Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 10, 20. 4. 2023

PLOCHA POD GRAFEM. NEWTONŮV INTEGRÁL

• *K čemu jsou antiderivace dobré?* Pro výpočet plochy rovinné oblasti ležící pod grafem funkce. Jak víme, pro $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$I(a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid \min(\{a,\, b\}) \le x \le \max(\{a,\, b\})\}$$

uzavřený interval s konci a a b. Pro $M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je graf funkce f rovinná množina $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset \mathbb{R}^2$. Podobně definujeme

$$G_{\le f} := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in M \wedge y \in I(0,\, f(x))\} \subset \mathbb{R}^2\ ,$$

což je množina bodů v rovině ležících mezi G_f a osou x. Nazveme ji *oblastí pod grafem (funkce f)*, patrně $G_f \subset G_{\le f}$. Pro definiční obory $M = I$ rovné omezeným intervalům se budeme zabývat otázkou, jak spočítat její plochu. Použijeme dva přístupy.

• *Riemannovy součty.* Nechť $M = I = [a, b]$ pro reálná čísla $a < b$. *Dělením $\overline{a}$ (intervalu I)* rozumíme každou takovou $k+1$-tici bodů $\overline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$, $k \in \mathbb{N}$, že

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k = b\ .$$

Jeho *norma* $\|\overline{a}\| \in [0, +\infty)$ je největší délka $a_i - a_{i-1}$ podintervalu. *Dělení (intervalu I) s body* je každá taková dvojice $(\overline{a}, \overline{t})$, že $\overline{a} = (a_0, \dots, a_k)$ je dělení intervalu I a k-tice $\overline{t} = (t_1, \dots, t_k)$ splňuje, že $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ pro každé $i \in [k]$.

Definice 1 (Riemannovy součty) *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *pro* $a < b$, *a* $(\overline{a}, \overline{t})$ *je dělení intervalu* $[a,b]$ *s body. Riemannův součet pro* f *a* $(\overline{a}, \overline{t})$ *je*

$$R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) := \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)\ .$$

Geometricky to je „plocha“ *sloupcového grafu*

$$B_f := \textstyle\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1},\, a_i] \times I(0,\, f(t_i))$$

složeného z k sloupců (obdélníků) s rozměry $(a_i - a_{i-1}) \times |f(t_i)|$. Sloupce pod osou x, s $f(t_i) < 0$, přispívají záporně. Protože $G_{\le f} \approx B_f$, je rozumné předpokládat, že $R(\overline{a}, \overline{t}, f)$ pro $\|\overline{a}\| \to 0$ dobře aproximuje „plochu“ množiny $G_{\le f}$.

Tvrzení 2 (o RS) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je spojitá. Pak*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\, \big(\|\overline{a}\|,\, \|\overline{b}\| < \delta \Rightarrow |R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - R(\overline{b},\, \overline{u},\, f)| < \varepsilon\big)\ .$$

Důkaz. Nechť a, b a f jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Víme, že f je stejnoměrně spojitá. Tedy existuje δ, že pro $c, d \in [a,b]$ platí, že $|c-d| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(d)| < \varepsilon/2(b-a)$. Nechť $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{b}, \overline{u})$, kde

$$\overline{a} = (a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_k) \ \text{ a } \ \overline{b} = (b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_l) \ \text{ s } \ \|\overline{a}\|,\, \|\overline{b}\| < \delta\ ,$$

jsou dělení intervalu $[a,b]$ s body. Nejprve navíc předpokládáme, že $\overline{a} \subset \overline{b}$, takže $a_0 = b_{i_0} = a$, $a_1 = b_{i_1}$, $\ldots$, $a_k = b_{i_k} = b$ pro nějaké indexy $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = l$. Pak $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{b}, \overline{u}, f)|$ je

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i) - \sum_{i=1}^{l}(b_i - b_{i-1}) \cdot f(u_i)\Big| = \\
&\overset{(1)}{=} \Big|\sum_{r=1}^{k} \sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_j - b_{j-1}) \cdot (f(t_r) - f(u_j))\Big| \\
&\overset{(2)}{<} \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_j - b_{j-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\
&\overset{(3)}{=} (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}\ .
\end{aligned}$$

