POŽADAVKY KE ZKOUŠCE Z MA 1
A INFORMACE O NÍ (LS 2022)

(M. Klazar)

Definice základních pojmů

1. definice funkce, funkce prostá, na a bijekce (př. 1)
2. supremum a infimum v lineárním uspořádání (př. 1)
3. (nejvýše) spočetná a nespočetná množina (př. 1)
4. vlastní a nevlastní limita posloupnosti, podposloupnost (př. 2)
5. liminf a limsup posloupnosti (př. 3)
6. řada, částečný součet řady, součet řady (př. 3)
7. geometrická řada a její součet, absolutně konvergentní řada (př. 4)
8. limita funkce, jednostranná limita funkce (př. 4 a 5)
9. exponenciála, logaritmus, kosinus a sinus (př. 4)
10. spojitost funkce v bodě, jednostranná spojitost funkce v bodě (př. 5)
11. asymptotické symboly O, o a $\sim$ (př. 5)
12. kompaktní, otevřená, uzavřená množina (př. 6)
13. globální, lokální a ostré extrémy funkce (př. 6)
14. derivace funkce, jednostranná derivace funkce (př. 7)
15. standardní definice tečny (př. 7)
16. derivace vyšších řádů (př. 8)
17. (ryze) konvexní a konkávní funkce (př. 8)
18. inflexní bod (př. 8)
19. svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu (př. 8)

20. Taylorův polynom funkce, Taylorova řada funkce (př. 9)
21. primitivní funkce (př. 9)
22. stejnoměrná spojitost (př. 9)
23. (obecný) Newtonův integrál funkce (př. 10 a 11)
24. Riemannův integrál (př. 12)
25. Henstock–Kurzweilův integrál (př. 13)
26. délka grafu funkce, plocha mezi grafy, objem rotačního tělesa (př. 13)

Věty a tvrzení bez důkazů

1. Existence $\mathbb{R}$ (v. 8, př. 1) a Základní věta algebry (v. 17, př. 1)
2. O podposloupnostech (t. 6, př. 2) a Existence monotónní podposloupnosti (t. 11, př. 2)
3. Geometrická posloupnost (t. 5, př. 3) a Liminf a limsup (v. 10, př. 3)
4. O harmonických číslech (v. 4, př. 4) a Riemannova (v. 5, př. 4)
5. O Riemannově funkci (t. 8, př. 5) a Limita složené funkce (v. 14, př. 5)
6. Heineho definice spojitosti (t. 1, př. 6) a Blumbergova (v. 5, př. 6) a Počet spojitých funkcí (v. 7, př. 6)
7. Derivace složené funkce (v. 15, př. 7) a Derivace inverzní funkce (v. 16, př. 7)
8. l'Hospitalovo pravidlo (v. 7, př. 8) a Konvexita a konkavita a f'' (v. 12, př. 8)
9. Lagrangeův a Cauchyův zbytek Taylorova polynomu (v. 6, př. 9) a Bellova čísla (t. 7, př. 9)
10. Riemann = Newton (d. 4, př. 10) a Integrace substitucí (v. 13, př. 10)
11. (N) $\int_A^B f$ per partes (v. 4, př. 11) a $\int r(x)$ (v. 7, př. 11)

12. O restrikcích (t. 5, př. 12) a Lebesgueova (v. 11, př. 12)
13. Riemann = Darboux (t. 4, př. 13) a HK. $\int$ a N. $\int$ (v. 7, př. 13) a Zvana 2 (v. 15, př. 12) a Délka grafu (v. 13, př. 13) a Integrální kritérium (d. 17, př. 13)

<u>Věty a tvrzení s důkazy</u>

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (v. 6, př. 1) a Cantorova (v. 14, př. 1)
2. Jednoznačnost limity (t. 3, př. 2) a Bolzano–Weierstrassova (v. 13, př. 2)
3. Limita a uspořádání (v. 6, př. 3) a Cauchyova podmínka (v. 15, př. 2)
4. Nutná podmínka konvergence řady (t. 2, př. 4) a Harmonická řada (t. 3, př. 4)
5. Heineho definice (v. 14, př. 4) a Aritmetika limit funkcí (v. 11, př. 5)
6. Nabývání mezihodnot (v. 8, př. 6) a Princip minima a maxima (v. 13, př. 6)
7. Příznak extrému (v. 4, př. 7) a Leibnizův vzorec (v. 13, př. 7)
8. Lagrangeova (v. 2, př. 8) a Derivace a monotonie 1 (v. 4, př. 8)
9. Taylorův polynom (v. 1, př. 9) a Nejednoznačnost primitivní funkce (v. 9, př. 9)
10. Monotonie (N) $\int$ (t. 7, př. 10) a Derivace jsou Darbouxovy (v. 10, př. 10)
11. Bachetova identita (t. 10, př. 11) a vypočítejte/dokažte podrobně prim. funkci $\int 1/(1+x^2) =?$ (tj. nestačí jen říci, že $(\dots)' = 1/(1+x^2)$, ale je třeba ještě tu derivaci zdůvodnit).
12. Neomezené funkce jsou špatné (t. 8, př. 12) a Baireova (v. 10, př. 12)
13. $\underline{\int} \leq \overline{\int}$ (t. 3, př. 13) a Zvana 1 (v. 16, př. 12) a Abelova sumace (v. 19, př. 13)

Vzorová písemka

1. (10 b.) Vypočítejte objem rotačního tělesa

$$V(1,\,2,\,\log x)\;.$$

   Svůj výpočet přiměřeně zdůvodněte.

2. (a) (2 b.) Definujte součet řady.

   (b) (4 b.) Ano nebo ne: když $c \in \mathbb{R}$ a $\sum a_n$ je řada, pak tato řada konverguje, právě když konverguje řada $\sum ca_n$.

   (c) (4 b.) $\frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + \frac{5}{243} + \cdots = ?$

   Své odpovědi přiměřeně zdůvodněte.

3. (a) (2 b.) Napište tvrzení o Heineho definici spojitosti.

   (b) (4 b.) Ano nebo ne: funkci $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}\sin(1/x)$ lze v 0 spojitě dodefinovat.

   (c) (4 b.) Ano nebo ne: funkci $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ lze v 0 spojitě dodefinovat.

   Své odpovědi přiměřeně zdůvodněte.

4. (a) (4 b.) Napište znění věty: Lagrangeova věta o střední hodnotě.

   (b) (6 b.) Dokažte ji.

Technické poznámky o zkoušce. Písemka na 90 minut se 4 příklady po 10 bodech: (1) počítací (zjednodušený průběh funkce nebo výpočet integrálu), (2) definice, (3) věta/tvrzení bez důkazu a (4) věta/tvrzení s důkazem, s doplňkovými otázkami. Hodnocení: 0–19 za 4, 20–26 za 3, 27–33 za 2 a 34–40 za 1. Při zisku bodů blízko horní hranice možnost ústního dozkoušení na lepší známku. Konkrétní požadavky jsou uvedeny výše. U zkoušky nejsou povoleny žádné pomůcky (kalkulačky, zápisky, přítel na telefonu . . . , výjimky u hendikepovaných studentů povoluje examinátor). U zkoušky je povoleno používat připravenou tabulku derivací např. v rozsahu věty 17 v přednášce 7. Další příklady minulých zkouškových písemek jsou na stránce minulé výuky M. Klazara (jsou ale pro MA 1 ve staré akreditaci).