# Matematická analýza 1

Martin Klazar

Předběžná verze ze dne 23. 8. 2024. Kapitoly a oddíly bez značky budou teprve napsány. Kapitoly a oddíly s ✓jsou už hotové, včetně odkazů do rejstříku a řešení úloh. Na kapitolách a oddílech s ! se pracuje.

Věnováno památce
Jiřího Matouška (1963–2015)

*Was sich überhaupt sagen lässt, lässt sich klar sagen; ...*[1]

L. Wittgenstein [193, Vorwort (Předmluva)]

[1] Druhá vynechaná polovina citátu je známější, než první: „Was sich überhaupt sagen lässt, lässt sich klar sagen; und wovon man nicht reden kann, darüber muss man schweigen.“ Co lze vůbec říci, lze říci jasně; a o čem nelze mluvit, o tom nutno mlčet. Podle [197, str. 8]: „Co se vůbec dá říci, dá se říci jasně; a o čem nelze mluvit, k tomu se musí mlčet.“ O L. Wittgensteinovi píšeme v oddílu C.1.

# Úvod

Tato učebnice Matematické analýzy obsahuje dvacet kapitol a čtyři přílohy. Kapitoly Přednáška 1. $\cdots$ až Přednáška 14. $\cdots$ vycházejí z mých čtrnácti přednášek v předmětu

Matematická analýza 1 (NMAI054) ,

který jsem v zimě a na jaře v roce 2024 česky vyučoval v rámci Informatické sekce Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Použil jsem i čtrnáct přednášek v letním semestru školního roku 2022/23, viz

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24.html` a
`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI23.html`

— lze porovnat, jak se přednášky z roku na rok proměnily. Analýzu jsem prvně přednášel 5. října 2004, viz

`https://kam.mff.cuni.cz/%7Eklazar/MA04.html`

— čas letí. V každé kapitole a příloze je úvodem shrnut její obsah. Každá ze čtrnácti přednáškových kapitol obsahuje řadu úloh procvičujících látku. Jejich řešení nebo návody k nim jsou uvedeny v příloze D. Příloha C uvádí životopisné medailony matematiků a matematiček zmíněných v textu a obsahuje stručné historie některých pojmů matematické analýzy. Šest kapitol přidaných k přednáškám rozvíjí přednesenou látku. Výklad v nich je úspornější a jsou bez úloh. Obsah každé kapitoly, přílohy a oddílu by měl být zřejmý z názvu, viz strany vii až xi.

Reálná analýza je svými pojmy, terminologií a metodami spjata s teorií množin. Tu v kapitolách 1 a 2 pojednáme „naivně“ i formalizovaně. Příloha A podává autorův pohled na množiny. Příloha B podává přehled analýzy pojaté pomocí nekonečně malých veličin.

Učebnici věnuji památce Jiřího Matouška, mého kolegy z Katedry aplikované matematiky MFF UK. Byl jedním z našich největších matematiků a informatiků. S velkým zaujetím si připravoval přednášky z analýzy ve školním roce 2014/15. Nebylo mu ale dopřáno je přednést.

V Praze a v Lounech v únoru 2022 až říjnu 2024 Martin Klazar

# Co je tady nového?

Proč ještě další učebnice matematické analýzy? Není jich už dost, hlavně na internetu? Viz třeba [4, 6, 10, 28, 31, 41, 49, 50, 52, 56, 66, 72, 73, 75, 82, 83, 86, 87, 89, 90, 97, 101, 102, 106, 108, 110, 111, 130, 131, 135, 136, 138, 143, 154, 155, 157, 160, 166, 167, 168, 172, 173, 174, 175, 187, 202]. **Uvedeme některé novinky, které naše učebnice přináší. Začneme přednáškovými kapitolami.**

Správná definice 1.2.18 uspořádané $k$-tice.

Definice 1.3.3 shodnosti dvou funkcí.

Induktivní důkaz věty 1.5.16 o iracionalitě čísla $\sqrt{2}$.

Věta 1.6.12 — urvěta o limitě monotónní posloupnosti.

Důkaz úplnosti $\mathbb{R}$ ve větě 1.6.14.

Důkaz nespočetnosti $\mathbb{R}$ v důsledku 1.7.17 pomocí Cantorovy věty 1.7.7 o neexistenci surjekce z množiny na její potenci.

Tvrzení 3.1.7 o všeobecné existenci infim a suprem v $(\mathbb{R}^*, <)$.

Věty 3.1.9 a 3.1.10 o aritmetice rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$.

Charakterizace existence limit posloupností pomocí podposloupností ve větě 3.2.5.

Důsledky 3.3.4 a 3.3.10, což jsou robustní verze vět o limitách monotónních a kvazimonotónních posloupností.

Kombinatorická použití Feketeho lemmatu v úlohách 3.3.26 až 3.3.29.

Dva dodatky v tvrzení 4.1.4 a 4.1.6 k větě o aritmetice limit posloupností.

Obecnější formulace věty 4.3.2 o vztahu limity a uspořádání.

Obecnější formulace věty 4.3.10 o dvou strážnících.

Oddíl 4.5 o AK řadách, což jsou spočetná zobecnění konečných součtů.

Formulace Riemannovy věty 5.1.17 o řadách s libovolným součtem.

Věta 5.1.19 o nekonečné trojúhelníkové nerovnosti.

Věta 5.3.17 o běžkyni (geometrie sinu a kosinu), dokázaná v oddílu 6.11.

Definice Elementárních funkcí v definicích 5.4.4 a 5.4.13.

Definice polynomů, resp. racionálních funkcí, jako speciálních elementárních funkcí v definicích 5.5.1, resp. 5.5.6.

Tvrzení 5.5.2 a 5.5.7 o kanonických tvarech polynomů a racionálních funkcí.

Věta 7.3.1 o limitě monotónní funkce.

Věta 7.3.7 o vztahu limity funkce a uspořádání.

Nové pojetí věty 7.4.1 o limitě složené funkce.

Oddíl 7.5 o asymptotickém značení.

Blumbergova věta 8.1.10, že každá funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má spojitou restrikci na hustou podmnožinu, dokázaná v oddílu 9.6.

Věta 8.2.3 o existenci bijekce mezi množinou spojitých funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a množinou reálných čísel.

Oddíl 8.4 o kompaktních podmnožinách množiny $\mathbb{R}$.

Tvrzení 8.5.4, že stejnoměrně spojitá funkce má spojité rozšíření na uzávěr svého definičního oboru. Významem to daleko přesahuje tuto učebnici.

Věta 8.6.3 o spojitosti mocninných řad.

Věta 8.6.9 o spojitosti inverzu $f^{-1}$ spojité prosté funkce $f$, v pěti případech: (1) definiční obor $M(f)$ ($\subset \mathbb{R}$) funkce $f$ je kompaktní, (2) $M(f)$ je interval, (3) $M(f)$ je otevřená množina, (4) $M(f)$ je uzavřená množina a $f$ je monotónní nebo (5) $M(f) \subset (a, b)$, $a < b$, je množina hustá v tomto intervalu a funkce $f$ je monotónní a stejnoměrně spojitá.

Definice 10.1.1 bodové derivace funkce pro obecný definiční obor a příklad funkce s nespojitou derivací v tvrzení 10.1.20.

Definice 10.2.7 limitních tečen (jako limit posloupností sečen) a věta 10.2.11 definující tečnu v bodě neležícím v grafu funkce.

Věta **??** o derivaci složené funkce s obecným definičním oborem.

Věta 10.4.4 o derivaci inverzní funkce s obecným definičním oborem.

Přímé zderivování mocninné řady ve větě 10.5.1.

Vlastně celá kapitola 10 o derivacích.

Použití Rolleovy věty v důkazu důsledku 11.2.9, že posloupnost $(\log n)$ není P-rekurentní.

**Zde je přehled zajímavostí v rozšiřujících kapitolách a přílohách.**

Dva důkazy věty 2.1.8 pomocí axiomu výběru, že nejvýše spočetné sjednocení nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina. Analýza jejího neúplného důkazu ve van der Waerdenově algebře [170, str. 26].

Důkaz Základní věty algebry o existenci kořenů komplexních polynomů, viz oddíl 2.8.

Přesná definice geometrického kosinu a geometrického sinu a jejich rozvinutí do řad v oddílu 6.11.

Liouville–Rosenlichtova věta 16.1.1 o elementárních integrálech v diferenciální algebře. Důsledky 16.2.1 a 16.2.2 o neelementárnosti funkcí primitivních k $\mathrm{e}^{-x^2}$ a k $1/\log x$.

# Obsah


**✓Úvod** **iv**

**!Co je tady nového?** **v**

**1 ✓Přednáška 1. Úplnost a nespočetnost reálných čísel** **1**
1.1 Dva paradoxy . . . . . 1
1.2 Logické a množinové značení . . . . . 2
1.3 Funkce a relace . . . . . 6
1.4 Suprema a infima . . . . . 10
1.5 Racionální čísla . . . . . 11
1.6 Cantorova reálná čísla . . . . . 14
1.7 Spočetné a nespočetné množiny . . . . . 19

**2 !Množiny, čísla, pravda** **23**
2.1 !Axiomatická naivní teorie množin . . . . . 23
2.2 !Přirozená čísla . . . . . 28
2.3 !Celá čísla . . . . . 29
2.4 !Zlomky . . . . . 32
2.5 !Dedekindova reálná čísla . . . . . 32
2.6 !Desetinná reálná čísla . . . . . 33
2.7 ✓Komplexní čísla . . . . . 33
2.8 !Základní věta algebry . . . . . 35
2.9 !Šest vět o algebraických a transcendentních číslech . . . . . 41
2.10 Užití axiomu výběru . . . . . 47
2.11 !Jazyk logiky prvního řádu . . . . . 47
2.12 !Co je pravda? Co je důkaz? . . . . . 48
2.13 !ZFC . . . . . 50
2.14 Tvrditelnost (Assertibility) . . . . . 50

**3 ✓Přednáška 2. Existence limit posloupností** **51**
3.1 Nekonečna, okolí, limity . . . . . 51
3.2 Podposloupnosti, limita $n$-té odmocniny z $n$ . . . . . 57
3.3 Pět vět o existenci limit . . . . . 59

**4 ✓Přednáška 3. Aritmetika limit. AK řady** **65**
4.1 Aritmetika limit . . . . . 65
4.2 Rekurentní posloupnosti . . . . . 68
4.3 Uspořádání a limity . . . . . 69
4.4 Limes inferior a limes superior . . . . . 71
4.5 AK řady . . . . . 72

**5 ✓Přednáška 4. Elementární funkce** **77**
5.1 Standardní řady . . . . . 77
5.2 Limity funkcí . . . . . 83
5.3 Základní elementární funkce . . . . . 85
5.4 Elementární funkce . . . . . 89
5.5 Polynomy a racionální funkce . . . . . 91

**6 !Limity, řady, elementární funkce** **95**
6.1 Limity aritmeticko-mocninných posloupností . . . . . 95
6.2 Limity rekurentních posloupností . . . . . 96
6.3 Uspořádání a limity 2 . . . . . 105
6.4 !Teorie řad 2 . . . . . 108
6.5 !Basilejský problém . . . . . 109
6.6 $\zeta(3)$ je iracionální . . . . . 110
6.7 Skládací řady dokazují identity . . . . . 110
6.8 Proč se $1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$ . . . . . 110
6.9 !Elementární funkce 2 . . . . . 110
6.10 !Elementární funkce 3 . . . . . 111
6.11 !Kosinus a sinus . . . . . 111
6.12 !Wilkieho identity . . . . . 116

**7 ✓Přednáška 5. Limity funkcí** **117**
7.1 Jednostranné limity . . . . . 117
7.2 Spojitost funkce v bodu . . . . . 119
7.3 Limity a uspořádání, aritmetika limit . . . . . 121
7.4 Limita složené funkce . . . . . 124
7.5 Asymptotické značení . . . . . 126

**8 ✓Přednáška 6. Spojité funkce** **128**
8.1 Blumbergova věta . . . . . 128
8.2 Počet spojitých funkcí . . . . . 130
8.3 Nabývání mezihodnot . . . . . 131
8.4 Kompaktnost . . . . . 132
8.5 Stejnoměrná spojitost . . . . . 135
8.6 Operace na funkcích a spojitost . . . . . 136

**9 !Limity funkcí, spojitost, kompaktnost** **140**
9.1 !!Limity a spojitost inverzních funkcí . . . . . 140
9.2 Arnoldova limita . . . . . 145
9.3 !Tři asymptotické rozvoje . . . . . 146
9.4 Topologická spojitost a kompaktnost . . . . . 147
9.5 !Spojitost kořenů jako funkcí koeficientů polynomu . . . . . 148
9.6 Zobecnění Blumbergovy věty . . . . . 148
9.7 Každá vyčíslitelná reálná funkce je spojitá . . . . . 149

**10 !Přednáška 7. Derivace funkcí** **150**
10.1 ✓Derivace a lokální extrémy . . . . . 151
10.2 ✓Standardní a limitní tečny . . . . . 154
10.3 Aritmetika derivací . . . . . 157
10.4 Derivace složených funkcí a inverzů . . . . . 160
10.5 Derivace elementárních funkcí . . . . . 162

**11 !Přednáška 8. Věty o střední hodnotě** **167**
11.1 !!Tři věty o střední hodnotě . . . . . 167
11.2 !!Logaritmus není P-rekurentní . . . . . 169
11.3 !Monotonie a l'Hospitalovo pravidlo . . . . . 171
11.4 Derivace vyšších řádů . . . . . 174
11.5 Konvexita a konkavita . . . . . 176
11.6 Průběh funkce . . . . . 179

**12 !Přednáška 9. Taylorovy rozvoje** **182**
12.1 Taylorovy polynomy . . . . . 182
12.2 Taylorovy řady . . . . . 188
12.3 Primitivní funkce . . . . . 190

**13 Derivace** **196**
13.1 Ještě k tečnám . . . . . 196
13.2 K definici derivace: Peanovy derivace . . . . . 196
13.3 Existence spojitých funkcí bez derivace . . . . . 196
13.4 O diferencovatelnosti skoro všude . . . . . 196
13.5 Odpuzující se částice . . . . . 196
13.6 Barvinokovo přibližné počítání Taylorovými rozvoji . . . . . 196

**14 !Přednáška 10. Newtonův integrál** **197**
14.1 Plocha oblasti pod grafem . . . . . 197
14.2 Newtonův integrál . . . . . 201
14.3 Darbouxova vlastnost derivací . . . . . 205
14.4 Per partes a substituce pro primitivní funkce . . . . . 206

**15 !Přednáška 11. Antiderivace racionálních funkcí** **209**
15.1 !Nevlastní Newtonův integrál . . . . . 209
15.2 !Per partes a substituce pro Newtonovy integrály . . . . . 211
15.3 !Antiderivace racionálních funkcí . . . . . 214

**16 !Liouville–Rosenlichtova věta** **220**
16.1 !Liouville–Rosenlichtova věta . . . . . 220
16.2 !Neelementárnost antiderivací $\int \mathrm{e}^{-x^2}$ a $\int 1/\log x$ . . . . . 223

**17 !Přednáška 12. Riemannův integrál** **225**
17.1 !Definice Riemannova integrálu . . . . . 225
17.2 Existence Riemannova integrálu . . . . . 228

**18 !Přednáška 13. Henstock–Kurzweilův integrál** **231**
18.1 !Darbouxova definice Riemannova integrálu . . . . . 231
18.2 Henstock–Kurzweilův integrál . . . . . 235
18.3 Per partes a substituce pro Riemannovy integrály . . . . . 237
18.4 Použití integrálů . . . . . 239