Jsou-li $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{b}, \overline{u})$ obecná dělení intervalu $[a, b]$ s body splňující $\|\overline{a}\|, \|\overline{b}\| < \delta$, vezmeme dělení intervalu $[a, b]$ s body $(\overline{c}, \overline{v})$, kde $\overline{c} := \overline{a} \cup \overline{b}$ a $\overline{v}$ je libovolné. Pak též $\|\overline{c}\| < \delta$. Protože $\overline{a} \subset \overline{c}$ a $\overline{b} \subset \overline{c}$, podle předchozího případu je $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{b}, \overline{u}, f)|$ nejvýše

$$|R(\overline{a},\ \overline{t},\ f) - R(\overline{c},\ \overline{v},\ f)| + |R(\overline{c},\ \overline{v},\ f) - R(\overline{b},\ \overline{u},\ f)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

□

- *Úlohy.* Proč v důkazu platí rovnosti (1) a (3) a nerovnost (2)?

Definice 3 (lim RS) *$a, b, L \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Když pro $\forall$ posloupnost $\big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ dělení intervalu $[a, b]$ s body platí, že*

$$\lim \|\overline{a_n}\| = 0 \Rightarrow \lim\ R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f) = L\ ,$$

napíšeme, že $\lim_{\|\overline{a}\| \to 0} R(\overline{a}, \overline{t}, f) = L$, a řekneme, že Riemannovy součty funkce f mají limitu L.

• *Úloha.* Dokažte jednoznačnost těchto limit. Návod: je to trochu chyták.

> **Důsledek 4 ($\exists$ lim RS)** *Pro spoj. funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vždy existuje $\lim_{\|\overline{a}\| \to 0} R(\overline{a}, \overline{t}, f)$.*

Důkaz. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s $a < b$ je spojitá a $\big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s body splňující, že $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Podle tvrzení 2 je posloupnost $\big(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)\big)$ Cauchyova, a proto má limitu $L \in \mathbb{R}$. Pokud $\big((\overline{b_n}, \overline{u_n})\big)$ je další posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s body a s $\lim \|\overline{b_n}\| = 0$, podle tvrzení 2 je

$$\lim_{n \to \infty} \big(R(\overline{a_n},\, \overline{t_n},\, f) - R(\overline{b_n},\, \overline{u_n},\, f)\big) = 0\ .$$

Takže i $\lim R(\overline{b_n}, \overline{u_n}, f) = L$. □

• *Newtonovský přístup.* Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je dělení intervalu $[a,b]$. Sestrojíme takový RS, že

$$R(\overline{a},\, \overline{c},\, f) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(c_i) = F(b) - F(a)\ .$$

Použijeme opět Lagrangeovu větu o střední hodnotě, pro F a každý interval $[a_{i-1}, a_i]$. Pak pro nějaké body $c_i \in (a_{i-1}, a_i)$ se $(F(a_i) - F(a_{i-1}))/(a_i - a_{i-1}) = F'(c_i) = f(c_i)$. Takže opravdu se $F(b) - F(a)$ rovná

$$\sum_{i=1}^{k} (F(a_i) - F(a_{i-1})) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(c_i) = R(\overline{a},\, \overline{c},\, f)\ ,$$

kde $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_k)$.

• *Úloha.* Proč se $F(b) - F(a)$ rovná $\sum_{i=1}^{k}(F(a_i) - F(a_{i-1}))$?

Můžeme tak podat dvě definice plochy oblasti $G_{\le f}$ pod grafem libovolné funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definice 5 (plocha pod grafem) *Plochu $A_f \in \mathbb{R}$ oblasti $G_{\le f}$ pod grafem funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme dvěma způsoby.*

1. *(I. Newton) $A_f := F(b)-F(a)$ pro libovolnou primitivní funkci $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ k funkci f (pokud F existuje).*
2. *(B. Riemann) $A_f := \lim_{\|\overline{a}\|\to 0} R(\overline{a}, \overline{t}, f)$ (pokud tato limita existuje).*

• *Úloha.* Ukažte, že hodnota v Newtonově definici nezávisí na volbě primitivní funkce F.

