Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 11, 27. 4. 2023

NEWTONŮV INTEGRÁL. $\int$ RACIONÁLNÍ FUNKCE

• *Obecný Newtonův integrál.* $(\mathrm{N})\int_a^b f$ rozšíříme na funkce typu $f\colon (A,B)\to\mathbb{R}$ pro $A<B$ v $\mathbb{R}^*$.

Definice 1 (obecný Newtonův integrál) *$A<B$ jsou v $\mathbb{R}^*$, $F,f\colon (A,B)\to\mathbb{R}$ a F je primitivní k f. Newtonův integrál funkce f přes interval (A,B) definujeme jako rozdíl*

$$(\mathrm{N})\int_A^B f = F_B - F_A := \lim_{x\to B} F(x) - \lim_{x\to A} F(x)\ ,$$

jsou-li obě limity vlastní. Plocha A_f oblasti $G_{\le f}$ pak je $(\mathrm{N})\int_A^B f$. Pro $B<A$ klademe $(\mathrm{N})\int_A^B f := -(\mathrm{N})\int_B^A f$. Dále vždy definujeme $(\mathrm{N})\int_A^A f := 0$.

Pokud je $(\mathrm{N})\int_A^B f$ definovaný, řekneme, že f je *newtonovsky integrovatelná přes* (A,B), a píšeme, že $f\in \mathrm{N}(A,\,B)$.

• *Úloha.* Ukažte, že hodnota tohoto integrálu nezávisí na volbě F.

• *Úloha.* Ukažte, že pro $A,B,K,L\in\mathbb{R}^*$ s $A\le K<L\le B$ platí, že $f\in\mathrm{N}(A,B)\Rightarrow f\,|\,(K,L)\in\mathrm{N}(K,L)$.

Pak píšeme jen $f\in\mathrm{N}(K,L)$. Např. $\frac{1}{1+x^2}\in\mathrm{N}(0,+\infty)$, protože

$$(\mathrm{N})\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2} = \overbrace{\arctan_{+\infty}}^{\lim_{x\to+\infty}\arctan x} - \overbrace{\arctan_0}^{=\arctan 0} = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\ .$$

Pro $F\colon (A,B)\to\mathbb{R}$ zavádíme zápis

$$[F]_A^B := F_B - F_A = \lim_{x\to B} F(x) - \lim_{x\to A} F(x)\ ,$$

jestliže obě limity existují a jsou vlastní.

- *Úlohy.* Dokažte dvě následující tvrzení.

Tvrzení 2 (aditivita) *Pokud A, B, C jsou v $\mathbb{R}^*$ a f je v $\mathrm{N}\big(\min(\{A,B,C\}), \max(\{A,B,C\})\big)$, pak*

$$(\mathrm{N})\int_A^C f = (\mathrm{N})\int_A^B f + (\mathrm{N})\int_B^C f \ ,$$

neboli $(\mathrm{N})\int_A^B f + (\mathrm{N})\int_B^C f + (\mathrm{N})\int_C^A f = 0$.

Tvrzení 3 (linearita) *Pokud A a B jsou v $\mathbb{R}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $f, g \in \mathrm{N}\big(\min(\{A,B\}), \max(\{A,B\})\big)$, pak*

$$(\mathrm{N})\int_A^B (af + bg) = a \cdot (\mathrm{N})\int_A^B f + b \cdot (\mathrm{N})\int_A^B g \ .$$

- *Integrace per partes.* Tento vzorec dokážeme.

Věta 4 (per partes) *$f, g, F, G\colon (A,B) \to \mathbb{R}$, kde $A < B$ jsou v $\mathbb{R}^*$, F (resp. G) je primitivní k f (resp. ke g). Pak*

$$\underbrace{(\mathrm{N})\int_A^B fG}_{T_1} = \underbrace{[FG]_A^B}_{T_2} - \underbrace{(\mathrm{N})\int_A^B Fg}_{T_3}$$

platí vždy, když jsou definovány dva ze tří členů T_i.

Důkaz. 1. Nechť $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$. Tedy $[FG]_A^B = T_2$ a funkce fG má na (A,B) primitivní funkci H s $[H]_A^B = T_1$. Pak

$$(FG - H)' = fG + Fg - fG = Fg \ \text{ a } \ [FG - H]_A^B = T_2 - T_1 \ .$$

$FG - H$ je tedy na (A, B) primitivní k Fg a poslední rovnost je jen úprava rovnosti uvedené ve větě.