**19 !Přednáška 14. Použití integrálů** **244**
19.1 Délka grafu funkce . . . . . 244
19.2 Plocha mezi grafy dvou funkcí . . . . . 246
19.3 Objem rotačního tělesa . . . . . 246
19.4 Součty a integrály . . . . . 246

**20 !Integrály a sumy** **247**
20.1 !Nevlastní Riemannovy integrály . . . . . 247
20.2 Stirlingův vzorec . . . . . 247
20.3 Riemannův–Stieltjesův integrál . . . . . 247
20.4 Důkaz Preissovy a Uhrovy věty . . . . . 247
20.5 Eulerova–MacLaurinova sumační formule . . . . . 247

**A !Literární teorie množin** **248**
A.1 Šipkový svět, slova, znaky a závorky . . . . . 249
A.2 Formule v množinovém jazyce . . . . . 251
A.3 Zkracování množinových formulí . . . . . 254
A.4 Axiomy a věty v $\mathrm{ZFC}_S$ . . . . . 254

**B Hyperreálná čísla** **255**

**C !Trocha historie** **256**
C.1 !Životopisné medailony . . . . . 256
C.2 Stručné dějiny některých pojmů a výsledků v analýze . . . . . 266

**D !Návody k řešením úloh** **267**

**!Literatura** **285**

**!Rejstřík** **298**

# Kapitola 1

# Přednáška 1. Úplnost a nespočetnost $\mathbb{R}$

První kapitola vychází z první přednášky

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred1.pdf`

přednesené 22. 2. 2024. Oddíl 1.1 uvádí dva paradoxy nekonečných součtů. Oddíl 1.2 podává stručný přehled logického a množinového značení, mimo jiné definujeme uspořádané dvojice a trojice. V oddílu 1.3 zavedeme funkce a uvedeme přehled jejich základních typů a operací s nimi. Oddíl 1.4 je věnován lineárním uspořádáním a definici infim a suprem. V oddílu 1.5 definujeme racionální čísla, tělesa a uspořádaná tělesa. Ve větě 1.5.16 dokážeme, že rovnice $x^2 = 2$ nemá v oboru zlomků řešení. Podle důsledku 1.5.18 lineární uspořádání zlomků není úplné, obsahuje neprázdné a shora omezené množiny bez suprem. Oddíl 1.6 je věnován reálným číslům, důležité jsou definice 1.6.3, věta 1.6.12 (pravěta o limitě monotónní posloupnosti) a důkaz úplnosti $\mathbb{R}$ ve větě 1.6.14. Reálnými čísly se zabývají i oddíly 2.5 a 2.6. V oddílu 1.7 definujeme konečné, nekonečné, spočetné a nespočetné množiny. Ve větě 1.7.5 dokážeme spočetnost zlomků. Podle Cantorovy věty 1.7.7 neexistuje zobrazení z žádné množiny na její potenci. Důsledkem 1.7.17 je nespočetnost reálných čísel. Definice 1.7.13 popisuje desetinné rozvoje reálných čísel.

## 1.1 Dva paradoxy

• *Co analyzuje matematická analýza?* Nekonečné operace a procesy. Nekonečno může vést k paradoxům a dva si ukážeme. Zřejmě

$$S = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n} + \cdots = 0\,.$$

Přerovnání sčítanců v $S$ ale <u>změní součet</u>: $S = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \cdots > 0$, neboť $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n(2n-1)} > 0$. Takže toto

zavedení spočetného součtu $S = a_1 + a_2 + \dots$ jako limity $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ posloupnosti částečných součtů $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (limita reálné posloupnosti je zavedena v definici 3.1.16) *není moc dobré*, protože — v kontrastu s konečnými součty — výsledný součet může záviset na pořadí sčítanců. V oddílu 4.5 třetí přednášky zavedeme lepší spočetné součty, které touto anomálií netrpí, a jsou, tak jako konečné součty, komutativní a asociativní.

Dále tu je zvláštní nekonečná tabulka s položkami $-1$, $0$ a $1$. Na hlavní diagonále má 1, nad ní $-1$ a jinde 0.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | $\dots$ | $\sum = 0$ |
| 0 | 1 | $-1$ | 0 | 0 | $\dots$ | $\sum = 0$ |
| 0 | 0 | 1 | $-1$ | 0 | $\dots$ | $\sum = 0$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | $-1$ | $\dots$ | $\sum = 0$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\dots$ | $\sum = 0$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $\sum = 1$ | $\sum = 0$ | $\sum = 0$ | $\sum = 0$ | $\sum = 0$ | $\dots$ | $\sum = 1 \setminus 0$ |

Celkový součet po řádcích je 0, ale po sloupcích je 1!?

**Úloha 1.1.1** *V tabulce s nezápornými položkami tento paradox nenastane. Součet po řádcích i po sloupcích vyjde stejně, může ale být $+\infty$.*

Spočetnými součty zvanými řady se zabývají kapitoly 4–6.

## 1.2 Logické a množinové značení

**Úloha 1.2.1** *Umíte pojmenovat a napsat následující řecká písmena?*

$$\alpha,\ \beta,\ \Gamma,\ \gamma,\ \Delta,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \Theta,\ \theta,\ \vartheta,\ \iota,\ \kappa,\ \Lambda,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \Xi,\ \xi,\ o,\ \Pi,\ \pi,\ \rho,\ \Sigma,\ \sigma,$$

$$\tau,\ \Upsilon,\ \upsilon,\ \Phi,\ \phi,\ \varphi,\ \chi,\ \Psi,\ \psi,\ \Omega,\ \omega\ .$$

• *Logické značení.* $\varphi$, $\psi$, $\theta$, $\dots$ buďte výroky, tvrzení s jednoznačnou pravdivostní hodnotou buď pravda $P$, anebo nepravda $N$ (viz [134, kap. 2]). Spojujeme je logickými spojkami $\varphi \vee \psi$ (nebo, disjunkce), $\varphi \wedge \psi$ (a (zároveň), konjunkce), $\varphi \Rightarrow \psi$ (z – plyne –, implikace), $\varphi \iff \psi$ (ekvivalence) a $\neg\varphi$ (zápor, negace). Použití těchto spojek je dobře známé. Vrátíme se k nim v oddílu 2.11. Například pro každou kombinaci pravdivostních hodnot výroků $\varphi$ a $\psi$ oba výroky

$$\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi \ \text{ a } \ \neg(\varphi \wedge \psi) \iff \neg\varphi \vee \neg\psi$$

platí, mají vždy pravdivostní hodnotu $P$. Jsou to tedy takzvané tautologie. V zápisu složených výroků jsou důležité závorky a vazebná síla spojek. Podle konvence $\neg$ váže silněji než $\vee$ a $\wedge$, a ty zase silněji než $\Rightarrow$ a $\iff$. Odpovídající závorky tak lze vynechat.

**Úloha 1.2.2** *Dokažte, že* $(\varphi \Rightarrow \psi) \iff (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ *je tautologie.*

Nechť tvrzení $\varphi(x)$ je výroková forma s proměnnou $x$. Po nahrazení každého výskytu proměnné $x$ libovolným, ale vždy týmž, prvkem $a$ z oboru formy dostaneme výrok $\varphi(a)$. Obor výrokové formy $\varphi(x)$ je jí přiřazený soubor objektů $a$, pro které lze rozhodnout, zda výrok $\varphi(a)$ platí. V zápisech

$$\forall\, x\,\big(\varphi(x)\big) \;\text{ a }\; \exists\, x\,\big(\varphi(x)\big)$$

je použitý obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$. Znamenají po řadě, že pro každý prvek $a$ z oboru formy je výrok $\varphi(a)$ pravdivý a že v oboru formy existuje prvek $a$, že výrok $\varphi(a)$ je pravdivý.

**Úloha 1.2.3** *Pro každou výrokovou formu* $\varphi(x)$ *jsou oba výroky*

$$\neg\exists\, x\,\big(\varphi(x)\big) \iff \forall\, x\,\big(\neg\varphi(x)\big) \;\; a \;\; \neg\forall\, x\,\big(\varphi(x)\big) \iff \exists\, x\,\big(\neg\varphi(x)\big)$$

*pravdivé.*

Pravdu a pravdivost probereme v oddílu 2.12. Obecný kvantifikátor $\forall$ se často vynechává a rozumí se implicitně. Například v oboru přirozených čísel zápis $m + n = n + m$ znamená, že $\forall\, m\,\big(\forall\, n\,\big(m + n = n + m\big)\big)$.

• *Zápis množiny výčtem prvků.* Množinu chápeme jako jasně vymezený soubor jiných množin, které jsou jejími prvky. Symbol $\emptyset$ označuje prázdnou množinu. Je to množina bez prvků, takže žádná množina není jejím prvkem. Značení $x \in A$ (resp. $x \notin A$) říká, že množina $x$ je (resp. není) prvkem množiny $A$. Konečnou množinu lze vždy, alespoň teoreticky, zapsat výčtem jejích prvků.

**Definice 1.2.4 (výčet prvků)** *Zápis neprázdné množiny* $M$ *výčtem prvků je zápis ve tvaru*

$$M = \{p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n\}\,,$$

*kde* $n = 1, 2, \ldots$ *je přirozené číslo a* $p_i$ *jsou všechny množiny, které jsou prvky množiny* $M$*. Množiny* $p_i$ *se mohou opakovat. Prázdnou množinu zapisujeme symbolem* $\emptyset$*.*

Máme tak například množinu $\{3, 1, 5\} = \{1, 5, 3, 5, 5\}$ se třemi (různými) prvky, přirozenými čísly 1, 3 a 5. Později uvidíme, jak se přirozená čísla vyjádří jako množiny. Nebo máme množinu

$$M = \{a,\, b,\, 2,\, b,\, \{\emptyset,\, \{\emptyset\}\},\, \{a\}\}\,.$$

**Úloha 1.2.5** *Kolik má* $M$ *prvků?*

• *Dědičně konečné množiny.* Situace se zápisem konečné množiny výčtem prvků ale není tak jednoduchá, jak se obvykle podává. Pro přesné zapsání množiny výčtem prvků nestačí její konečnost. Konečný musí být i každý její prvek, stejně jako každý prvek jejího prvku, atd. Například množina $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ není

přesně zapsána, dokud neumíme rozhodnout, které rovnosti $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ a $x_2 = x_3$ platí. Jinak nevíme, kolik má $X$ prvků. Množinová rovnost $x = y$ se v naivní teorii množin dá rozhodnout jen axiomem extenzionality. Podle něj se dvě množiny rovnají, právě když mají stejné prvky. Abychom tyto prvky dokázali (v našem zápisu) všechny projít, musí jich být jen konečně mnoho. Jsme tak vedeni k následující definici. V ní konečnost zatím chápeme intuitivně, přesně ji definujeme později.

**Definice 1.2.6 (dědičná konečnost)** *Množina $x$ je <u>dědičně konečná</u>, pokud pro každé $n = 0, 1, 2, \dots$ a pro každý řetězec množin*

$$x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_0 = x$$

*je množina $x_n$ konečná.*

Příkladem dědičně konečné množiny je číslo čtyři v množinovém tvaru:

$$4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\,.$$

Jiná dědičně konečná množina je $\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}$. Axiom fundovanosti, uvedený v oddílu 2.1, zaručuje, že každý řetězec množin $x_0 \ni x_1 \ni \dots$ je konečný.

**Úloha 1.2.7** *Nechť $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n$ je maximální řetězec množin do sebe vnořených vzhledem k náležení, který se už nedá prodloužit. Čemu se rovná množina $x_n$?*

V oddílu 2.1 ukážeme, že množina se dá zapsat takzvaným úplným výčtem prvků, právě když je dědičně konečná.

• *Zápis množiny vlastností prvků.* Množinu také můžeme definovat nějakou vlastností jejích prvků.

**Definice 1.2.8 (zápis vlastností)** *Zápis množiny $M$ <u>pomocí vlastnosti</u> jejích prvků je zápis ve tvaru*

$$M = \{x \in N :\ \varphi(x)\} \ \textit{nebo}\ M = \{x :\ \varphi(x)\}\,,$$

*kde $N$ je již definovaná množina a $\varphi(x)$ je výroková forma. Množina $M$ tedy sestává z těch množin $x$ ležících v $N$, že $\varphi(x)$ je pravda, resp. z těch množin $x$ ležících v oboru formy $\varphi(x)$, že $\varphi(x)$ je pravda.*

Předpokládá se, že každý prvek množiny $N$ je prvkem oboru formy $\varphi(x)$. Nechť $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel a $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ jsou nezáporná celá čísla. Například množina

$$M = \{n \in \mathbb{N} :\ \exists\, m \in \mathbb{N}\,\big(n = 2 \cdot m\big)\}$$

sestává ze všech sudých přirozených čísel. Jak jsme ale definovali $\mathbb{N}$? K tomu se vrátíme v oddílu 2.1.

**Úloha 1.2.9** *Definujte takto množinu prvočísel* $\mathbb{P}$.

Čtenářka asi ví, že definice množiny ve tvaru $M = \{x : \ \varphi(x)\}$ je obecně problém. Ne každá výroková forma $\varphi(x)$ má totiž jasně definovaný obor. V definici $M = \{x \in N : \ \varphi(x)\}$ už máme definovanou množinu $N$ a vlastně ji postulujeme jako obor formy $\varphi(x)$. V definici $M = \{x : \ \varphi(x)\}$ ale množiny $x$ bereme odkudkoli. To ale, jak gteď připomeneme, je obecně sporné.

• *Russelův paradox.* B. Russel, o němž píšeme v oddílu C.1, poukázal na to, že definice množiny

$$M = \{x : \ x \notin x\},$$

kde jako obor formy $x \notin x$ bereme všechny množiny $x$, vede ke sporu.

**Úloha 1.2.10** *Jak?*

• *Vztahy množin.* $A$ je <u>podmnožinou</u> $B$, $A \subset B$, pokud každé $x \in A$ je též prvkem $B$. Množiny $A$ a $B$ jsou <u>disjunktní</u>, pokud nemají společný prvek. Množiny $A$ a $B$ <u>se rovnají</u>, $A = B$, právě když $\forall x \big(x \in A \iff x \in B\big)$, toto je <u>axiom extenzionality</u>.

**Úloha 1.2.11** *Platí ekvivalence* $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$.

• *Operace s množinami.* Nechť $A$ a $B$ jsou množiny. Jejich <u>sjednocení</u> $A \cup B := \{x : \ x \in A \vee x \in B\}$ a <u>průnik</u> $A \cap B := \{x \in A : \ x \in B\}$. <u>Suma</u> (množiny $A$) $\bigcup A := \{x : \ \exists\, b \in A \big(x \in b\big)\}$. <u>Průnik</u> (množiny $A$) $\bigcap A := \{x : \ \forall\, b \in A \big(x \in b\big)\}$, ale jen pro $A \neq \emptyset$. <u>Rozdíl</u> $A \setminus B := \{x \in A : \ x \notin B\}$. <u>Potence</u> (množiny $A$) $\mathcal{P}(A) := \{X : \ X \subset A\}$. Jak víme díky pasáži o Russelově paradoxu, správné jsou jen definice průniku dvou množin a jejich rozdílu. Definice tvaru $X := \{x : \ \cdots\}$ není formálně přípustná, množina $x$ se nemůže brát odkudkoli, ale zase jen z nějaké jiné množiny. Jinak musíme množinu $X$ zavést, postulovat jako axiom. Tak se ve formalizované teorii množin zavádí sjednocení, suma a potence. Absolutní hodnota $|X|$ $(\in \mathbb{N}_0)$ označuje <u>počet prvků</u> konečné množiny $X$.

