou integrovatelnost), kterou nalezli v r. 1970 čeští matematici D. Preiss a J. Uher[2].

Věta 15 (D. Preiss a J. Uher) *Nechť* g *je v* $\mathrm{R}(a,b)$, $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je dána jako* $G(x) := \int_a^x g$ *a* $f\colon G[\,[a,b]\,] \to \mathbb{R}$ *je omezená. Potom*

$$f \in \mathrm{R}\big(\underbrace{G[\,[a,b]\,]}_{\textit{úloha níže}}\big) \iff f(G)g \in \mathrm{R}(a,\, b)\ .$$

Když obě strany ekvivalence platí, pak

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)g\ .$$

- *Úloha.* Proč je $G[\,[a,b]\,]$ kompaktní interval?

Pro důkaz věty viz původní článek
`https://eudml.org/doc/19168` nebo nověji v
`https://arxiv.org/abs/1105.5938` nebo v
`https://arxiv.org/abs/1904.07446`. Napíšu ho do **K**.

DĚKUJI ZA POZORNOST!

[2]Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál, *Časopis pěst. mat.* **95** (1970), 345–347.