2. Nechť $T_1 \in \mathbb{R}$ a $T_3 \in \mathbb{R}$. Takže fG, resp. Fg, má na (A, B) primitivní funkci H_1, resp. H_2, s $[H_1]_A^B = T_1$ a $[H_2]_A^B = T_3$. Pak

$$(H_1 + H_2)' = fG + Fg = (FG)' \text{ na } (A, B)\ .$$

Podle věty 9 v př. 9 existuje konstanta c, že na (A, B) se $H_1 + H_2 + c = FG$. Proto

$$[FG]_A^B = [H_1 + H_2 + c]_A^B = [H_1]_A^B + [H_2]_A^B = T_1 + T_3\ ,$$

což je rovnost ve větě.

3. $T_2, T_3 \in \mathbb{R}$ – tento případ je podobný případu 1. □

- *Úloha.* Dokažte podrobně případ 3.

Vezměme například $I_n := (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom $I_0 = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = -\mathrm{e}^{-\infty} - (-\mathrm{e}^{-0}) = -0 - (-1) = 1$. Pro $n > 0$ pomocí poslední věty a indukce podle n dostaneme, že

$$\begin{aligned} I_n &= (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} x^n \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)' \\ &\overset{\text{věta 4, } \exists\, T_2 \text{ a } T_3}{=} [-x^n \mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} + (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} (x^n)' \, \mathrm{e}^{-x} \\ &= -0 + 0 + n \cdot (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \\ &= n \cdot I_{n-1}\ . \end{aligned}$$

Proto $I_n = n! = \prod_{j=1}^n j$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Tuto reprezentaci faktoriálů pomocí integrálů lze použít pro důkaz Stirlingova vzorce, který jsme zmínili minule.

• *Integrace substitucí.* Dva vzorce pro integraci substitucí z minulé přednášky upravíme pro obecný Newtonův integrál.

Věta 5 (substituce) $A, B, C, D \in \mathbb{R}^*$, $A < B$, $C < D$, $g\colon (A, B) \to (C, D)$, *$\exists$ vl. g' a $f\colon (C, D) \to \mathbb{R}$. Pak platí:*

1. *$F\colon (C, D) \to \mathbb{R}$ je primitivní k f. Pak se*
$$(\mathrm{N})\int_A^B f(g)\cdot g' = (\mathrm{N})\int_{g_A}^{g_B} f\ ,$$
pokud poslední integrál existuje.

2. *g je na & $g' \neq 0$, pak $\{g_C^{-1},\, g_D^{-1}\} = \{A,\, B\}$ a*
$$(\mathrm{N})\int_C^D f = (\mathrm{N})\int_{g_C^{-1}}^{g_D^{-1}} f(g)\cdot g'\ ,$$
pokud poslední integrál existuje.

Důkaz. Nechť A, B, C, D, g a f jsou, jak je uvedeno. 1. Nechť existuje F a pravá strana je definovaná. Tedy existují limity

$$g_A := \lim_{x\to A} g(x) \in \mathbb{R}^* \ \text{ a } \ g_B := \lim_{x\to B} g(x) \in \mathbb{R}^*\ ,$$

což jsou patrně limitní body intervalu (C, D), a pravá strana se rovná

$$F_{g_B} - F_{g_A} = \lim_{y\to g_B} F(y) - \lim_{y\to g_A} F(y)$$

– poslední dvě limity existují a jsou vlastní. Víme, že na (A, B) je

$F(g)$ primitivní k $f(g) \cdot g'$. Tím pádem

$$\begin{aligned}
(\mathrm{N}) \int_{g_A}^{g_B} f &= \lim_{y \to g_B} F(y) - \lim_{y \to g_A} F(y) \\
&= \lim_{x \to B} F(g(x)) - \lim_{x \to A} F(g(x)) = (\mathrm{N}) \int_A^B f(g) \cdot g' \;.
\end{aligned}$$

První a třetí rovnost plynou z definice N. $\int$. Druhá rovnost plyne z věty o limitě složené funkce (věta 14 v př. 5 se splněnou podm. 1).