První definice je jednodušší než druhá, ale druhou lze použít v případech, kdy první použít nelze. Později uvidíme, že domény použitelnosti obou definic jsou neporovnatelné. Pro spojité funkce obě definice poskytují stejnou hodnotu A_f.

Důsledek 6 (Riemann = Newton) *Když je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá a $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je k ní primitivní, pak*

$$\lim_{\|\overline{a}\|\to 0} R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) = F(b) - F(a)\ .$$

Důkaz. Nechť f a F jsou, jak je uvedeno, a $\big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s body, pro níž $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Podle argumentu výše pro každé n existují body $c_{n,i} \in (a_{n,i-1}, a_{n,i})$, že

$F(b) - F(a) = R(\overline{a_n}, \overline{c_n}, f)$. Podle AL posloupností se

$$\lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) = \underbrace{\lim \big(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) - R(\overline{a_n}, \overline{c_n}, f)\big)}_{= 0 \text{ podle tvrzení 2}} +$$

$$+ \lim \underbrace{R(\overline{a_n}, \overline{c_n}, f)}_{=F(b)-F(a)} = 0 + F(b) - F(a) = F(b) - F(a)\ .$$

Dostali jsme uvedenou limitu. □

Pokud například $f(x) = x^2\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, pak $F(x) = x^3/3$ je (na $[-1, 1]$) primitivní k f. Podle Newtonovy definice se plocha oblasti $G_{\le f} = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le x^2\}$ rovná

$$A_f = F(1) - F(-1) = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

- *Úloha.* Vypočítejte A_f pro funkci $f(x) = -\sin x\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$.
- *Newtonův integrál.* Newtonovský přístup teď zobecníme.

Definice 7 (Newtonův integrál) *Když $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < b$, má prim. funkci F a $\exists$ vlastní limity $F(a) := \lim_{x \to a} F(x)$ a $F(b) := \lim_{x \to b} F(x)$, definujeme Newtonův integrál funkce f (na intervalu (a, b)) jako jejich rozdíl*

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f := F(b) - F(a) = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)\ .$$

Pak plochu A_f oblasti $G_{\le f}$ definujeme jako $A_f := (\mathrm{N}) \int_a^b f$.

Jak víme, hodnota $(\mathrm{N}) \int_a^b f$ nezávisí na volbě funkce F. Píšeme, že

$$f \in \mathrm{N}(a, b)\ ,$$

a řekneme, že f *je (na (a, b)) newtonovsky integrovatelná.*

• *Úloha.* Dokažte, že když $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, je $f \mid (a,b)$ newtonovsky integrovatelná a

$$(\mathrm{N}) \int_a^b (f \mid (a,\, b)) = \lim_{\|\overline{a}\| \to 0} R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)\ .$$

• *Úloha.* Rozpomeňte se na příklad nespojité funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, která má primitivní funkci.

• *Úloha.* Dokažte, že když $f \in \mathrm{N}(a,b)$ pak $f \mid (c,d) \in \mathrm{N}(c,d)$ pro každá dvě čísla $c < d$ v intervalu (a,b).

Tvrzení 8 (monotonie (N) $\int$) *Když $f, g \in \mathrm{N}(a,b)$ a $f \le g$ na (a,b), pak* $(\mathrm{N}) \int_a^b f \le (\mathrm{N}) \int_a^b g$.

Důkaz. Nechť F, resp. G, je primitivní k f, resp. ke g. Čísla $c < d$ v (a,b) buďte libovolná. Použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci $F - G$ a interval $[c,d]$: pro nějaký bod $e \in (c,d)$ je

$$\begin{aligned}(F(d) - G(d)) - (F(c) - G(c)) &= (F - G)'(e) \cdot (d - c) \\ &= (F'(e) - G'(e)) \cdot (d - c) \\ &= (f(e) - g(e)) \cdot (d - c) \le 0\ .\end{aligned}$$

Proto $F(d) - F(c) \le G(d) - G(c)$. Tato nerovnost se zachová při limitních přechodech $c \to a$ a $d \to b$ a dostáváme uvedenou nerovnost mezi oběma Newtonovými integrály. □

Uvedeme dva příklady Newtonových integrálů:

$$(\mathrm{N}) \int_0^1 \sqrt{x} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{3/2}}{3/2} - \lim_{x \to 0} \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2 \cdot 1^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 0^{3/2}}{3} = \frac{2}{3}\ ,$$

ale

$$(\mathrm{N})\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{x\to 1}\log x - \lim_{x\to 0}\log x = \log 1 - (-\infty)\,?$$

neexistuje, protože limita antiderivace $\log x$ v 0 není konečná.