**Úloha 1.2.12** *Množiny $A$ a $B$ jsou disjunktní, právě když $A \cap B = \emptyset$.*

**Úloha 1.2.13** *Proč se v definici průniku množiny $A$ požaduje, že $A \neq \emptyset$?*

**Úloha 1.2.14** *Je pro dvě konečné množiny $A$ a $B$ vždy $|A \setminus B| = |A| - |B|$?*

**Úloha 1.2.15** *Co je $\mathcal{P}(\emptyset)$? Pro $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $|\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| =$?*

• *Dvojice a trojice.* Definice uspořádané dvojice dvou množin pochází od polského matematika K. Kuratowskiho, píšeme o něm v oddílu C.1.

**Definice 1.2.16 (dvojice)** *$A$ a $B$ buďte množiny. Množina*

$$(A,\, B) := \{\{B,\, A\},\, \{A\}\}$$

*je <u>(uspořádaná) dvojice</u> množin $A$ a $B$.*

**Úloha 1.2.17** *Pomocí axiomu extenzionality dokažte ekvivalenci*

$$(A, B) = (C, D) \iff A = C \wedge B = D\,.$$

Uspořádanou trojici množin $A$, $B$ a $C$ definujeme jako

$$(A,\, B,\, C) = \{(1,\, A),\, (2,\, B),\, (3,\, C)\}\,,$$

a nikoli jako $(A, (B, C))$ nebo $((A, B), C)$, jak se často uvádí (i v učebnicích teorie množin!). Při použití definice

$$(A,\, B,\, C) := (A,\, (B,\, C))$$

totiž není jasné, zda množina $(A, B, C)$ je uspořádaná trojice množin $A$, $B$ a $C$ nebo uspořádaná dvojice množin $A$ a $(B, C)$.

**Definice 1.2.18 (uspořádané $k$-tice)** *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť $A_1, \ldots, A_k$ jsou množiny. Jejich uspořádaná $k$-tice je množina*

$$(A_1,\, \ldots,\, A_k) = \{(1,\, A_1),\, (2,\, A_2),\, \ldots,\, (k,\, A_k)\}\,.$$

**Úloha 1.2.19** *Nechť $k, l \in \mathbb{N}$, $A = (A_1, \ldots, A_k)$ je uspořádaná $k$-tice, $B = (B_1, \ldots, B_l)$ je uspořádaná $l$-tice a $A = B$. Dokažte, že pak $k = l$ a pro každé $i = 1, \ldots, k$ se $A_i = B_i$.*

Standardní uspořádané $k$-tice definované iterováním dvojice, to jest

$$(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k) = (A_1,\, (A_2,\, (\ldots,\, (A_{k-1},\, A_k) \ldots)))\,,$$

vlastnost uvedenou v předchozí úloze pochopitelně nemají.

## 1.3 Funkce a relace

Funkce zavedeme množinově. Skládání funkcí zavedeme obecně, v souladu s definicí a používáním elementárních funkcí ve čtvrté přednášce.

• *Funkce a shodnost funkcí.* Pro dvě množiny $A$ a $B$ jejich kartézský součin je množina

$$A \times B = \{(a,\, b) :\ a \in A,\, b \in B\}\,.$$

Každá množina $C \subset A \times B$ pak je (binární) relace mezi $A$ a $B$. Místo náležení $(a, b) \in C$ píšeme $aCb$, např. $2 < 5$. Pokud $A = B$, máme relaci na množině $A$.

**Definice 1.3.1 (funkcionální relace)** *Relace $C \subset A \times B$ mezi množinami $A$ a $B$ je funkcionální, existuje-li pro každé $a \in A$ právě jedno $b \in B$, že $aCb$.*

**Definice 1.3.2 (funkce)** *Funkce (též zobrazení) $f$ z množiny $A$ do množiny $B$ je uspořádaná trojice $(A, B, f)$, kde $f$ je funkcionální relace mezi $A$ a $B$. Zapisujeme ji symbolem*

$$f\colon A \to B\,.$$

*Pro každé $a \in A$ označíme to jednoznačné $b \in B$, že $afb$, jako $f(a)$. Celou trojici $(A, B, f)$ často označujeme stručně, i když nepřesně, jako $f$, viz následující definice a úloha.*

Místo $f\colon A \to B$ píšeme i $A \ni a \mapsto f(a) \in B$. Množina $A$ je definiční obor funkce $f$ a $B$ je její obor hodnot. Definiční obor funkce $f$ označujeme symbolem $M(f)$. Prvek $b$ je hodnota funkce $f$ na jejím argumentu $a$. Matematická definice objektů nějakého druhu není úplná bez kritéria jejich shodnosti. To je popis situací, kdy dva objekty daného druhu považujeme za stejné, i když se jako množiny liší. Příkladem shodností jsou izomorfismy různých algebraických a kombinatorických struktur. Obvykle jde o relace ekvivalence (viz definice 1.3.16). Shodnost funkcí v našem pojetí definujeme následovně.

**Definice 1.3.3 (shodnost funkcí)** *Funkce $(A, B, f)$ a $(C, D, g)$ jsou shodné, to jest prakticky totožné, pokud $f = g$, to jest $f$ a $g$ se rovnají jako množiny uspořádaných dvojic.*

**Úloha 1.3.4** *Funkce $(A, B, f)$ a $(C, D, g)$ jsou shodné $\iff$ $A = C$ a $f = g$.*

Jinak řečeno, shodné funkce se mohou lišit jen v oborech hodnot.

Pro funkci $f\colon A \to B$ a množinu $C$ definujeme množiny

$$\begin{aligned} f[C] &= \{f(a) : a \in C \cap A\}\ (\subset B)\ \ldots \text{ obraz množiny } C \text{ funkcí } f \text{ a} \\ f^{-1}[C] &= \{a \in A : f(a) \in C\}\ (\subset A)\ \ldots \text{ vzor množiny } C \text{ funkcí } f\,. \end{aligned}$$

Ano, množina $C$ je zcela libovolná, to je posun proti minulým verzím.

**Úloha 1.3.5** *Je pravda, že $f^{-1}[f[C]] = C$ a že $f[f^{-1}[C]] = C$?*

• *Druhy funkcí.* Jak víme, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ a $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť $[0] = \emptyset$. Nechť $X$ je libovolná množina a $n \in \mathbb{N}_0$. Tři důležité druhy funkcí jsou posloupnosti, slova a operace.

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} \to X &\quad \ldots \quad \text{je posloupnost (v množině } X)\,, \\ u\colon [n] \to X &\quad \ldots \quad \text{je slovo (nad abecedou } X) \text{ a} \\ o\colon X \times X \to X &\quad \ldots \quad \text{je (binární) operace (na množině } X)\,. \end{aligned}$$

Pro posloupnost $a$ v $X$ místo $a(n)$ píšeme $a_n$ a označíme ji jako $(a_n) \subset X$. Slovo $u$ nad $X$ rozepíšeme jako $u_1 u_2 \ldots u_n$, kde $u_i = u(i)$, $i \in [n]$. Pro $n = 0$ máme prázdné slovo $u = \emptyset$. Hodnotu operace $o((a, b)) = c$ zapíšeme jako $a\,o\,b = c$, např. $1 + 1 = 2$. Funkci $o\colon X \to X$ nazveme unární operací (na množině $X$).

Funkce $f\colon X \to Y$ je

$$\begin{aligned}
\underline{\text{prostá (injektivní, injekce)}} &\overset{\text{def}}{\iff} f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \ , \\
\underline{\text{na (surjektivní, surjekce)}} &\overset{\text{def}}{\iff} f[X] = Y \ , \\
\underline{\text{bijekce (bijektivní)}} &\overset{\text{def}}{\iff} f \text{ je na a je prostá} \ , \\
\underline{\text{konstantní}} &\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, c \in Y\ \forall\, x \in X \big(f(x) = c\big) \text{ a} \\
\underline{\text{identická}} &\overset{\text{def}}{\iff} X \subset Y \wedge \forall\, x \in X \big(f(x) = x\big) \ .
\end{aligned}$$

Úžeji rozumíme <u>identickou</u> funkcí na $X$ funkci $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$.

**Úloha 1.3.6** *Kdy je identická funkce $f\colon X \to Y$ bijekce?*

**Úloha 1.3.7** *Je pravda, že když jsou dvě funkce shodné ve smyslu definice 1.3.3, pak současně jsou, resp. nejsou, injektivní? Stejná otázka pro surjektivitu, bijektivnost, konstantnost a identičnost.*

• *Operace na funkcích.* Zavedeme tři operace na funkcích. Jsou motivovány elementárními funkcemi ve čtvrté přednášce. První z nich je unární. Nechť $f\colon X \to Y$ je prostá funkce. Její <u>inverzní funkce (inverz)</u> $f^{-1}$ je funkce

$$f^{-1}\colon f[X] \to X, \text{ kde } f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \ .$$

Obecněji i každou funkci $g\colon f[X] \to Y$ pro $Y \supset X$ danou tímto předpisem, považujeme za inverzní k $f$. Nakonec $g$ je shodná s $f^{-1}$.

**Úloha 1.3.8** *Značení $f^{-1}[A]$ má dva významy, vzor množiny $A$ zobrazením $f$ a obraz množiny $A$ inverzem $f^{-1}$. Nemohly by být v rozporu?*

**Úloha 1.3.9** *Nechť $f$ je injekce. Rozhodněte, zda funkce $f$ a $(f^{-1})^{-1}$ jsou shodné a zda se množinově rovnají (jako uspořádané trojice). Táž otázka pro funkce $f^{-1}$ a $((f^{-1})^{-1})^{-1}$.*

Operace skládání funkcí je binární. Pro funkce $g\colon X \to Y$ a $f\colon A \to B$ jejich <u>složená funkce (složenina)</u> $f \circ g = f(g)\colon X' \to B$ má pro každé $x \in X'$ hodnotu $f(g)(x) = f(g(x))$, přičemž

$$X' = \{x \in X :\ g(x) \in A\}\ (= g^{-1}[A] \subset X) \ .$$

V $f(g)$ mluvíme o $g$ jako o <u>vnitřní funkci</u> a o $f$ jako o <u>vnější funkci</u>.

**Úloha 1.3.10** *Nechť funkce $f_1$ a $f_2$, resp. $g_1$ a $g_2$, jsou shodné podle definice 1.3.3. Je pravda, že i funkce $f_1(g_1)$ a $f_2(g_2)$ jsou shodné?*

Konečně třetí operace na funkcích je vlastně systém unárních operací. Pro zobrazení $f\colon X \to Y$ a libovolnou množinu $Z$ definujeme zúžení (restrikci) funkce $f$ na $Z$ jako funkci $f \mid Z\colon X \cap Z \to Y$, která má pro každé $x \in X \cap Z$ hodnotu

$$(f \mid Z)(x) = f(x)\,.$$

O $f$ pak mluvíme i jako o rozšíření funkce $f \mid Z$. Je celkem jasné, že když $f_1$ a $f_2$ jsou shodné funkce s definičním oborem $X$ a množiny $Z_1$ a $Z_2$ splňují, že $X \cap Z_1 = X \cap Z_2$, pak i restrikce $f_1 \mid Z_1$ a $f_2 \mid Z_2$ jsou shodné.

**Úloha 1.3.11** *Ukažte, že složenina dvou injekcí je injekce a že složenina $f(g)$ surjekcí $g\colon X \to Y$ a $f\colon Y \to B$ je surjekce. Obecně ale složenina dvou surjekcí není surjekce.*

**Úloha 1.3.12** *Pro každé tři funkce $f$, $g$ a $h$ se $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.*

**Úloha 1.3.13** *Ukažte, že pro libovolné zobrazení $h\colon X \to Z$ existují množina $Y$ a funkce $g\colon X \to Y$ a $f\colon Y \to Z$, že $h = f \circ g$, $g$ je na a $f$ je prostá.*

**Úloha 1.3.14** *Dokažte, že funkce $f\colon X \to Y$ je bijekce, právě když existuje funkce $g\colon Y \to X$, že $f(g)$ je $\mathrm{id}_Y$ a $g(f)$ je $\mathrm{id}_X$.*

**Úloha 1.3.15** *Kdy lze invertovat konstantní funkci?*

• *Relace ekvivalence.* Relaci $R \subset A \times A$ na množině $A$ nazveme reflexivní (resp. ireflexivní), když vždy $aRa$ (resp. nikdy $aRa$). $R$ je symetrická, když vždy z $aRb$ plyne, že $bRa$. Je tranzitivní, když vždy z $aRb$ a $bRc$ plyne, že $aRc$.

**Definice 1.3.16 (relace ekvivalence)** *Relace ekvivalence je taková relace na množině, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

**Definice 1.3.17 (rozklady)** *Množina $A$ je rozklad množiny $B$, pokud prvky množiny $A$ jsou neprázdné, po dvou disjunktní a $\bigcup A = B$. Prvky v $A$ se často nazývají bloky (rozkladu $A$).*

Pro relaci ekvivalence $R$ na množině $A$ definujeme množiny

$$[a]_R = \{b \in A :\ bRa\}\ (\subset A),\ \ a \in A\,.$$

Říkáme jim bloky (relace $R$). Je jasné, že když $aRb$, pak $[a]_R = [b]_R$. Pro relaci ekvivalence $R$ na množině $A$ definujeme množinu

$$A/R = \{[a]_R :\ a \in A\}\,.$$

**Úloha 1.3.18** *Je-li $R$ relace ekvivalence na $A$, pak $A/R$ je rozklad množiny $A$. Dále platí, že $b, c \in A$ leží v jednom bloku tohoto rozkladu, právě když $bRc$.*

Pro rozklad $X$ množiny $Y$ definujeme relaci $Y/X = R$ na $Y$ jako

$$xRy \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, Z \in X \left(x,\, y \in Z\right) .$$

**Úloha 1.3.19** *Je-li $X$ rozkladem množiny $Y$, pak $Y/X$ je relace ekvivalence na množině $Y$. Dále platí, že $x, y \in Y$ leží v jednom bloku rozkladu $X$, právě když $x(Y/X)y$.*

**Úloha 1.3.20** *Je-li $R$ relace ekvivalence na $A$ a $B$ je rozklad množiny $A$, pak*

$$A/(A/R) = R \;\; a \;\; A/(A/B) = B \; .$$

## 1.4 Suprema a infima

Relace $R$ na množině $A$ je trichotomická, pokud pro každé $a, b \in A$ platí, že $aRb$ nebo $bRa$ nebo $a = b$.

• *Lineární uspořádání* představují základní matematickou strukturu.

**Definice 1.4.1 (lineární uspořádání)** *Lineární uspořádání (zkratka* LU*) je ireflexivní, tranzitivní a trichotomická relace na množině.*

Lineární uspořádání na množině $A$ označujeme jako $(A, <)$. Pro $a, b \in A$ pak značení $a \leq b$ znamená, že $a < b$ nebo $a = b$, a značení $a > b$ znamená, že $b < a$. Podobně pro $a \geq b$. Relace $<$ a $>$ jsou „ostré“, $\leq$ a $\geq$ jsou „neostré“.

**Úloha 1.4.2** *Relace $\leq$ a $\geq$ jsou reflexivní, tranzitivní a trichotomické.*

**Úloha 1.4.3** *Dokažte, že v lineárním uspořádání $(A, <)$ pro každé dva prvky $a, b \in A$ vždy nastává právě jedna z možností $a < b$, $b < a$, $a = b$.*

• *Suprema a infima.* Nechť $(A, <)$ je LU a $B \subset A$. Množina $B$ je shora omezená, když existuje $h \in A$, že pro každé $b \in B$ je $b \leq h$. Prvek $h$ pak je horní mez množiny $B$. Množinu horních mezí množiny $B$ označíme jako $H(B)$ $(\subset A)$. Podobně definujeme omezenost zdola, dolní meze a množinu $D(B)$ $(\subset A)$ dolních mezí množiny $B$. Prvek $m \in B$ je maximum (největší prvek) množiny $B$, když je horní mezí množiny $B$. Podobně se definuje minimum (nejmenší prvek) množiny $B$. Tyto prvky značíme $\max(B)$ a $\min(B)$. Pro $B = \emptyset$ nejsou definované.