2. Nechť g je na, $g' \neq 0$ a pravá strana je definovaná. Víme, že g i g^{-1} je rostoucí nebo klesající bijekce a g^{-1} je spojitá. Tedy limity

$$g_C^{-1} := \lim_{y \to C} g^{-1}(y) \in \mathbb{R}^* \ \text{ a } \ g_D^{-1} := \lim_{y \to D} g^{-1}(y) \in \mathbb{R}^*$$

existují a $\{g_C^{-1}, g_D^{-1}\} = \{A, B\}$. Podle předpokladu má $f(g) \cdot g'$ na (A, B) primitivní funkci G a pravá strana má hodnotu

$$\lim_{x \to g_D^{-1}} G(x) - \lim_{x \to g_C^{-1}} G(x) \;.$$

Víme, že na (C, D) je $G(g^{-1})$ primitivní k f. Tím pádem

$$\begin{aligned}
(\mathrm{N}) \int_{g_C^{-1}}^{g_D^{-1}} f(g) \cdot g' &= \lim_{x \to g_D^{-1}} G(x) - \lim_{x \to g_C^{-1}} G(x) \\
= \lim_{y \to D} G(g^{-1}(y)) - \lim_{y \to C} G(g^{-1}(y)) &= (\mathrm{N}) \int_C^D f \;.
\end{aligned}$$

První a třetí rovnost opět plynou z definice N. $\int$ a druhá opět z věty o limitě složené funkce. $\square$

Minule jsme spočítali, že na $(-1, 1)$ je

$$\int \sqrt{1 - t^2} = \frac{t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t}{2} =: F(t) \quad .$$

• *Úloha.* Dokažte, že tento vztah platí i na $[-1,1]$.

Dostáváme tak plochu horního jednotkového půlkruhu

$$(\mathrm{N})\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}=\lim_{t\to 1}F(t)-\lim_{t\to -1}F(t)$$
$$=(\arcsin 1)/2-(\arcsin(-1))/2=\pi/4-(-\pi/4)=\pi/2\ .$$

• *Primitivní funkce některých elementárních funkcí.* Mechanicky invertujeme pravidla pro derivování ve větě 20 v př. 7.

Věta 6 (tabulka antiderivací) *Platí následující vzorce.*

1. $I=\mathbb{R}$. $\int \exp(x)=\exp(x)$, $\int \sin x=-\cos x$, $\int \cos x=\sin x$, $\int \frac{1}{1+x^2}=\arctan x$, $\int x^n=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ *pro* $n\in\mathbb{N}_0$.
2. $I=(-\infty,0)$ *nebo* $(0,+\infty)$. $\int \frac{1}{x}=\log(|x|)$ *a* $\int x^n=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ *pro* $n\in\{-2,-3,\dots\}$.
3. $I=(0,+\infty)$. $\int x^b=\frac{x^{b+1}}{b+1}$ *pro* $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
4. $I=(k\pi-\frac{\pi}{2},\,k\pi+\frac{\pi}{2})$, $k\in\mathbb{Z}$. $\int\frac{1}{(\cos x)^2}=\tan x$.
5. $I=(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. $\int\frac{1}{(\sin x)^2}=-\cot x$.
6. $I=(-1,1)$. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$.

• *Úloha.* Nejsou vztahy $(\log x)'=1/x$ a $(\log(-x))'=(1/(-x))\cdot(-x)'=1/x$ v rozporu s tím, že dvě antiderivace téže funkce se liší jen konstantním posunem?

• *Výpočet antiderivace racionální funkce.* Připomeňme si, že racionální funkce $r=r(x)$, krátce RF, je podíl dvou reálných polynomů

$$r(x) = p(x)/q(x) \colon \mathbb{R} \setminus Z(r) \to \mathbb{R} \ .$$

Zde $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q(x)$ není nulový a

$$Z(r) := \{a \in \mathbb{R} \mid q(a) = 0\}$$

je množina reálných kořenů jmenovatele $q(x)$. Jak známo, $|Z(r)| \le \deg q$, *stupeň* polynomu $q = q(x)$. *Ireducibilní trojčlen* $a(x)$, krátce IT, je reálný *monický* (s vedoucím koeficientem 1) kvadratický polynom

$$a(x) = x^2 + bx + c \ \text{ s } \ b^2 - 4c < 0 \ ,$$

takže $a(x)$ nemá reálné kořeny. Pak $a(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Např. $x^2 + 2x + 2$ je IT. Ve druhé polovině přednášky dokážeme, modulo důkaz věty 8 (*Základní věta algebry*), následující větu.