• *Důkaz druhého případu l'Hospitalova pravidla.* Newtonovým integrálem dokážeme druhou část LHP pro $\lim_{x\to A} g(x) = \pm\infty$ (podmínka 2 ve větě 7 v př. 8). Nejprve dokážeme jednu asymptotiku Newtonových integrálů.

Tvrzení 9 (asymptotika $(\mathrm{N})\int$) *$f, g \in \mathrm{N}(a,b)$, $g > 0$, $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ a $\lim_{x\to a} (\mathrm{N})\int_x^b g = +\infty$. Pak*

$$(\mathrm{N})\int_x^b f = o\left((\mathrm{N})\int_x^b g\right) \quad (x \to a)\,.$$

Důkaz. Buď dáno ε. Podle prvního o existuje $\delta \le b-a$, že $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot g(x)$. Podle limity $+\infty$ existuje $\theta < \delta$, že $x \in (a, a+\theta) \Rightarrow |(\mathrm{N})\int_{a+\delta}^b f| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot(\mathrm{N})\int_x^b g$. Pokud je tedy $x \in (a, a+\theta)$, pak

$$\begin{aligned}
\left|(\mathrm{N})\int_x^b f\right| &\overset{(1)}{=} \left|(\mathrm{N})\int_x^{a+\delta} f + (\mathrm{N})\int_{a+\delta}^b f\right| \\
&\overset{\Delta\text{-ová ner.}}{\le} \left|(\mathrm{N})\int_x^{a+\delta} f\right| + \left|(\mathrm{N})\int_{a+\delta}^b f\right| \\
&\overset{\text{obě}\Rightarrow\text{ a tvrz. 8}}{<} \frac{\varepsilon}{2}\cdot(\mathrm{N})\int_x^{a+\delta} g + \frac{\varepsilon}{2}\cdot(\mathrm{N})\int_x^b g \\
&\overset{\text{tvrz. 8}}{\le} \varepsilon\cdot(\mathrm{N})\int_x^b g\,.
\end{aligned}$$

□

- *Úloha.* Proč platí rovnost (1)?

Věta 10 (LHP 2) *$A \in \mathbb{R}$, $f, g, f', g' \colon P^+(A, \delta) \to \mathbb{R}$, $g' \neq 0$ a $\lim_{x \to A} g(x) = \pm\infty$. Pak*

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ ,$$

existuje-li poslední limita. Věta platí také pro levá okolí $P^-(A, \delta)$, okolí $P(A, \delta)$ a pro $A = \pm\infty$.

Důkaz. Nechť $A \in \mathbb{R}$, f a g jsou, jak je uvedeno. Předpokládáme, že $\lim_{x \to A} g(x) = +\infty$ a že $g' > 0$ (viz úloha níže), případ limity $-\infty$ se probere podobně. Nechť $\lim_{x \to A} f'(x)/g'(x) =: L \in \mathbb{R}^*$. Nechť nejprve $L = 0$, tj. $f'(x) = o(g'(x))$ $(x \to A)$. Vezmeme nějaké $\theta < \delta$ a podle předchozí věty dostaneme, že

$$(\mathrm{N}) \int_x^\theta f' = o\left((\mathrm{N}) \int_x^\theta g' \right) \ \ (x \to A) \ ,$$

což dává $f(x) = f(\theta) - o(1)(g(\theta) - g(x))$. Tedy $f(x)/g(x) = f(\theta)/g(x) + o(1)(1 - g(\theta)/g(x)) = o(1) + o(1)(1 - o(1)) = o(1)$ a tedy $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = 0 = L$.