**Úloha 1.4.4** *Ukažte, že maxima a minima jsou jednoznačná.*

**Úloha 1.4.5** *Každá neprázdná konečná podmnožina lineárního uspořádání má maximum i minimum.*

V teorii reálných čísel hrají základní roli suprema a infima jejich množin.

**Definice 1.4.6 (sup a inf)** *Nechť* $(A, <)$ *je* LU *a* $B \subset A$. *Prvky*

$$\sup(B) = \min(H(B)) \ (\in A) \ \ a \ \ \inf(B) = \max(D(B)) \ (\in A)\,,$$

*pokud existují, nazveme po řadě* <u>*supremem*</u> *a* <u>*infimem*</u> *množiny* $B$.

Na rozdíl od maxima a minima nemusí supremum ani infimum v dané množině ležet. Třeba pro $(A, <) = (\mathbb{R}, <)$ s obvyklým lineárním uspořádáním reálných čísel ($(\mathbb{R}, <)$ definujeme později, zde předpokládáme jejich intuitivní znalost), $B = [0, 1)$ a $B' = [0, 1]$, se $\sup(B) = \sup(B') = 1$.

**Úloha 1.4.7** *Suprema a infima jsou jednoznačná.*

**Úloha 1.4.8** *Dokažte následující tvrzení. Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro infima.*

**Tvrzení 1.4.9 (aproximace suprem)** *Nechť* $(A, <)$ *je* LU, $B \subset A$ *a* $c \in A$. <u>*Pak*</u> $c = \sup(B) \iff$ *pro každé* $b \in B$ *je* $b \leq c$ *a pro každé* $a \in A$ *s* $a < c$ *existuje* $b \in B$, *že* $a < b$.

Prvek $\sup(B)$ tak lze zezdola aproximovat libovolně těsně prvky množiny $B$.

## 1.5 Racionální čísla

Reálná čísla jsou vybudována ze zlomků, které teď připomeneme. Konstrukce přirozených a celých čísel přeskočíme a vrátíme se k nim v oddílech 2.2 a 2.3.

• *Racionální čísla neboli zlomky.* Nechť

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

jsou <u>celá čísla</u>, s obvyklými operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$, s obvyklými neutrálními prvky 0 a 1 a s obvyklým lineárním uspořádáním $<$. Položíme

$$Z = \left\{ \tfrac{m}{n} : \ m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}\,,$$

kde $\frac{m}{n}$ označuje uspořádanou dvojici $(m, n)$. Prvky množiny $Z$ jsou takzvané <u>protozlomky</u>. Relaci <u>shodnosti $\sim$</u> na $Z$ definujeme vztahem

$$\frac{k}{l} \sim \frac{m}{n} \overset{\text{def}}{\iff} kn = lm\,.$$

**Úloha 1.5.1** *Dokažte, že* $\sim$ *je relace ekvivalence na* $Z$.

**Definice 1.5.2 (racionální čísla)** *Nechť* $\mathbb{Q} := Z/\!\sim$. *Blokům* $[\frac{m}{n}]_\sim \in \mathbb{Q}$ *říkáme* <u>*racionální čísla*</u> *či* <u>*zlomky*</u>. *Často je zapisujeme jednoduše jako* $\frac{m}{n}$ *nebo* $m/n$.

Díky vnoření $\mathbb{Z} \ni m \mapsto [\frac{m}{1}]_\sim \in \mathbb{Q}$ pohlížíme na celá čísla jako na podmnožinu zlomků.

Pro následující úlohu připomínáme, že čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ jsou <u>nesoudělná</u>, když jejich jediné společné dělitele jsou $-1$ a 1. Protozlomek $\frac{m}{n}$ je v <u>základním tvaru</u>, když $n > 0$ a čísla $m$ a $n$ jsou nesoudělná. Množinu takových protozlomků označíme jako $Z_{\mathrm{z}}$ ($\subset Z$).

**Úloha 1.5.3 (reprezentanti zlomků)** *Existuje právě jedna taková bijekce*

$$f\colon \mathbb{Q} \to Z_{\mathrm{z}}\,,$$

*že vždy je* $f([m/n]_\sim) \in [m/n]_\sim$.

Zlomky tedy mají (kanonický) systém různých reprezentantů v podobě protozlomků v základním tvaru.

- *Uspořádaná tělesa.* Začneme definicí těles.

**Definice 1.5.4 (tělesa)** *<u>Těleso</u> $X_{\mathrm{T}}$ je algebraická struktura*

$$X_{\mathrm{T}} = (X,\, 0_X,\, 1_X,\, +,\, \cdot)\,,$$

*kde $X$ je množina, $0_X, 1_X \in X$ jsou dva různé prvky, $+, \cdot\colon X^2 \to X$ jsou dvě operace na $X$ („sčítání“ a „násobení“) a v níž pro každé $\alpha, \beta, \gamma \in X$ platí následující axiomy. Jednak $\alpha + 0_X = \alpha \cdot 1_X = \alpha$, prvky $0_X$ a $1_X$ jsou tedy neutrální k příslušným operacím. Dále platí*

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad &\ldots \quad \textit{komutativita operace } +\,,\\
\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad &\ldots \quad \textit{komutativita operace } \cdot\,,\\
(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad &\ldots \quad \textit{asociativita operace } +\,,\\
(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad &\ldots \quad \textit{asociativita operace } \cdot \textit{ a}\\
\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma) \quad &\ldots \quad \textit{distributivita } \cdot \textit{ vzhledem k } +\,.
\end{aligned}$$

*Konečně platí, že*

$$\begin{aligned}
\forall\, \alpha\, \exists\, \beta\, \big(\alpha + \beta = 0_X\big) \quad &\ldots \quad \textit{existence aditivních inverzů a}\\
\forall\, \alpha \neq 0_X\, \exists\, \gamma\, \big(\alpha \cdot \gamma = 1_T\big) \quad &\ldots \quad \textit{existence multiplikativních inverzů}\,.
\end{aligned}$$

*Aditivní inverz $\beta$ značíme jako $-\alpha$ a multiplikativní inverz $\gamma$ jako $\frac{1}{\alpha}$ nebo $1/\alpha$ nebo $\alpha^{-1}$.*

<u>Okruh</u> je algebraická struktura $R_{\mathrm{O}} = (R, 0_R, 1_R, +, \cdot)$ splňující všechny axiomy tělesa, s možnou výjimkou posledního (multiplikativní inverzy nemusí v $R_{\mathrm{O}}$ existovat). Například celá čísla $\mathbb{Z}$ tvoří okruh.

**Úloha 1.5.5** *V každém tělese je aditivní i multiplikativní neutrální prvek jednoznačně určený. Totéž platí pro aditivní i multiplikativní inverzy.*

**Úloha 1.5.6** *Popište nejmenší možné dvouprvkové těleso.*

**Definice 1.5.7 (uspořádaná tělesa)** *Uspořádané těleso je algebraická struktura $T_{\mathrm{UT}} = (T, 0_T, 1_T, +, \cdot, <)$, kde $(T, 0_T, 1_T, +, \cdot)$ je těleso, $(T, <)$ je* LU *a kde pro každé $\alpha, \beta, \gamma \in T$ platí dva axiomy uspořádání, totiž*

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma \quad &\ldots \quad \textit{souhra operace } + \textit{ a relace } < \textit{ a} \\ \alpha > 0_T \wedge \beta > 0_T \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0_T \quad &\ldots \quad \textit{souhra operace } \cdot \textit{ a relace } < . \end{aligned}$$

**Úloha 1.5.8** *Každé uspořádané těleso je nekonečné.*

Následující tvrzení dokážeme v oddílu 2.4. Tam připomeneme aritmetiku zlomků, která je čtenářce jistě dobře známa. Připomínáme, že $\sim$ je relace shodnosti protozlomků.

**Tvrzení 1.5.9 (o $\mathbb{Q}$)** *$\mathbb{Q}$ spolu se svými prvky $0_{\mathbb{Q}} = [\frac{0}{1}]_\sim$ a $1_{\mathbb{Q}} = [\frac{1}{1}]_\sim$, obvyklými operacemi $+$ a $\cdot$ a obvyklým lineárním uspořádáním $<$ tvoří uspořádané těleso.*

**Úloha 1.5.10** *$\frac{0}{1} \not\sim \frac{1}{1}$, takže $0_{\mathbb{Q}} \neq 1_{\mathbb{Q}}$.*

Místo $0_{\mathbb{Q}}$ a $1_{\mathbb{Q}}$ většinou píšeme stručně jen 0 a 1.

• *Neúplnost zlomků.* Zlomky ale postrádají důležitou vlastnost úplnosti, kterou mají reálná čísla. Kvůli ní se reálná čísla definují.

**Definice 1.5.11 (úplnost)** *Lineární uspořádání je úplné, má-li každá jeho neprázdná a shora omezená podmnožina supremum.*

**Úloha 1.5.12** *Co je supremem prázdné množiny? Co je supremem shora neomezené podmnožiny?*

**Úloha 1.5.13** *Dokažte, že v úplném uspořádaném tělese každá neprázdná a zdola omezená podmnožina má infimum.*

**Úloha 1.5.14 (archimedovskost)** *Dokažte, že úplné uspořádané těleso $T_{\mathrm{UT}}$ je archimedovské, každý prvek $x \in T$ má horní mez tvaru*

$$x \leq 1_T + 1_T + \cdots + 1_T \ .$$

O Archimédovi je více v oddílu C.1.

Z následující věty plyne, že lineární uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ není úplné. V jejím důkazu použijeme axiom indukce. V oddílu 2.2 uvidíme, že axiom indukce plyne ze základnějších množinových axiomů.

**Axiom 1.5.15 (axiom indukce)** *Každá neprázdná množina $B \subset \mathbb{N}$ má ve standardním lineárním uspořádání $(\mathbb{N}, <)$ minimum.*

**Věta 1.5.16 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)** *Rovnice $x^2 = 2$ nemá v oboru zlomků řešení.*

**Důkaz.** Sporem. Nechť pro $a, b \in \mathbb{N}$ se $(a/b)^2 = 2$. Tedy $a^2 = 2b^2$, takže $a, b$ je řešení rovnice $x^2 = 2y^2$. Podle axiomu indukce lze vzít minimální $a$. Číslo $a^2$ je sudé, tedy i $a$ je sudé a $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$(2c)^2 = 2b^2 \rightsquigarrow 4c^2 = 2b^2 \rightsquigarrow b^2 = 2c^2 \ .$$

Dostali jsme nové řešení $b, c \in \mathbb{N}$ rovnice $x^2 = 2y^2$. Ale $b < a$, ve sporu s minimalitou řešení $a, b$. □

**Úloha 1.5.17** *Proč je $b < a$ ? Proč je číslo $a$ sudé? Neměli jsme na začátku důkazu psát spíš $a \in \mathbb{Z}$ & $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?*

**Důsledek 1.5.18 (neúplnost $\mathbb{Q}$)** LU $(\mathbb{Q}, <)$ *není úplné. Například množina $X = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2\}$ ($\subset \mathbb{Q}$) je neprázdná a shora omezená, ale nemá supremum.*

**Důkaz.** První dvě vlastnosti množiny $X$ jsou jasné, $1 \in X$ a $x < 2$ pro každé $x \in X$. Pro spor nechť $s = \sup(X) \in \mathbb{Q}$. Patrně $s > 0$. Když $s^2 > 2$, existuje zlomek $r$, že $0 < r < s$ a $(s - r)^2 > 2$. Pak ale pro každé $x \in X$ je $s - r > x$. To je spor s tím, že $s$ je nejmenší horní mez množiny $X$. Když $s^2 < 2$, existuje zlomek $r > 0$, že $(s + r)^2 < 2$. Tedy $s + r \in X$ a máme spor s tím, že $s$ je horní mez množiny $X$. Podle trichotomie musí být $s^2 = 2$. To podle předchozí věty není možné. □

**Úloha 1.5.19** *Pro zlomky $r$ uveďte nějaké konkrétní hodnoty. Pochopitelně závisejí na zlomku $s$.*

## 1.6 Cantorova reálná čísla

Uvedeme Cantorovou definici reálných čísel. V ní reálné číslo je blok Cauchyových posloupností zlomků. Každý tento blok je ale nespočetná množina. V oddílu 2.5 popíšeme Dedekindovu konstrukci reálných čísel, v níž každé reálné číslo je dědičně nejvýše spočetná množina. O G. Cantorovi, A.-L. Cauchym a R. Dedekindovi píšeme v oddílu C.1.

• *Reálná čísla.* Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ je <u>Cauchyova</u>, když pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq 1/k \ .$$

Budeme pracovat s množinou

$$C = \{(a_n) : \ (a_n) \subset \mathbb{Q} \text{ a je Cauchyova}\} \ .$$

Podobně jako na $Z$ i na množině $C$ definujeme relaci ekvivalence <u>shodnosti $\sim$</u>. Položíme $(a_n) \sim (b_n)$, právě když pro každé $k$ existuje $n_0$, že

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| \leq 1/k \ .$$

**Úloha 1.6.1** *Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence na $C$.*

**Úloha 1.6.2** *Dokažte, že $(a_n)$ a $(b_n)$ v $C$ jsou shodné, právě když pro každé $k$ existuje $n_0$, že*

$$m,\, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - b_n| \leq 1/k\ .$$

**Definice 1.6.3 (Cantorovo $\mathbb{R}$)** *Položíme $\mathbb{R} = C/\sim$. Tuto množinu bloků relace ekvivalence $\sim$ na $C$ nazveme <u>množinou reálných čísel</u>.*

• *Aritmetika reálných čísel.* Reálná čísla <u>nula</u> a <u>jednička</u> jsou $0_{\mathbb{R}} = [(0, 0, \dots)]_\sim$ a $1_{\mathbb{R}} = [(1, 1, \dots)]_\sim$. <u>Součet</u> a <u>součin</u> reálných čísel $[(a_n)]_\sim$ a $[(b_n)]_\sim$ je

$$[(a_n)]_\sim + [(b_n)]_\sim = [(a_n + b_n)]_\sim \ \text{ a } \ [(a_n)]_\sim \cdot [(b_n)]_\sim = [(a_n \cdot b_n)]_\sim\ .$$

<u>Uspořádání</u> na $\mathbb{R}$ definujeme tak, že $[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim$, právě když existují čísla $k$ a $n_0$, že

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n - 1/k\ .$$

V následujících třech tvrzeních dokážeme korektnost těchto definic. Zřejmě $(0, 0, \dots) \in C$ a $(1, 1, \dots) \in C$, tudíž $0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$.

**Tvrzení 1.6.4 (korektnost + a · poprvé)** *Nechť $(a_n)$ a $(b_n)$ jsou v $C$. <u>Pak</u> také $(a_n + b_n)$ a $(a_n b_n)$ jsou v $C$.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n), (b_n) \in C$ a je dáno $k$. Pro každé velké $m$ a $n$ je $|a_m - a_n|, |b_m - b_n| \leq 1/2k$. Pro tatáž $m$ a $n$ tedy je

$$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| \leq 1/2k + 1/2k = 1/k$$

a $(a_n + b_n)$ je Cauchyova.