Věta 7 ($\int r(x)$) $\forall\,\mathrm{RF}\,r(x)\ \exists$ *funkce* $R(x)$ *tvaru*

$$\begin{aligned} R(x) &= r_0(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{k} s_i \cdot \log(|x - \alpha_i|) + \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{l} t_i \cdot \log(a_i(x)) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \arctan(b_i(x)) \ , \end{aligned}$$

kde $r_0(x)$ *je* RF, $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, *prázdné* $\sum := 0$, s_i, t_i, u_i *jsou v* $\mathbb{R}$, $\alpha_i \in Z(r(x))$, $a_i(x)$ *jsou* IT*y a* $b_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ *jsou nekonstantní lineární polynomy, že na každém netriviálním intervalu* $I \subset \mathbb{R} \setminus Z(r(x))$ *se*

$$R(x) = \int r(x) \ .$$

Je jasné, že funkce všech čtyř uvedených typů se v $R(x)$ mohou objevit. Linearitou integrace, integrací substitucí a pomocí výše uvedené tabulky primitivních funkcí například dostaneme, že

$$\int r(x) := \int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x-1} + \overbrace{\frac{2x+2}{x^2+2x+2}}^{=(\dots)'/(\dots)} + \overbrace{\frac{1}{x^2+2x+2}}^{=1/((x+1)^2+1)} \right)$$
$$= -\frac{1}{3x^3} + \log(|x-1|) + \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)$$

na libovolném netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pro důkaz věty nejdříve vysvětlíme teorii parciálních zlomků.

- *Parciální zlomky.* Následující větu nebudeme dokazovat.

Věta 8 (Zvalg) $\forall\, p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}\ \exists\, \alpha \in \mathbb{C}\ \big(p(\alpha) = 0\big)$.

Ze Zvalg odvodíme ireducibilní rozklady v $\mathbb{R}[x]$.

Důsledek 9 (rozklady) *Nechť* $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q(x) \neq 0$. *Pak*

$$q(x) = c \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{m_i}}_{\text{koř. činitele typu } 1} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{l} a_i(x)^{n_i}}_{\text{koř. činitele typu } 2}\ ,$$

kde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, *je vůdčí koeficient,* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *prázdné* $\prod := 1$, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *jsou všechny různé reálné kořeny polynomu* $q(x)$ *a* $a_i(x)$ *jsou vzájemně různé* IT*y.*

Důkaz. $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ je kořenem $q(x) \Rightarrow$ konjugát $\overline{\alpha} = a - bi$ je kořenem, protože $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ (viz úloha níže). Pokud $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tj. pokud $b \neq 0$, pak

$$a_\alpha(x) := (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2a \cdot x + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$$

je IT: $(-2a)^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$.

Je-li $q(x)$ konstantní polynom, důsledek platí s rozkladem $q(x) = c$. Pokud $q(x)$ není konstantní, podle věty 8 má kořen $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$q(x) = (x - \alpha)q_1(x)$$

(úlohy níže). Pokud $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow q_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ (úlohy níže). Odštěpili jsme tak jeden kořenový činitel $x - \alpha$ typu 1. Pokud $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow q_1(x) = (x - \overline{\alpha})s_1(x)$ (úlohy níže). Pak

$$q(x) = (x - \alpha)q_1(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})s_1(x) = a_\alpha(x)s_1(x)\ .$$

Opět $s_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ a odštěpili jsme tak jeden kořenový činitel $a_\alpha(x)$ typu 2. Pokud $q_1(x)$, resp. $s_1(x)$, je nekonstantní, aplikujeme na něj stejný postup a pak pokračujeme stejným způsobem. Nakonec odštěpování kořenových faktorů skončí u konstantního polynomu c a pro $q(x)$ dostaneme uvedený rozklad. □

- *Úloha.* Dokažte, že kořeny reálného polynomu tvoří komplexně sdružené dvojice.
- *Úlohy.* Doplňte podrobnosti v krocích důkazu výše.