Nechť $L \in \mathbb{R}$ je obecné. Pak s $h(x) := f(x) - Lg(x)$ máme, že $\lim_{x \to A} h'(x)/g'(x) = 0$, a podle právě dokázaného případu je

$$0 = \lim_{x \to A} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} - L$$

a $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = L$. Pro $L = +\infty$ je $\lim_{x \to A} g'(x)/f'(x) = 0^+$. Tedy podle předchozího případu je $\lim_{x \to A} g(x)/f(x) = 0^+$ a dostaneme, že $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = +\infty$. $L = -\infty$ převedeme substitucí $h(x) := -f(x)$ na případ $L = +\infty$.

Pro levá okolí $P^-(A, \delta)$ a okolí $P(A, \delta)$ jsou důkazy podobné a pro $A = \pm\infty$ se použije substituce $x := 1/y$ jako v prvním případu limity $\frac{0}{0}$. $\square$

Předchozí důkaz LHP pro limity $\frac{\infty}{\infty}$ je převzat z učebnice I. I. Ljaško, V. F. Emel'janov a A. K. Bojarčuk, *Osnovy klassičeskogo i sovremennogo Matematičskogo Analiza* (Kijev, 1988) (str. 206–7).

• *Úloha.* Proč můžeme předpokládat, že že $g' > 0$? Návod: viz následující věta.

• *Úloha.* Vypočítejte $\lim_{x\to 0} \cot x / \log x$.

• *Stirlingův vzorec.* Stirlingův asymptotický vzorec

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

je také možné dokázat jen Newtonovým integrálem, viz `https://arxiv.org/abs/1907.02553`.

• *Výpočet primitivní funkce.* Je v obecnosti dosti složitý, podrobnosti uvádí článek `https://en.wikipedia.org/wiki/Risch_algorithm` o tzv. *Rischově algoritmu*.

• *Darbouxova vlastnost derivací.* Dokážeme, že derivace nabývá každou mezihodnotu.

Definice 11 (Darbouxova vlastnost) *$f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, má Darbouxovu vlastnost, pokud pro*

$$\forall \text{ interval } I \subset M \text{ je obraz } f[I] \text{ interval}\,.$$

Ve větě 8 v př. 6 jsme dokázali, že spojité funkce mají D. vlastnost. Nyní to rozšíříme na další funkce.

Věta 12 (derivace jsou Darbouxovy) *I je netriviální interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci $\Rightarrow$ f má Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Nechť $a < b$, $f, F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, F je primitivní k f a $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Uvážíme funkci

$$G(x) := F(x) - cx\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}\ .$$

Patrně $G' = F' - c = f - c$ na $[a,b]$ a tedy G je spojitá. Podle věty 13 v př. 6 G nabývá v nějakém $d \in [a,b]$ minimum. Z

$$G'(a) = f(a) - c < 0 \ \text{ a } \ G'(b) = f(b) - c > 0$$

podle tvrzení 5 v př. 8 plyne, že $d \in (a,b)$. Podle věty 4 v př. 7 se $G'(d) = f(d) - c = 0$, takže $f(d) = c$. □

• *Úloha.* Proč je tato třída funkcí s Darbouxovou vlastností ostře obsáhlejší než třída spojitých funkcí?

• *Úloha.* Jak z této věty plyne, že funkce znaménka $\mathrm{sgn}(x)$ nemá na žádném netriviálním intervalu $I \ni 0$ primitivní funkci?

• *Linearita* PF *a integrace per partes.* Pro netriviální interval I a dvě funkce $F, f\colon I \to \mathbb{R}$ značení $F = \int f$ znamená, že F je (na I) primitivní k f.

Tvrzení 13 (linearita $\int$) *$I \subset \mathbb{R}$ je netriv. interval, f, g, F, $G\colon I \to \mathbb{R}$, F (resp. G) je prim. k f (resp. ke g). Pak*

$$aF + bG = \int (af + bg)\ .$$

Důkaz. Pokud f, g, I, F a G jsou, jak uvedeno, pak linearita derivování dává, že

$$(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg \ .$$

$\square$

Například z $x^2/2 = \int x$ a $-\cos x = \int \sin x$ tak hned vidíme, že $-2\cos x + x^2/2 = \int(2\sin x + x)$.