Protože Cauchyova posloupnost je omezená, existuje $l$, že pro každé $n$ je $|a_n|, |b_n| \leq l$. Pro každé velké $m$ a $n$ je $|a_m - a_n|, |b_m - b_n| \leq 1/2lk$. Pro tatáž $m$ a $n$ tedy je

$$|a_m b_m - a_n b_n| \leq |a_m| \cdot |b_m - b_n| + |b_n| \cdot |a_m - a_n| \leq l/2lk + l/2lk = 1/k$$

a $(a_n b_n)$ je Cauchyova. □

Součet a součin dvou reálných čísel je tedy reálné číslo.

**Tvrzení 1.6.5 (korektnost + a · podruhé)** *Nechť $(a_n)$, $(b_n)$ a $(c_n)$ jsou v $C$ a $(a_n) \sim (c_n)$. <u>Pak</u>*

$$(a_n + b_n) \sim (c_n + b_n) \ \text{ a } \ (a_n b_n) \sim (c_n b_n)\ .$$

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$, $(b_n)$ a $(c_n)$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $k$. Jako dříve vezmeme $l$, že pro každé $n$ je $|b_n| \leq l$. Pro každé velké $n$ je $|a_n - c_n| \leq 1/k$. Pro tato $n$ je

$$|(a_n + b_n) - (c_n + b_n)| = |a_n - c_n| \leq 1/k$$

a $(a_n + b_n) \sim (c_n + b_n)$. Pro každé velké $n$ je též $|a_n - c_n| \leq 1/lk$. Tedy

$$|a_n b_n - c_n b_n| = |a_n - c_n| \cdot |b_n| \leq l/lk = 1/k$$

a $(a_n b_n) \sim (c_n b_n)$. □

Odtud plyne, že pokud $(a_n)$, $(a'_n)$, $(b_n)$ a $(b'_n)$ jsou v $C$ a $(a_n) \sim (a'_n)$ a $(b_n) \sim (b'_n)$, pak

$$[(a_n + b_n)]_\sim = [(a'_n + b'_n)]_\sim \text{ a } [(a_n b_n)]_\sim = [(a'_n b'_n)]_\sim \,.$$

Součet ani součin v $\mathbb{R}$ tedy nezávisí na reprezentujících posloupnostech.

**Tvrzení 1.6.6 (korektnost uspořádání)** *Nechť $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$, $(d_n)$ jsou v $C$, $(a_n) \sim (c_n)$ a $(b_n) \sim (d_n)$. <u>Pak</u>*

$$[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(c_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(a_n)]_\sim < [(d_n)]_\sim \,.$$

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ a $(d_n)$ jsou, jak uvedeno. Nechť platí první srovnání, takže pro nějaké $k$ a každé velké $n$ je $a_n \leq b_n - 2/k$. Pro každé velké $n$ je také $|a_n - c_n| \leq 1/k$. Pro každé velké $n$ tak

$$c_n \leq a_n + 1/2k \leq b_n - 2/k + 1/k = b_n - 1/k$$

a $[(c_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim$. Nechť platí druhé srovnání, takže pro nějaké $k$ a každé velké $n$ je $c_n < b_n - 2/k$. Pak opět pro každé velké $n$

$$a_n \leq c_n + 1/k \leq b_n - 2/k + 1/k = b_n - 1/k$$

a $[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim$. Ekvivalence $[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(a_n)]_\sim < [(d_n)]_\sim$ se dokazuje podobně. □

Odtud plyne, že pokud $(a_n)$, $(a'_n)$, $(b_n)$ a $(b'_n)$ jsou v $C$ a $(a_n) \sim (a'_n)$ a $(b_n) \sim (b'_n)$, pak

$$[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(a'_n)]_\sim < [(b'_n)]_\sim \,.$$

Porovnání dvou reálných čísel tedy nezávisí na reprezentujících posloupnostech.

Aritmetiku reálných čísel tak máme korektně definovanou. Dokážeme, že v ní reálná čísla tvoří uspořádané těleso. Začneme tím, že tvoří okruh.

**Tvrzení 1.6.7 ($\mathbb{R}$ je okruh)** $\mathbb{R}_\mathrm{O} = (\mathbb{R}, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R}, +, \cdot)$ *je okruh.*

**Důkaz.** Odvodíme to z faktu, že $\mathbb{Q}_\mathrm{O} = (\mathbb{Q}, 0_\mathbb{Q}, 1_\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je okruh. Ten vezmeme teď jako daný, dokážeme ho v oddílu 2.4. Nechť $Q = \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ je množina všech posloupností $(a_n) \subset \mathbb{Q}$. Vezmeme algebraickou strukturu

$$Q_\mathrm{O} = (Q,\, 0_Q,\, 1_Q,\, +,\, \cdot)\,,$$

kde $0_Q = (0_\mathbb{Q}, 0_\mathbb{Q}, \dots)$, $1_Q = (1_\mathbb{Q}, 1_\mathbb{Q}, \dots)$ a součet a součin jsou definovány po složkách,

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \text{ a } (a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)\,.$$

Patrně $Q_{\mathrm{O}}$ je okruh — každá souřadnice je okruh $\mathbb{Q}_{\mathrm{O}}$ a splnění axiomů okruhu v každé souřadnici implikuje jejich splnění v $Q_{\mathrm{O}}$.

Ovšem $C \subset Q$ a výše jsme dokázali, že množina $C$ je uzavřená na konstantní operace $0_Q$ a $1_Q$ a na binární operace sčítání a násobení po složkách. Takže $C_{\mathrm{O}} = (C, 0_Q, 1_Q, +, \cdot)$ je podokruh okruhu $Q_{\mathrm{O}}$. Reálná čísla sebou nesou surjekci

$$F\colon C \to \mathbb{R}, \quad F(a_n) = F((a_n)) = [(a_n)]_\sim \ ,$$

v níž $F(a_n) = F(b_n)$, právě když $(a_n) \sim (b_n)$. Výše v tvrzeních 1.6.4 a 1.6.5 jsme dokázali, že operace $+$ a $\cdot$ v $C_{\mathrm{O}}$ se pomocí $F$ zvednou na operace v $\mathbb{R}_{\mathrm{O}}$. Axiomy okruhu se tím zachovají, takže $\mathbb{R}_{\mathrm{O}}$ tvoří okruh. □

$\mathbb{Q}_{\mathrm{O}}$ je těleso, ale ani $Q_{\mathrm{O}}$ ani $C_{\mathrm{O}}$ není těleso. Třeba rovnost

$$(0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots) \cdot (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots) = (0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots) = 0_Q \ ,$$

ukazuje, že v $C_{\mathrm{O}}$ součin dvou nenulových prvků může být nula. Teď ale dokážeme, že zvednutím násobení pomocí $F$ do $\mathbb{R}_{\mathrm{O}}$ dostaneme těleso, dokonce uspořádané.

**Věta 1.6.8 ($\mathbb{R}$ je UT)** *Výše definovaná algebraická struktura*

$$\mathbb{R}_{\mathrm{UT}} = (\mathbb{R},\, 0_{\mathbb{R}},\, 1_{\mathbb{R}},\, +,\, \cdot,\, <)$$

*je uspořádané těleso.*

**Důkaz.** Podle předchozího tvrzení je $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ okruh. Zbývá dokázat, že (i) v $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ existují multiplikativní inverzy, že (ii) $(\mathbb{R}, <)$ je LU a že (iii) v $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ platí oba axiomy uspořádání.

(i) Nechť $\alpha = [(a_n)]_\sim \in \mathbb{R}$ je nenulové číslo, takže $(a_n) \not\sim (0, 0, \dots)$. Tedy $|a_n| \geq 2/l$ pro nějaké $l$ a nekonečně mnoho $n$. Protože $(a_n) \in C$, je $|a_n| \geq 1/l$ pro každé velké $n$. Definujeme $b_n = 1/a_n$ pro $a_n \neq 0$ a $b_n = 0$ pro $a_n = 0$. Ukážeme, že $(b_n) \in C$. Pro dané $k$ pro každé velké $m$ a $n$ je $|a_m - a_n| \leq 1/l^2 k$. Pro každé velké $m$ a $n$ pak je

$$|b_m - b_n| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_m a_n|} \leq \frac{l^2}{l^2 k} = \frac{1}{k}$$

a $(b_n) \in C$. Položíme $\beta = [(b_n)]_\sim \in \mathbb{R}$ a dostaneme, že $\alpha \cdot \beta = 1_{\mathbb{R}}$, protože $(a_n b_n) \sim (1, 1, \dots)$. Tedy $\beta = \alpha^{-1}$.

(ii) Ireflexivita a tranzitivita relace $<$ jsou vidět hned. Dokážeme její trichotomii. Nechť $\alpha = [(a_n)]_\sim$ a $\beta = [(b_n)]_\sim$ jsou dvě různá reálná čísla. Tedy $(a_n) \not\sim (b_n)$ a například $a_n - b_n \geq 2/k$ pro nějaké $k$ a nekonečně mnoho $n$; druhá možnost s $a_n - b_n \leq -2/k$ se řeší podobně. Protože $(a_n), (b_n) \in C$, je $a_n - b_n \geq 1/k$ pro každé velké $n$. Tedy $b_n \leq a_n - 1/k$ pro tato $n$ a $\beta < \alpha$.

(iii) Nechť $\alpha = [(a_n)]_\sim$, $\beta = [(b_n)]_\sim$ a $\gamma = [(c_n)]_\sim$ jsou tři reálná čísla. Pokud $\alpha < \beta$, pak $a_n \leq b_n - 1/k$ pro nějaké $k$ a každé velké $n$. Pak i $a_n + c_n \leq b_n + c_n - 1/k$ pro tato $n$ a $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$. Pokud $0_{\mathbb{R}} < \alpha, \beta$, je $1/\sqrt{k} \leq a_n, b_n$ pro nějaké $k$ a každé velké $n$. Pak $1/k \leq a_n b_n$ pro tato $n$ a tedy $0_{\mathbb{R}} < \alpha\beta$. Oba axiomy uspořádání tak platí. □

$\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ v sobě přirozeným způsobem obsahuje $\mathbb{Q}_{\mathrm{UT}}$.

**Definice 1.6.9 (racionální reálná čísla)** *Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je <u>racionální</u>, pokud $\alpha = [(a, a, \dots)]_\sim$ pro nějaké $a \in \mathbb{Q}$. Číslo $[(a, a, \dots)]_\sim$ <u>označíme jako $\overline{a}$</u>.*

**Úloha 1.6.10** *Dokažte, že zobrazení $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(a) = \overline{a}$, je izomorfismus $\mathbb{Q}_{\mathrm{UT}}$ s uspořádaným podtělesem racionálních reálných čísel v $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$.*

Pokud tedy chceme pracovat se zlomkem $a$ jako s reálným číslem, chápeme ho jako racionální reálné číslo $\overline{a}$.

• *Princip neostrých nerovností.* V definicích a algebraických úpravách v UT $\mathbb{R}$ jsme se snažili a budeme se snažit systematicky používat, kdykoli to je možné, neostré nerovnosti $\leq$ a $\geq$ místo ostrých $<$ a $>$. Například výše v definici LU na $\mathbb{R}$ jsme místo $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n - 1/k$ napsali $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n - 1/k$. Důvodem naší preference neostrých nerovností je fakt, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ se nerovnost $x \leq y$ po vynásobení nezáporným reálným číslem $z \geq 0$ zachová, ale ostrá nerovnost $x < y$ se zachovat nemusí.

**Úloha 1.6.11** *Proč?*

Neostré nerovnosti jsou tedy „bezpečnější“ než ostré.

• *Úplnost reálných čísel.* Rozšířením zlomků do reálných čísel získáme úplnost. V příštím oddílu ale uvidíme, čím se za to platí. V důkazu úplnosti $\mathbb{R}$ použijeme následující zajímavý výsledek.

**Věta 1.6.12 (pravěta o limitě monotónní posloupnosti)** *Nechť $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq b$ jsou zlomky. <u>Pak</u> $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ a $b \in \mathbb{Q}$ jsou, jak uvedeno. Pro každé dva indexy $m \leq n$ pak je $0 \leq a_m - a_n \leq a_1 - b$. Kdyby $(a_n)$ nebyla Cauchyova, existovalo by $k$ a taková posloupnost přirozených čísel $m_0 < m_1 < \dots$, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $a_{m_i} - a_{m_{i-1}} \geq 1/k$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ s $n/k > a_1 - b$ pak dostáváme spor, že

$$a_{m_n} - a_{m_0} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (a_{m_i} - a_{m_{i-1}}) \geq \frac{n}{k} > a_1 - b\,.$$

□

Nerostoucí a zdola omezená posloupnost zlomků tak vždy definuje reálné číslo. Tato forma věty 3.3.3 o limitě monotónní posloupnosti (reálných čísel) funguje, i když ještě není dokázána úplnost $\mathbb{R}$. Dokonce pro ni ani nepotřebujeme $\mathbb{R}$.

**Úloha 1.6.13** *Zformulujte a dokažte tuto větu pro případ neklesající posloupnosti zlomků.*

Dokážeme úplnost $\mathbb{R}$.

**Věta 1.6.14 (úplnost $\mathbb{R}$)** *Lineární uspořádání $(\mathbb{R}, <)$ je úplné.*

**Důkaz.** Nechť množina $B \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Induktivně definujeme dvě posloupnosti racionálních reálných čísel $(\overline{a_n}), (\overline{b_n}) \subset \mathbb{R}$. Na začátku $\overline{a_1} \in \mathbb{R}$ je libovolná racionální horní mez množiny $B$ a $b_1 = \overline{1}$. Nechť $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$ a $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ jsou už definované. Je-li $\overline{a_n} - \overline{b_n}$ horní mez množiny $B$, položíme $\overline{a_{n+1}} = \overline{a_n} - \overline{b_n}$ a $\overline{b_{n+1}} = \overline{b_n}$. Pokud není horní mezí, takže $\beta > \overline{a_n} - \overline{b_n}$ pro nějaké $\beta \in B$, položíme $\overline{a_{n+1}} = \overline{a_n}$ a $\overline{b_{n+1}} = \overline{b_n}/\overline{2}$. Tuto proceduru opakujeme. Získaná posloupnost $(\overline{a_n})$ je nerostoucí a každý její člen je horní mez množiny $B$. Díky $B \neq \emptyset$ je $(\overline{a_n})$ zdola omezená. Tedy (úloha 1.6.10) $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ je nerostoucí a zdola omezená posloupnost. Podle věty 1.6.12 je $(a_n) \in C$. Ukážeme, že $\alpha = [(a_n)]_\sim = \sup(B)$.

Nechť $\alpha < \beta = [(c_n)]_\sim \in B$. Pak $a_n \leq c_n - 1/k$ pro nějaké $k$ a každé velké $n$. Protože $(c_n) \in C$, můžeme vzít $m$, že pro každé velké $n$ je $a_m \leq c_n - 1/2k$. Pak ale $\overline{a_m} < \beta$, což nelze ($\overline{a_n}$ jsou horní meze množiny $B$). Pro každé $\beta \in B$ je tedy $\alpha \geq \beta$ a $\alpha$ je horní mez množiny $B$. Nechť $\gamma \in \mathbb{R}$ s $\gamma < \alpha$. Díky $B \neq \emptyset$ se krok půlení $\overline{b_n}$ provede nekonečněkrát a tedy existují $m$ a $\beta \in B$, že $\beta > \overline{a_m} - \overline{b_m} \geq \alpha - (\alpha - \gamma) = \gamma$ a $\beta > \gamma$. Tedy $\alpha$ je nejmenší horní mez $B$. □

Podle úlohy 1.5.14 je uspořádané těleso $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ archimedovské. Z definice $(\mathbb{R}, <)$ to ale plyne přímo a jednodušeji, úplnost $\mathbb{R}$ se nepotřebuje.