Rozklady RF na parciální zlomky získáme pomocí této identity:

Tvrzení 10 (Bachetova id.) *$p, q \in \mathbb{R}[x]$ nemají společný kořen, tj. pro žádné $z \in \mathbb{C}$ neplatí, že $p(z) = q(z) = 0$. Pak $\exists\, r, s \in \mathbb{R}[x]$, že*

$$r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1\ .$$

Důkaz. Nechť $p(x)$ a $q(x)$ jsou, jak uvedeno, a

$$S := \{r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) \mid r(x),\ s(x) \in \mathbb{R}[x]\}\ .$$

Nechť polynom $t(x) \in S$, $t(x) \neq 0$, má nejmenší stupeň. Libovolný $a(x) \in S$ jím dělíme se zbytkem:

$$a(x) = t(x) \cdot b(x) + c(x)\ ,$$

kde $b(x), c(x) \in \mathbb{R}[x]$ a $\deg c(x) < \deg t(x)$ nebo $c(x) = 0$. Ale $c(x) = a(x) - b(x) \cdot t(x) \in S$ (úloha níže). Polynom $c(x)$ je tedy nulový a $a(x) = b(x)t(x)$, takže $t(x)$ dělí každý prvek v S. Ale $p(x), q(x) \in S$ a $t(x)$ je oba dělí. Protože $p(x)$ a $q(x)$ nemají společný kořen, podle věty 8 je $t(x)$ nenulový konstantní polynom. Búno $t(x) = 1$. Tedy $1 \in S$ a máme uvedenou identitu. □

- *Úloha.* Proč $c(x)$ leží v S?

Věta 11 (parciální zlomky) $\forall$ *reálná* RF $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *se jmenovatelem* $q(x)$ *rozloženým dle důsledku 9, má vyjádření*

$$r(x) = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma_{i,j} x + \delta_{i,j}}{a_i(x)^j}$$

s $s(x) \in \mathbb{R}[x]$, k, l, m_i, n_i, α_i *a* $a_i(x)$ *jsou jako v důsledku 9 a* $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$, $\delta_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Bachetovu identitu dělíme součinem $p(x)q(x)$ a dostaneme

$$\frac{1}{p(x)q(x)} = \frac{s(x)}{p(x)} + \frac{r(x)}{q(x)}\ .$$

Opakujeme to a vidíme, že pro každých n reálných polynomů $q_1(x)$, $\dots$, $q_n(x)$, z nichž žádné dva $q_i(x)$ a $q_j(x)$, $i \neq j$, nemají společný komplexní kořen, existuje n reálných polynomů $s_1(x)$, $\dots$, $s_n(x)$, že

$$\frac{1}{q_1(x)q_2(x)\dots q_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i(x)}{q_i(x)}\ .$$

Nyní nechť $r(x) = p(x)/q(x)$ je RF a $q(x)$ je rozložen jako v důsledku 9. Poslední vysazenou identitu použijeme pro $n := k+l$, $q_1(x) := (x-\alpha_1)^{m_1}$, …, $q_k(x) := (x-\alpha_k)^{m_k}$, $q_{k+1}(x) := a_1(x)^{n_1}$, …, $q_{k+l}(x) := a_l(x)^{n_l}$ a dostaneme takové reálné polynomy $b_1(x)$, …, $b_k(x)$, $c_1(x)$, …, $c_l(x)$, že

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i(x)}{(x-\alpha_i)^{m_i}} + \sum_{i=1}^{l} \frac{c_i(x)}{a_i(x)^{n_i}}\ .$$

V každém z výše uvedených $k+l$ zlomků čitatel dělíme jmenovatelem se zbytkem: $b_i(x) = (x-\alpha_i)^{m_i} \cdot s_i(x) + d_i(x)$ a $c_i(x) = a_i(x)^{n_i} \cdot s_{i+k}(x) + d_{i+k}(x)$, kde $d_i(x), s_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ a každý zbytek $d_i(x)$ je buď nulový polynom nebo má stupeň menší než jmenovatel (což je m_i resp. $2n_i$). Pomocí $s(x) := \sum_{i=1}^{k+l} s_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ přepíšeme poslední vysazenou rovnost jako

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i(x)}{(x-\alpha_i)^{m_i}} + \sum_{i=1}^{l} \frac{d_{k+i}(x)}{a_i(x)^{n_i}}\ .$$

Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ opakovaně dělíme $d_i(x)$ polynomem $x - \alpha_i$ se zbytkem a vyjádříme i-tý sčítanec v prvním součtu ve shora uvedené podobě. Totéž uděláme pro každý sčítanec ve druhém součtu. Podrobněji, například $d_{k+1}(x)/a_1(x)^{n_1}$ se rovná

$$\frac{a_1(x) \cdot e(x) + \gamma_{1,n_1} x + \delta_{1,n_1}}{a_1(x)^{n_1}} = \frac{e(x)}{a_1(x)^{n_1-1}} + \frac{\gamma_{1,n_1} x + \delta_{1,n_1}}{a_1(x)^{n_1}}\ ,$$

pak vydělíme $e(x)$ polynomem $a_1(x)$ se zbytkem a tak dále. □

• *Důkaz věty 7 o tvaru $\int r(x)$.* Danou RF $r(x)$ vyjádříme součtem parciálních zlomků jako v předchozí větě:

$$r(x) = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma_{i,j}x + \delta_{i,j}}{a_i(x)^j} \ .$$

Použijeme linearitu PF a integrujeme každý sčítanec zvlášť. První dva členy jsou snadné: $\int s(x)$ je polynom (na jakémkoli netriviálním reálném intervalu I), $\int \beta/(x-\alpha)^j = -\beta/((j-1)(x-\alpha)^{j-1})$ pro $j \ge 2$ a $\int \beta/(x-\alpha) = \beta \log(|x-\alpha|)$, kde tyto PF platí na libovolném netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. Jsou to příspěvky k $\int r(x)$ prvních dvou typů ve větě 7.

Zintegrujeme třetí člen a vypočítáme PF tvaru

$$\int \frac{\gamma x + \delta}{(x^2+bx+c)^j} \ ,$$

kde $j \in \mathbb{N}$ a $\gamma, \delta, b, c \in \mathbb{R}$ splňují $b^2 - 4c < 0$. Pomocí $d := \sqrt{c - b^2/4} > 0$ a $e := (\delta - \gamma b/2)/d^{2j-1}$ zapíšeme poslední RF jako

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma x + \delta}{(x^2+bx+c)^j} &= \frac{\gamma}{2} \cdot \underbrace{\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^j}}_{T := (\dots)'/(\dots)^j} + \frac{\delta - \gamma b/2}{(x^2+bx+c)^j} \\
&= \frac{\gamma}{2} \cdot T + e \cdot \underbrace{\frac{1/d}{\big((x/d + b/2d)^2 + 1\big)^j}}_{U := (\dots)'/((\dots)^2+1)^j} \\
&= \frac{\gamma}{2} \cdot T + e \cdot U \ .
\end{aligned}$$

Integrací substitucí máme, že $\int T = 1/\big((j-1)(x^2+bx+c)^{j-1}\big)$ pro $j \ge 2$ a $\int T = \log(x^2+bx+c)$ pro $j = 1$ (na libovolném netriviálním reálném intervalu I). Tím dostáváme příspěvky k $\int r(x)$ prvního a třetího typu ve větě 7.

Nakonec spočítáme $\int U$. Integrací substitucí máme, že $\int U = I_j(x/d + b/2d)$ (na libovolném netriviálním reálném intervalu I), kde

$$I_j = I_j(y) := \int \frac{1}{(y^2+1)^j} \; .$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ integrací per partes a derivováním složených funkcí dostaneme vztah

$$\begin{aligned} I_j &= \int y' \cdot \frac{1}{(y^2+1)^j} = \frac{y}{(y^2+1)^j} + 2j \int \frac{(y^2+1)-1}{(y^2+1)^{j+1}} \\ &= \frac{y}{(y^2+1)^j} + 2j \cdot I_j - 2j \cdot I_{j+1} \; . \end{aligned}$$

Máme tedy rekurenci $I_1 = \arctan y$ (tabulka výše) a

$$I_{j+1} = \frac{y}{2j \cdot (y^2+1)^j} - (1 - 1/2j) \cdot I_j, \; j \in \mathbb{N} \; .$$

Z toho vyplývá, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je

$$I_j(y) = u(y) + r \cdot \arctan y \; ,$$

kde $u(y) \in \mathbb{Q}(y)$ je RF a $r \in \mathbb{Q}$. Protože $\int U = I_j(x/d + b/2d)$, poslední příspěvek k $\int r(x)$ je prvního a čtvrtého typu ve větě 7. $\square$

DĚKUJI ZA POZORNOST!