Věta 14 (integrace per partes) *$I \subset \mathbb{R}$ je netriv. interval, f, g, F, $G\colon I \to \mathbb{R}$ a F (resp. G) je prim. k f (resp. ke g). Pak*

$$\int fG = FG - \int Fg$$

– když H je prim. k Fg, pak $FG - H$ je prim. k fG.

Důkaz. Leibnizův vzorec a linearita derivování:

$$(FG - H)' = F'G + FG' - H' = fG + Fg - Fg = fG \ .$$

$\square$

Tento vzorec lze psát také jako

$$\int F'G = FG - \int FG' \ .$$

Pokud známe primitivní funkci k FG', dává vzorec primitivní funkci k $F'G$. Derivace přeskočila z F na G. Například (na $(0, +\infty)$)

$$\begin{aligned} \int \log x \ &= \ \int x' \log x = x \log x - \int x(\log x)' \\ &= \ x \log x - \int \frac{x}{x} = x \log x - \int 1 = x \log x - x \ . \end{aligned}$$

Nebo (na $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\int x\sin x &= \int x(-\cos x)' = -x\cos x + \int x'\cos x\\ &= -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \sin x\ .\end{aligned}$$

Správnost obou výsledků snadno zkontrolujeme zderivováním.

- *Integrace substitucí.* Jsou to dva vzorce pro výpočet antiderivací.

Věta 15 (integrace substitucí) *$I, J \subset \mathbb{R}$ jsou netriv. intervaly, $g\colon I \to J$, $g'\colon I \to \mathbb{R}$ a $f\colon J \to \mathbb{R}$. Pak*

(1) *$F = \int f$ na $J \Rightarrow F(g) = \int f(g)\cdot g'$ na I a*

(2) *když g je surjekce & $g' \neq 0$ na I, potom platí implikace*

$$G = \int f(g)\cdot g' \text{ na } I \Rightarrow G(g^{-1}) = \int f \text{ na } J.$$

Důkaz. 1. Derivace složené funkce: $(F(g))' = F'(g)\cdot g' = f(g)\cdot g'$.

2. Podle věty 12 má g' Darbouxovu vlastnost. Tedy na I je buď $g' > 0$ anebo $g' < 0$. Takže g buď roste anebo klesá. Tedy existuje spojitý inverz $g^{-1}\colon J \to I$, protože g je spojitá na intervalu (část 2 věty 27 v př. 6). Podle vzorců pro derivaci složené funkce a pro derivaci inverzní funkce (věty 18 a 19 v př. 7) je

$$\begin{aligned}\big(G(g^{-1})\big)' &= G'(g^{-1})\cdot(g^{-1})'\\ &= f(\underbrace{g(g^{-1})}_{=x})\cdot \cancel{g'(g^{-1})}\cdot\frac{1}{\cancel{g'(g^{-1})}} = f\ .\end{aligned}$$

□

Uvedeme příklad na každý z obou vzorců.

Příklad 1. Pokud $F = \int f$ na I a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$, pak podle prvního vzorce je

$$\frac{F(ax+b)}{a} = \int f(ax+b) \ \text{ na } J := (I-b)/a \ .$$

Příklad 2. Čemu se na $J = (-1, 1)$ rovná $\int f := \int \sqrt{1-t^2}$? Za t dosadíme funkci $g(x) := \sin x \colon I := (-\pi/2, \pi/2) \to J$. Integrací per partes máme, že na I je

$$\begin{aligned} \int f(g) \cdot g' &= \int \cos^2 x = \int (\sin x)' \cos x \\ &= \sin x \cdot \cos x - \int \sin x (\cos x)' \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \\ &= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \end{aligned}$$

a proto (na I)

$$\int f(g) \cdot g' = \int \cos^2 x = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} =: G(x) \ .$$

Podle druhého vzorce a díky tomu, že $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ na I, máme, že na J se

$$\int f = \int \sqrt{1-t^2} = G(g^{-1}) = \frac{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t}{2} \ .$$

Tento vzorec se snadno zkontroluje zderivováním.

DĚKUJI ZA POZORNOST!