**Důsledek 1.6.15 ($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$)** *Rovnice $x^2 = 2$ má v oboru reálných čísel řešení.*

**Důkaz.** Vezmeme množinu $X = \{a \in \mathbb{R} : \ a^2 < 2\}$. Podle věty 1.6.14 existuje supremum $s = \sup(X) \in \mathbb{R}$. Stejné argumenty jako v důkazu důsledku 1.5.18 ukazují, že nenastává ani $s^2 < 2$ ani $s^2 > 2$. Tedy $s^2 = 2$. □

Zobecníme to v následující větě, kterou dokážeme později v důsledku 8.3.7. Spojitost funkce znamená — později to definujeme přesně — že malá změna jejího argumentu způsobí malou změnu její hodnoty.

**Věta 1.6.16 (Bolzano–Cauchyova)** *Nechť $a \leq b$ jsou v $\mathbb{R}$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je taková spojitá funkce, že $f(a)f(b) \leq 0$. Potom existuje číslo $c \in [a, b]$, že $f(c) = 0$.*

O B. Bolzanovi píšeme více v oddílu C.1.

## 1.7 Spočetné a nespočetné množiny

Začneme definicí konečných a nekonečných množin.

• *Konečné a nekonečné množiny.* Množinu $\mathbb{N}$ přirozených čísel máme dánu a konečnost, resp. nekonečnost, množiny $X$ definujeme pomocí zobrazení z $\mathbb{N}$ do $X$.

**Definice 1.7.1 ((ne)konečnost)** *$X$ je <u>nekonečná</u> množina, existuje-li prostá funkce $f\colon \mathbb{N} \to X$. Když $X$ není nekonečná, je <u>konečná</u>.*

**Úloha 1.7.2** *Pro každou konečnou množinu $X$ existuje surjekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.*

**Úloha 1.7.3** *Pro každou konečnou $X$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a bijekce $f\colon [n] \to X$.*

• *Spočetné a nespočetné množiny.* Dostáváme se k velkým množinám.

**Definice 1.7.4 (nespočetné množiny)** *Definujeme následující množiny.*

1. *Množina $X$ je <u>spočetná</u>, když existuje bijekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.*
2. *Množina $X$ je <u>nejvýše spočetná</u>, je-li konečná nebo spočetná.*
3. *Množina $X$ je <u>nespočetná</u>, když není nejvýše spočetná.*

$\mathbb{N}$ je patrně spočetná množina. Existují ale nějaké nespočetné množiny? Už jsme prozradili, že každé reálné číslo $[(a_n)]_\sim$ je nespočetná množina. Za chvíli dokážeme, že i $\mathbb{R} = C/\sim$ je nespočetná množina.

**Věta 1.7.5 (spočetnost $\mathbb{Q}$)** *Množina zlomků $\mathbb{Q}$ je spočetná.*

**Důkaz.** Připomeňme si, že $Z_{\mathrm{z}}$ ($\subset Z$) jsou protozlomky $\frac{m}{n}$ v základním tvaru. Podle úlohy 1.5.3 stačí ukázat, že $Z_{\mathrm{z}}$ je spočetná. Pro $\frac{m}{n} \in Z_{\mathrm{z}}$ definujeme normu $\|\frac{m}{n}\| = |m| + n \in \mathbb{N}$ a seznamy

$$Z(j) = \big(z_{1,\,j} < z_{2,\,j} < \cdots < z_{k_j,\,j} :\ z_{i,\,j} \in Z_{\mathrm{z}},\ \|z_{i,\,j}\| = j\big),\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Například

$$Z(5) = \big(\tfrac{-4}{1} < \tfrac{-3}{2} < \tfrac{-2}{3} < \tfrac{-1}{4} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{2} < \tfrac{4}{1}\big) \ \text{ a } \ k_5 = 8\,.$$

Zde $\frac{0}{5} \notin Z(5)$, protože protozlomek $\frac{0}{5}$ není v základním tvaru. Patrně $j \neq j'$ $\Rightarrow Z(j) \cap Z(j') = \emptyset$, každá $Z(j)$ je konečná a neprázdná a $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z(j) = Z_{\mathrm{z}}$. Zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to Z_{\mathrm{z}}$ definujeme jako

$$f(1) = z_{1,\,1},\ f(2) = z_{2,\,1},\ \ldots,\ f(k_1) = z_{k_1,\,1},\ f(k_1+1) = z_{1,\,2},\ \ldots$$

— hodnoty funkce $f$ nejprve projdou $k_1$ seřazených protozlomků v $Z(1)$, pak $k_2$ seřazených protozlomků v $Z(2)$, a tak dál. Obecná hodnota je pro $j \in \mathbb{N}$ rovna

$$f(k_1 + k_2 + \cdots + k_{j-1} + i) = z_{i,\,j},\ i \in [k_j]\,,$$

kde pro $j = 1$ tento argument funkce $f$ definujeme jako $i$. Lehce se vidí, že $f$ je bijekce. □

**Úloha 1.7.6** *Dokažte, že množina $\mathbb{Z}$ celých čísel je spočetná.*

• *Cantorova věta.* Nespočetnost množiny $\mathbb{R}$ plyne ze základní věty o množinách pocházející od G. Cantora: potence $\mathcal{P}(X) = \{A :\ A \subset X\}$ je mnohem větší množina než $X$.

**Věta 1.7.7 (Cantorova)** *Neexistuje surjekce $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ z množiny na její potenci.*

**Důkaz.** Nechť $X$ je množina a $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ je libovolná funkce. Získáme z ní takovou množinu $Y$, že (i) $Y \subset X$ a (ii) $Y \notin f[X]$. Tedy $f$ není na. Položíme $Y = \{x \in X : \ x \notin f(x)\}$. Pak (i) jistě platí. Řekněme, že pro nějaké $y \in X$ se $f(y) = Y$. To vede ke sporu: pokud $y \in Y$, je $y \notin f(y) = Y$, a pokud $y \notin Y = f(y)$, je $y \in Y$. Takže platí i (ii). □

**Úloha 1.7.8** *Nechť $X = \emptyset$. Co je $Y$?*

**Úloha 1.7.9** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 1.7.10 (prostá Cantorova věta)** *Neexistuje injekce $f\colon \mathcal{P}(X) \to X$ z potence množiny do ní.*

Jako $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ označíme množinu (všech) posloupností $(a_n) \subset \{0,1\}$. Je to nespočetná množina.

**Důsledek 1.7.11 (o $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$)** *Neexistuje surjekce $f\colon \mathbb{N} \to \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$.*

**Důkaz.** Zobrazení $g\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g((a_n)) = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n = 1\}$, je patrně bijekce. Kdyby existovala uvedená surjekce $f$, složenina $g \circ f$ by byla funkce z $\mathbb{N}$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, což je v rozporu s větou 1.7.7. □

**Úloha 1.7.12** *Dokažte, že $g$ je bijekce.*

• *Rozvoje.* Reálná čísla v definici 1.6.3 jsou teoretická. Prakticky je zapisujeme jako „nekonečné“ desetinné rozvoje.

**Definice 1.7.13 (rozvoje)** *(Nekonečným desetinným) <u>rozvojem</u> $\rho$ rozumíme každou takovou posloupnost*

$$\rho = a_n\, a_{n-1}\, \dots\, a_0\, .\, a_{-1}\, a_{-2}\, \dots\ ,$$

*kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \{+,-\}$, pro každé $m \le n-1$ je $a_m \in \{0,1,\dots,9\}$ a když $a_{n-1} = 0$, pak $n = 1$.*

Například v rozvoji čísla $\pi = 3.1415\dots$ je $n = 1$, $a_1 = +$, $a_0 = 3$, $a_{-1} = 1$, $a_{-2} = 4$ a tak dál (znaménko + se v konvenčním zápisu vypouští). Množina rozvojů je $R$. Je dobře známá korespondence $F\colon R \to \mathbb{R}$, v níž $F(\rho)$ je

$$\begin{aligned}&\big[\big(\varepsilon a_{n-1}10^{n-1},\, \varepsilon(a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2}),\\ &\varepsilon(a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3}),\, \dots\big)\big]_{\sim}\end{aligned}$$

s $\varepsilon = 1$ pro $a_n = +$ a $\varepsilon = -1$ pro $a_n = -$. <u>Devítkový rozvoj</u> $\rho$ má maximální nekonečný úsek cifer $a_m = a_{m-1} = a_{m-2} = \dots = 9$, přičemž začátek úseku $m \in \mathbb{N}_0$ je jednoznačně určený podmínkou, že buď $m = n-1$, anebo $m < n-1$

a $a_{m+1} < 9$. Následník devítkového rozvoje vznikne přepsáním devítek v tomto úseku na nuly a pak když $m < n-1$ zvětšením cifry $a_{m+1}$ o 1, a když $m = n-1$ předřazením cifry 1 a zvětšením $n$ o 1. Znaménko a ostatní cifry se zachovají.

**Definice 1.7.14 (sdružené rozvoje)** *Dva rozvoje $\rho \neq \rho'$ jsou sdružené, pokud buď $\{\rho, \rho'\} = \{+0.000\ldots, -0.000\ldots\}$, anebo jde o devítkový rozvoj a jeho následníka.*

**Úloha 1.7.15** *Dokažte, že dvojic sdružených rozvojů je spočetně mnoho.*

Příklady posledně zmíněných sdružených rozvojů jsou

$$\{-23.56999\ldots,\ -23.57000\ldots\} \text{ a } \{+999.999\ldots,\ +1000.000\ldots\}\,.$$

Jiným příkladem jsou známé „paradoxní“ — viz [1] — sdružené rozvoje

$$\{\kappa,\ \kappa'\} = \{+0.999\ldots,\ +1.000\ldots\}\,.$$

Podle následující věty se $F(\kappa) = F(\kappa') = 1_{\mathbb{R}}$, i když $\kappa \neq \kappa'$.

**Věta 1.7.16 ($R$ a $\mathbb{R}$)** *$F\colon R \to \mathbb{R}$ je na a $F(\rho) = F(\rho') \iff \rho = \rho'$ nebo $\{\rho, \rho'\}$ jsou sdružené rozvoje.*

Tuto větu dokážeme v oddílu 2.6.

- *Nespočetnost* $\mathbb{R}$. Dokážeme, že reálná čísla jsou nespočetná.

**Důsledek 1.7.17 (daň za úplnost)** *Neexistuje funkce z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$. Reálná čísla tvoří nespočetnou množinu.*

**Důkaz.** Prvky v $\mathbb{R}$ bereme podle předešlé věty jako rozvoje. Vezmeme množinu rozvojů

$$X = \{+0\,.\,a_{-1}\,a_{-2}\,\ldots\,a_{-m}\,\cdots:\ a_{-m} \in \{0,\,1\},\ m \in \mathbb{N}\}\,.$$

Zúžení $F\,|\,X$ je díky poslední větě prosté. Pro $y \in Y = F[X] \subset \mathbb{R}$ označíme jako $F^{-1}(y)$ to jediné $x \in X$, že $F(x) = y$. Tedy $F^{-1}\colon Y \to X$ je bijekce.

Pro spor nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je na. Tedy máme surjekci $f_0\colon \mathbb{N} \to Y$. Zřejmě také máme bijekci $g\colon X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ve sporu s důsledkem 1.7.11 tak máme surjekci

$$h = g(F^{-1}(f_0))\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}\,.$$

□

**Úloha 1.7.18** *Proč máme surjekci $f_0$? Proč máme bijekci $g$? Proč je funkce $h$ surjekce?*

Nespočetností $\mathbb{R}$ se zabývá článek [125]. Vychází z duální formulace, že neexistuje injekce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{N}$.

# Kapitola 2

# Množiny, čísla, pravda

V této kapitole rozvineme témata první přednášky a probereme další. Začneme oddílem 2.1 o axiomatické naivní teorii množin. Dokážeme Cantor–Bernsteinovu větu 2.1.2 a popíšeme čtyři úrovně teorií množin. Uvedeme sedm axiomů ... a dvě schemata axiomů teorie množin. V oddílu 2.2 vybudujeme aritmetiku a uspořádání přirozených čísel $\mathbb{N}_0$, které jsme vytvořili jako $\omega$ v předešlém oddílu. Oddíl 2.3, resp. 2.4, je věnován celým, resp. racionálním, číslům.

## 2.1 Axiomatická naivní teorie množin

Teď dokážeme, že každá dědičně konečná množina se dá skutečně zapsat důsledným úplným výčtem prvků.

**Věta 2.1.1 (Königovo lemma)** *Pro každou dědičně konečnou množinu $x$ je množina $P(x) = \{y \mid y \text{ leží pod } x\}$ konečná a každý její prvek $y \in P(x)$ má konečnou násobnost $m(y)$.*

**Důkaz.**

□

Oddíl začneme důkazem Cantor–Bernsteinovy věty, kterou budeme potřeboval pro důkaz věty 8.2.3 o počtu spojitých funkcí.

**Věta 2.1.2 (Cantor–Bernsteinova 1)** *Nechť $X$ a $Y$ jsou množiny a existují injekce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$. Potom existuje bijekce $h\colon X \to Y$, pro kterou navíc platí, že pro každé $x \in X$ se $h(x)$ rovná $f(x)$ nebo $g^{-1}(x)$.*

**Důkaz.** Búno $X, Y \neq \emptyset$. Pro každý prvek $x \in X$ (resp. $x \in Y$) definujeme konečnou či nekonečnou, ale vždy neprázdnou posloupnost $S_X(x)$ (resp. $S_Y(x)$) rovnou

$$(a_1, a_2, \dots) \subset X \cup Y$$

tak, že $a_1 := x$ a dále střídavě $a_2 := g^{-1}(a_1)$, $a_3 := f^{-1}(a_2)$, $a_4 := g^{-1}(a_3)$, $\dots$ (resp. $a_2 := f^{-1}(a_1)$, $a_3 := g^{-1}(a_2)$, $a_4 := f^{-1}(a_3)$, $\dots$) dokud tyto prvky existují. Funkci $h\colon X \to Y$ definujeme předpisem

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \dots \quad S_X(x) \text{ má lichou délku a} \\ g^{-1}(x) & \dots \quad S_X(x) \text{ má sudou délku nebo je nekonečná .} \end{cases}$$

Ukážeme, že $h$ je bijekce; tvrzení o hodnotách $h$ zřejmě platí. Funkce $h$ má jistě definiční obor $X$. Funkce $f$ a $g^{-1}$ jsou prosté, takže pokud $h$ není prostá, existují různé prvky $x, x' \in X$, že $S_X(x')$ má sudou nebo nekonečnou délku, $S_X(x)$ má lichou délku a

$$f(x) = g^{-1}(x') \ .$$

Vzhledem k rovnosti $x = f^{-1}(g^{-1}(x'))$ se obě délky liší o 2 a máme spor. Podobně dokážeme surjektivitu $h$. Nechť $y \in Y$ je libovolný prvek. Uvážíme posloupnost $S_Y(y)$. Pokud má lichou nebo nekonečnou délku, má $S_X(x)$, kde $x := g(y)$, sudou nebo nekonečnou délku a $h(x) = g^{-1}(x) = y$. Pokud $S_Y(y)$ má sudou délku, existuje prvek $x := f^{-1}(y)$, posloupnost $S_X(x)$ má lichou délku a opět $h(x) = f(x) = y$. $\square$

Probereme čtyři pojetí množin. S rostoucí mírou přesnosti to je

- *naivní teorie množin*,
- *axiomatická naivní teorie množin*,
- *formalizovaná teorie množin* a
- *literární teorie množin.*

Naivní teorie množin je založená na původních Cantorových množinách, jak jsme se s nimi setkali třeba v předchozí kapitole. Víceméně všichni matematici a matematičky, s výjimkou logiků a množinářů, tak s množinami pracují. Každý samozřejmě ví, že existuje nějaká axiomatická/formalizovaná teorie množin, protože to dnes patří k všeobecnému matematickému vzdělání, ale nikdo si při sjednocování dvou množin neláme hlavu s nějakými axiomy.

V axiomatické naivní teorii množin si už uvědomujeme

Přejdeme k samotným množinovým axiomům, což budou intuitivně pojaté axiomy ZFC.

**Axiom 2.1.3 (axiom extenzionality)** *Dvě množiny $a$ & $b$ se rovnají, $a = b$, právě když mají stejné prvky, to jest*

$$\forall c \big(c \in a \iff c \in b\big) \ .$$

**Axiom 2.1.4 (axiomy)** *Axiomatická naivní teorie množin má následujících nekonečně (ale jen spočetně) mnoho axiomů.*

**Axiom dvojice.** *Pro každé dvě množiny $a$ & $b$ existuje množina $\{a, b\}$, jejíž prvky jsou právě $a$ jenom množiny $a$ & $b$.*

**Schema axiomů vydělení.** *Nechť*

$$\varphi(x,\, v_1,\, \ldots,\, v_n)$$

*je množinová formule s uvedenými volnými množinovými proměnnými. Pak pro každé množiny $v_1, \ldots, v_n$ & každou množinu $a$ existuje množina*

$$\{x \in a \mid \varphi(x,\, v_1,\, \ldots,\, v_n)\}\ .$$

**Axiom sumy.** *Pro každou množinu $a$ existuje množina*

$$\bigcup a := \{x \mid \exists\, b\, \big(x \in b \in a\big)\}\ .$$

**Axiom potence.** *Pro každou množinu $a$ existuje množina*

$$\mathcal{P}(a) := \{x \mid \forall\, y\, \big(y \in x \Rightarrow y \in a\big)\}\ .$$

**Axiom nekonečna.** *Existuje množina $a$, že*

$$\emptyset \in a \wedge \forall\, x\, \big(x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a\big)\ .$$

**Schema axiomů nahrazení.** *Nechť*

$$\varphi(x,\, y,\, v_1,\, \ldots,\, v_n)$$

*je množinová formule s uvedenými volnými množinovými proměnnými, která má funkcionální vlastnost $x \mapsto y$, tedy že pro každé množiny $v_1, \ldots, v_n$, $x$ existuje právě jedna množina $y$, že platí $\varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n)$. Pak pro každé množiny $v_1, \ldots, v_n$ & pro každou množinu $a$ existuje množina*

$$\{y \mid \exists\, x\, \big(x \in a \wedge \varphi(x,\, y,\, v_1,\, \ldots,\, v_n)\big)\}\ .$$

**Axiom regularity (fundovanosti).** *Každá množina $a \neq \emptyset$ má $\in$-minimální prvek.*

**Axiom výběru (AC).** *Pro každou množinu $a \neq \emptyset$, že $\emptyset \notin a$, existuje taková funkce*

$$f\colon a \to \bigcup a,\ \text{že}\ \forall\, x \in a\, \big(f(x) \in x\big)\ .$$

To jsou tedy slavné axiomy (axiomatické naivní) teorie množin. Řada záležitostí v nich zjevně volá po vysvětlení.

**Definice 2.1.5 (konečné množiny)** *Množina $X$ je konečná, pokud platí implikace*

$$\forall\, f\, \big(f\colon X \to X \text{ je injekce} \Rightarrow f \text{ je surjekce}\big)\ .$$

**Tvrzení 2.1.6 (o podmnožinách $\omega$)** *Každá podmnožina $a \subset \omega$ je v bijekci s $\omega$ nebo s nějakým konečným ordinálem $\alpha \in \omega$.*

**Důkaz.**

□

Připomínáme definice: konečná množina je v bijekci s nějakým konečným ordinálem $\alpha \in \omega$, spočetná množina je v bijekci s $\omega$ a nejvýše spočetná množina je konečná nebo spočetná.

**Tvrzení 2.1.7 (pomocí surjekcí)** *Množina $a$ je nejvýše spočetná, právě když existuje surjekce z $\omega$ na $a$. Pro $a = \emptyset$ tato surjekce je $\emptyset$.*

**Důkaz.** Nechť $a$ je nejvýše spočetná, takže máme bijekci $f\colon \alpha \to a$, kde $\alpha \in \omega$ nebo $\alpha = \omega$. Pro $\alpha = 0$ a $\alpha = \omega$ je $f$ hledaná surjekce. Pro $0 \neq \alpha \in \omega$ funkci $f$ snadno rozšíříme na surjekci hodnotami $f(x) := b$ pro $x \in \omega \setminus \alpha$ a libovolnou $b \in a$.

Nechť $f\colon \omega \to a$ je na. Pro $a = \emptyset$ je funkce $f = \emptyset$ bijekce mezi $a$ a 0. Pro $a \neq \emptyset$ definujeme injekci $g\colon a \to \omega$ pomocí

$$g(x) := \min_{\in} \left(f^{-1}[\{x\}]\right) .$$

Podle tvrzení 2.1.6 existuje bijekce $h\colon g[a] \to \alpha$, kde $\alpha \in \omega$ nebo $\alpha = \omega$. Složená funkce $h(g)$ je bijekce z $a$ do $\alpha$. Tedy $a$ je nejvýše spočetná. □

Dokážeme základní výsledek o spočetnosti.

**Věta 2.1.8 (malé sumy)** *Suma nejvýše spočetné množiny nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina.*

Na větě je dobře vidět nedostatečnost axiomatické naivní teorie množin a nutnost formalizace. Intuitivní znění věty je totiž nutné nejprve přesněji vyložit. Danou množinu označíme jako $a$. Předpokládá se ve znění věty o nejvýše spočetné množině $a$, že množiny $b \in a$ jsou (stejnoměrně) nejvýše spočetné, tedy

$$\exists\, f \left(f \text{ je funkce definovaná na } a \;\&\; \forall\, b \in a \left(f(b) \text{ je funkce z } \omega \text{ na } b\right)\right) ,$$

nebo že množiny $b \in a$ jsou (bodově) nejvýše spočetné, tedy

$$\forall\, b \in a\; \exists \left(\text{funkce z } \omega \text{ na } b\right) ?$$

Asi se po chvíli přikloníme ke druhé, bodové interpretaci: je-li $V$ vlastnost množin a zápis $V(x)$ znamená, že množina $x$ má vlastnost $V$, pak předpoklad, že množina $a$ se skládá (jen) z množin s vlastností $V$, vyložíme formulí

$$\forall\, b \in a \left(V(b)\right) .$$

Uvidíme ale, že někteří matematici uchopili větu 2.1.8 prvním, stejnoměrným způsobem.

**Důkaz věty 2.1.8.** Což je na jednu stranu pochopitelné, protože pro důkaz věty stejnoměrnou interpretaci potřebujeme. My ale na druhou stranu vyjdeme

z bodové interpretace, která říká, že pro danou nejvýše spočetnou množinu $a$ je pro každou $b \in a$ množina

$$c_b := \{f \mid f\colon \omega \to b \text{ a je na}\}$$

neprázdná. Z množiny $\{c_b \mid b \in a\}$ získáme pomocí axiomu výběru surjekce $\{f_b\colon \omega \to b \mid b \in a\}$, což je stejnoměrná interpretace. Máme také surjekci $e\colon \omega \to a$. Z důkazu věty 8.2.3 známe bijekci

$$g\colon \omega \to \omega^2,\ g(\alpha) = (g_1(\alpha), g_2(\alpha)) = (\beta, \gamma),\ \alpha = (2\beta + 1)2^\gamma - 1\ .$$

Pomocí ní dostáváme hledanou surjekci

$$h\colon \omega \to \bigcup a,\ h(\alpha) := f_{e(g_1(\alpha))}(g_2(\alpha))$$

(pro $a = \emptyset$ a $a = \{\emptyset\}$ máme $\bigcup a = h = \emptyset$). Takže $\bigcup a$ je nejvýše spočetná množina. □

V matematické literatuře se lze setkat s důkazy předešlé věty nepoužívajícími AC. Někde v nich ale musí být chyba nebo zádrhel, protože ve formalizované teorii množin se dá dokázat, že tato věta je (v bodové interpretaci) bez AC nedokazatelná. Uvedeme konkrétní příklad.

Holandský matematik B. L. van der Waerden (viz oddíl C.1) píše na str. 26 ruského vydání [170] své známé učebnice algebry [178, 179] následující. (V [170] se „spočetnou“ množinou rozumí nejvýše spočetná množina zde. Mohutnosti množin se v [170] definují jako zde bijekcemi s přirozenými čísly. Následující tvrzení ve skloněném fontu je tedy přesně věta 2.1.8.)

> *Sjednocení spočetné množiny spočetných množin je opět spočetné.*
>
> Důkaz. Dané množiny označíme jako $M_1, M_2, \ldots$ a prvky množiny $M_i$ jako $m_{i1}, m_{i2}, \ldots$
>
> Existuje jen konečně mnoho prvků $m_{ik}$, pro něž $i + k = 2$; analogicky existuje jen konečně mnoho prvků, pro něž $i + k = 3$, atd. Nejprve přečíslujeme všechny prvky, pro něž $i + k = 2$ (například podle vzrůstajících hodnot $i$), potom (pomocí následujících čísel) přečíslujeme prvky, pro něž $i + k = 3$, atd. Při tom každý prvek $m_{ik}$ dostane nějaké číslo a různé prvky budou mít různá čísla. Odtud plyne tvrzení.

Axiom výběru se tu neobjevuje. V [170] se AC poprvé zmiňuje až na str. 246. Kde se stala chyba? Chyba, a je to opravdu chyba, ve van der Waerdenově důkazu je ta, že větu o sjednocení spočetných množin interpretuje stejnoměrně. Týž omyl, opět zaviněný stejnoměrnou interpretací, je v učebnici analýzy [110, str. 20].

Jiný (a správný) důkaz věty 2.1.8, založený na injekcích, se nachází v klasické učebnici teorie množin [20] B. Balcara a P. Štěpánka (viz oddíl C.1) na str. 102–103. V trochu modifikované podobě ho teď předvedeme.

**Tvrzení 2.1.9 (pomocí injekcí)** *Množina $a$ je nejvýše spočetná, právě když existuje injekce z $a$ do $\omega$. Pro $a = \emptyset$ tato injekce je $\emptyset$.*

**Důkaz.** Nechť $a$ je nejvýše spočetná, takže máme bijekci $f\colon a \to \alpha$, kde $\alpha \in \omega$ nebo $\alpha = \omega$. Tato funkce $f$ je zřejmě hledaná injekce.

Nechť $f\colon a \to \omega$ je prostá. Podle tvrzení 2.1.6 existuje bijekce $h\colon f[a] \to \alpha$, kde $\alpha \in \omega$ nebo $\alpha = \omega$. Složená funkce $h(f)$ je bijekce z $a$ do $\alpha$. Tedy $a$ je nejvýše spočetná. □

**Injektivní důkaz věty 2.1.8.** Opět vyjdeme z bodové interpretace, která nyní praví, že pro danou nejvýše spočetnou množinu $a$ je pro každou $b \in a$ množina

$$c_b := \{f \mid f\colon b \to \omega \text{ a je prostá}\}$$

neprázdná. Z množiny $\{c_b \mid b \in a\}$ získáme pomocí axiomu výběru injekce $\{f_b\colon b \to \omega \mid b \in a\}$. Máme také injekci $e\colon a \to \omega$. Z důkazu věty 8.2.3 známe bijekci

$$g\colon \omega^2 \to \omega,\ g(\alpha, \beta) = \gamma,\ \gamma = (2\alpha + 1)2^\beta - 1\ .$$

Pomocí ní dostáváme hledanou injekci $h\colon \bigcup a \to \omega$,

$$h(x) := g(e(b(x)),\ f_{b(x)}(x)),\ b(x) := e^{-1}[\{\min_{\in}(\{e(b) \mid x \in b \in a\})\}]\ .$$

Pro $a = \emptyset$ a $a = \{\emptyset\}$ opět máme $\bigcup a = h = \emptyset$. Takže $\bigcup a$ je nejvýše spočetná množina. □

## 2.2 Přirozená čísla

V tomto oddílu zavedeme přirozená čísla $\omega$, aritmetické operace $+$ a $\cdot$ a dobré uspořádání $<$ na $\omega$. Dokážeme jejich základní vlastností. Probereme také model $\omega$ jako jednosměrky (jednosměrné cesty).

Jak víme, množina $I$ je induktivní, když $\emptyset \in I$ a platí implikace

$$x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I\ .$$

Podle axiomu nekonečna alespoň jedna induktivní množina existuje.

**Definice 2.2.1 (přirozená čísla)** *Množina přirozených čísel je průnik všech induktivních množin,*

$$\omega := \bigcap\{I \mid I \textit{ je induktivní}\}\ .$$

Je to korektní definice, množina $\omega$ „existuje“ díky axiomu nekonečna a axiomu definice množiny: je-li $I$ induktivní množina, pak

$$\omega = \{x \in I \mid \forall y\,\big(y \text{ je induktivní} \Rightarrow x \in y\big)\}\ .$$

Množina $\omega$ je induktivní, protože průnik induktivních množin je induktivní.

**Tvrzení 2.2.2 (jedna vlastnost $(\omega, <)$)** *Pro každá čísla $k$, $l$ a $m$ v $\omega$ je*

$$k < m \iff k + l < m + l \ .$$

**Důkaz.**

□

## 2.3 Celá čísla

V tomto oddílu zavedeme celá čísla $\mathbb{Z}$, aritmetické operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}$ a lineární uspořádání $<$ na $\mathbb{Z}$. Dokážeme jejich základní vlastností. Probereme model $\mathbb{Z}$ jako obousměrky (obousměrné cesty).

*Monoidem* $M_{\mathrm{m}}$ rozumíme komutativní monoid, algebraickou strukturu

$$M_{\mathrm{m}} = (M,\, 0_M,\, +)$$

s komutativní a asociativní operací $+\colon M \times M \to M$ a neutrálním prvkem $0_M \in M$, který je zřejmě jednoznačně určený.

Dvojice v $M^2 = M \times M$ píšeme jako $m \,\mathbf{r}\, n := (m, n)$ pro $m, n \in M$ (symbol $\mathbf{r}$ znamená formální rozdíl). Na $M^2$ zavedeme relaci *shodnosti* $\sim$,

$$k \,\mathbf{r}\, l \sim m \,\mathbf{r}\, n \overset{\text{def}}{\iff} k + n = l + m \ .$$

Je to relace ekvivalence.

**Definice 2.3.1 (Grothendieckova grupa)** *Nechť $M_{\mathrm{m}} = (M, 0_M, +)$ je monoid. Grothendieckovou grupou $M_{\mathrm{G}}$ obalující monoid $M_{\mathrm{m}}$ rozumíme algebraickou strukturu*

$$M_{\mathrm{G}} = (M^2/{\sim},\, 0_{\mathrm{G}},\, +) \ ,$$

*kde*

$$0_{\mathrm{G}} := [(0_M \,\mathbf{r}\, 0_M)]_\sim = \{m \,\mathbf{r}\, m \mid m \in M\}$$

*a operace $+$ na $M^2/{\sim}$ je definovaná předpisem*

$$[k \,\mathbf{r}\, l]_\sim + [m \,\mathbf{r}\, n]_\sim := [(k + m) \,\mathbf{r}\, (l + n)]_\sim \ .$$

*Symbol $+$ vlevo od $:=$ je zaváděné sčítání v $M_{\mathrm{G}}$. Symboly $+$ vpravo od $:=$ označují sčítání v $M_{\mathrm{m}}$.*

O francouzském matematikovi A. Grothendieckovi píšeme v oddílu C.1.

**Tvrzení 2.3.2 (je to komut. grupa)** *Grothendieckova grupa je komutativní grupa.*

**Důkaz.** Nechť $M_{\mathrm{m}}$, $\sim$ a $M_{\mathrm{G}}$ jsou jako výše a nechť $k\,\mathbf{r}\,l \sim k'\,\mathbf{r}\,l'$ a $m\,\mathbf{r}\,n \sim m'\,\mathbf{r}\,n'$, kde $k$, $k'$, $l$, $l'$, $m$, $m'$, $n$ a $n'$ jsou v $M$. Pak $k+l' = k'+l$ a $m+n' = m'+n$, tedy $(k+m)+(l'+n') = (k'+m')+(l+n)$, $(k+m)\,\mathbf{r}\,(l+n) \sim (k'+m')\,\mathbf{r}\,(l'+n')$ a

$$[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim + [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim = [k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim + [m'\,\mathbf{r}\,n']_\sim \ .$$

Sčítání v $M_{\mathrm{G}}$ je tedy definováno korektně. Jeho komutativita a asociativita plynou snadno z komutativity a asociativity sčítání v $M_{\mathrm{m}}$. Neutralita prvku $0_{\mathrm{G}}$ je jasná:

$$[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim + 0_{\mathrm{G}} = [k\,\mathbf{r}\,l]_\sim + [0_M\,\mathbf{r}\,0_M]_\sim = [(k+0_M)\,\mathbf{r}\,(l+0_M)]_\sim = [k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \ .$$

Získali jsme aditivní inverzy:

$$[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim + [l\,\mathbf{r}\,k]_\sim = [(k+l)\,\mathbf{r}\,(l+k)]_\sim = 0_{\mathrm{G}} \ .$$

Takže $M_{\mathrm{G}}$ je Abelova grupa. □

Monoid $M_{\mathrm{m}}$ je do grupy $M_{\mathrm{G}}$ vnořený isomorfismem

$$M \ni m \mapsto [m\,\mathbf{r}\,0_M]_\sim \in M^2/\!\sim \ .$$

**Definice 2.3.3 (celá čísla)** *Aditivní Abelova grupa celých čísel*

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{AA}} := (\mathbb{Z},\, 0_{\mathbb{Z}},\, +) \ ,$$

*kde* $\mathbb{Z} := \omega^2/\!\sim$, $0_{\mathbb{Z}} := [0\,\mathbf{r}\,0]_\sim$ *a* $+$ *je výše definované sčítání na* $\mathbb{Z}$, *je Grothendieckova grupa obalující monoid* $(\omega, 0, +)$.

Zbývají tři záležitosti. Jednak zavést *násobení* a *uspořádání* celých čísel. Pak popsat jejich aritmetiku konkrétně a konečnými prostředky — když chceme sečíst třeba $5+(-13)$, jistě při tom nemyslíme na nekonečné ekvivalenční třídy $[5\,\mathbf{r}\,0]_\sim$ a $[0\,\mathbf{r}\,13]_\sim$. Konečně celá čísla popíšeme jako oboustranně nekonečnou cestu.

Pro $k$, $l$, $m$ a $n$ v $\omega$ definujeme

$$[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \cdot [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim := [(k\cdot m + l\cdot n)\,\mathbf{r}\,(k\cdot n + l\cdot m)]_\sim \ .$$

Symbol $\cdot$ vlevo od $:=$ představuje zaváděné násobení celých čísel. Symboly $+$ a $\cdot$ vpravo od $:=$ označují sčítání a násobení na $\omega$. Uspořádání celých čísel je dáno vztahem

$$[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim < [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim \overset{\mathrm{def}}{\iff} k+n \in m+l \ .$$

Symbol $<$ vlevo od ekvivalence je zaváděné uspořádání celých čísel.

Ukažme, že definice operace $\cdot$ a uspořádání $<$ jsou korektní. Nechť $k\,\mathbf{r}\,l \sim k'\,\mathbf{r}\,l'$ a $m\,\mathbf{r}\,n \sim m'\,\mathbf{r}\,n'$ ($k$, $k'$, $l$, $l'$, $m$, $m'$, $n$ a $n'$ jsou v $\omega$). Tedy

$$(k\cdot m + l\cdot n) + (k'\cdot n + l'\cdot m) = (k'\cdot m + l'\cdot n) + (k\cdot n + l\cdot m) \ ,$$

protože $(k+l')m = (k'+l)m$ a $(l+k')n = (l'+k)n$, a $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \cdot [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim = [k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim \cdot [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$. Podobně se dokáže, že $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \cdot [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim = [k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \cdot [m'\,\mathbf{r}\,n']_\sim$. Tedy i $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \cdot [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim = [k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim \cdot [m'\,\mathbf{r}\,n']_\sim$.

Nechť $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim < [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$. Pak $k+n < l+m \rightsquigarrow k+l'+n < l+l'+m \rightsquigarrow k'+l+n < l+l'+m \rightsquigarrow k'+n < l'+m$ a $[k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim < [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$, díky tvrzení 2.2.2. Podobně se dokáže, že $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim < [m'\,\mathbf{r}\,n']_\sim$. Tedy $[k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim < [m'\,\mathbf{r}\,n']_\sim$.

**Tvrzení 2.3.4 ($\mathbb{Z}$ je UOI)** *Algebraická struktura*

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{UOI}} := (\mathbb{Z},\, 0_\mathbb{Z}, 1_\mathbb{Z},\, +,\, \cdot,\, <)\ ,$$

*kde* $1_\mathbb{Z} := [1\,\mathbf{r}\,0]_\sim$*, je uspořádaný obor integrity.*

**Důkaz.** Již jsme ukázali, že $(\mathbb{Z}, 0_\mathbb{Z}, +)$ je Abelova grupa. Komutativita a asociativita násobení v $\mathbb{Z}_{\mathrm{UOI}}$ a distributivní zákon plynou hned z jejich platnosti v $\omega$. Nechť $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim$ a $[m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$ jsou v $\mathbb{Z}$ a

$$[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \cdot [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim = [(km+ln)\,\mathbf{r}\,(kn+lm)]_\sim = 0_\mathbb{Z}\ .$$

Řekněme, že $k \le l$ a $m \le n$, ostatní případy jsou podobné. Pak pomocí odečítání v $\omega$ dostaneme, že $km+ln = kn+lm \rightsquigarrow (l-k)(n-m) = 0$. Protože $\omega$ nemá dělitele nuly, $k = l$ a $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim = 0_\mathbb{Z}$ nebo $m = n$ a $[m\,\mathbf{r}\,n]_\sim = 0_\mathbb{Z}$.

Zbývá dokázat, že $<$ je lineární uspořádání a že platí oba aritmetické axiomy uspořádání. Ireflexivita $<$ je zřejmá. Nechť $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim < [k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim$ a $[k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim < [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$. Tedy $k+l' < l+k'$ a $k'+n < l'+m$. Pak $k+l'+n < l'+m+l$ a $k+n < m+l$ podle tvrzení 2.2.2. Tedy $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim < [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$ a $<$ je tranzitivní. Nechť $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \ne [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$. Pak $k+n \ne m+l$. Nechť $k+n > m+l$, druhý případ je podobný. Tedy $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim > [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$ a $<$ je trichotomická. Nechť $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim < [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim$ a $[k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim$ je libovolné celé číslo. Pak $k+n < l+m \rightsquigarrow k+k'+n+l' < l+l'+m+k' \rightsquigarrow [k\,\mathbf{r}\,l]_\sim + [k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim < [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim + [k'\,\mathbf{r}\,l']_\sim$, což dokazuje první aritmetický axiom uspořádání. Konečně nechť $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim > 0_\mathbb{Z}$ a $[m\,\mathbf{r}\,n]_\sim > 0_\mathbb{Z}$. Pak $k > l$ a $m > n$. Tedy $(k-l)(m-n) > 0$ a $km+ln > kn+lm$, takže $[k\,\mathbf{r}\,l]_\sim \cdot [m\,\mathbf{r}\,n]_\sim > 0_\mathbb{Z}$. To dokazuje druhý aritmetický axiom uspořádání. □

Podobně jako $\omega$ je vzhledem k inkluzi nejmenší induktivní množina, $\mathbb{Z}_{\mathrm{UOI}}$ je až na izomorfismus nejmenší uspořádaný obor integrity. Nebudeme to dokazovat.

**Tvrzení 2.3.5 (nejmenší UOI)** *Pro každý* UOI $X_{\mathrm{UOI}} = (X, 0_X, 1_X, +, \cdot, <)$ *existuje taková podmnožina* $Y \subset X$*, že zúžení* $X_{\mathrm{UOI}} \,|\, Y$ *je* UOI *izomorfní* $\mathbb{Z}_{\mathrm{UOI}}$.

**Věta 2.3.6 (DK celá čísla)** *Existuje* UOI $X_{\mathrm{UOI}} = (X, 0_X, 1_X, +, \cdot, <)$ *izomorfní* $\mathbb{Z}_{\mathrm{UOI}}$*, jehož každý prvek* $x \in X$ *je* DK *množina.*

**Důkaz.**

□

## 2.4 Zlomky

## 2.5 Dedekindova reálná čísla

*Důkaz věty 1.7.16.* Než se pustíme do Dedekindovy konstrukce reálných čísel, dokážeme větu o korespondenci $F$ Cantorových reálných čísel a rozvojů.

1. Nechť $x := [(b_k)]_\sim \in \mathbb{R}$ je Cantorovo reálné číslo. Definujeme rozvoj

$$\rho = \varepsilon\, a_n\, a_{n-1}\, \dots\, a_0 \,.\, a_{-1}\, \dots\ ,$$

že $F(\rho) = x$. Když $x < 0_\mathbb{R}$, položíme $\varepsilon := -$, jinak $\varepsilon := \emptyset$. Pokud $|x| < 1$, je $n := 0$, a jinak je $n$ to jediné $n \in \mathbb{N}_0$ s $10^n \le |x| < 10^{n+1}$. Pokud $|x| < 1$, vezmeme $m \in \mathbb{Z}$, $m \le 0$, že $10^{m-1} \le |x| < 10^m$. Pokud toto $m$ neexistuje, $x = 0_\mathbb{R}$ a položíme $m := -\infty$ a $a_0 = a_{-1} = \dots := 0$. Jinak je $m$ jednoznačné a položíme $a_0 = a_{-1} = \dots = a_m := 0$. Pokud $|x| \ge 1$, položíme $m := n$ a $a_n \in [9]$ je jednoznačná cifra splňující, že $a_n 10^n \le |x| < (a_n + 1)10^n$. Nechť $m \ne -\infty$ a cifry rozvoje $a_n, a_{n-1}, \dots, a_m$ už jsou definované. Položíme $m := m - 1$, jako $a_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ definujeme jednoznačnou cifru splňující, že

$$a_m 10^m \le |x| - \textstyle\sum_{j=m+1}^{n} a_j 10^j < (a_m + 1)10^m\ ,$$

a opakujeme to nekonečněkrát. Tím je rozvoj $\rho$ definovaný.

Ověříme, že $F(\rho) = x$. Podle definice funkce $F$ za definicí 1.7.13 se $F(\rho) = [p]_\sim$, kde $p = (p_n, p_{n-1}, \dots)$ je Cauchyova posloupnost zlomků

$$\big(\overline{\varepsilon} a_n 10^n,\ \overline{\varepsilon}(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1}),\ \overline{\varepsilon}(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2}),\ \dots\big)$$

s $\overline{\varepsilon} := 1$ pro $\varepsilon = \emptyset$ a $\overline{\varepsilon} := -1$ pro $\varepsilon = -$. Podle definice rozvoje $\rho$ pro každé $m \le n$ je $0 \le x - p_m < 10^m$. Tedy $(b_k) \sim p$ a $x = [(b_k)]_\sim = [p]_\sim = F(\rho)$.

2. Nechť $F(\rho) = F(\rho')$ pro rozvoje $\rho$ a $\rho'$. □

S Cantorovými reálnými čísly z oddílu 1.6 je ta potíž, že každé z nich je jako ekvivalenční třída $[(a_n)]_\sim$ Cauchyových posloupností zlomků $(a_n)$ nespočetná množina. My však chceme pracovat jen s následujícími „skrz naskrz“ nejvýše spočetnými množinami.

**Definice 2.5.1 (DNS množiny)** *Řekneme, že množina $x$ je dědičně nejvýše spočetná, zkratkou* DNS*, pokud pro každé $n \in \omega$ a každý řetězec množin*

$$x_n \in x_{n-1} \in \dots \in x_0 = x$$

*je množina $x_n$ nejvýše spočetná. (Z předminulého oddílu víme, že díky axiomu fundovanosti je každý takový řetězec konečný.)*

Proč se nám vlastně nelíbí nespočetné množiny? Protože téměř žádný prvek v nich se nedá popsat konečnými prostředky. Nicméně jsou všeobecně akceptované, protože se zdá, že bez nich se v matematické analýze nelze nikam dostat (např. každá funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, je nespočetná

množina). Ale to se jen zdá, v [**?**] ukazujeme, že většina teorie vyložené ve 14 přednáškových kapitolách v naší učebnici se dá vybudovat jen s pomocí DNS množin.

Teorie reálných čísel jako DNS množin už samozřejmě existuje. Byla to totiž úplně první rigorózní teorie reálných čísel, předložená R. Dedekindem (viz oddíl C.1) v [54]. V tomto oddílu ji popíšeme a přitom přidáme jednu inovaci.

**Definice 2.5.2 (Dedekindova reálná čísla)** *Reálné číslo je řez na množině zlomků $\mathbb{Q}$. Řez je taková množina $X \subset \mathbb{Q}$, že* (i) $X, \mathbb{Q} \setminus X \neq \emptyset$, (ii) $a \in \mathbb{Q}$, $a < b$, $b \in X \Rightarrow a \in X$ *a* (iii) $X$ *nemá v* $(\mathbb{Q}, <)$ *maximum. Množinu řezů označíme jako* $K$.

Každý řez je patrně DNS množina.

Zmíněná inovace je zobrazení $G\colon C \to K$, kde pro racionální Cauchyovu posloupnost $(a_n) \in C$ definujeme hodnotu funkce $G$ jako

$$G(a_n) := \{a \in \mathbb{Q} \mid \exists\, n_0 \left(n \geq n_0 \Rightarrow a < a_n\right\}' ,$$

přičemž čárka znamená, že případný maximální prvek v množině $\{\cdots\}$ vynecháme. Řekneme, že množina $G(a_n)$ je *generovaná posloupností* $(a_n)$.

**Tvrzení 2.5.3 (o funkci $G$)** *Funkce $G$ je na $K$ a pro každé dvě posloupnosti $(a_n), (b_n) \in C$ platí, že*

$$G(a_n) = G(b_n) \iff (a_n) \sim (b_n) ,$$

*kde $\sim$ je relace shodnosti na $C$ z oddílu 1.6.*

**Důkaz.**

□

Pomocí funkce $G$ zavedeme na $K$ aritmetické operace a lineární uspořádání. Začneme neutrálními prvky

$$0_K := G(0, 0, \dots) = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0\} \text{ a } 1_K := G(1, 1, \dots) = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 1\} .$$

Pro $X, Y \in K$ vezmeme libovolné $(a_n), (b_n) \in C$ s $X = G(a_n)$ a $Y = G(b_n)$ a položíme

$$X + Y := G(a_n + b_n) \text{ a } X \cdot Y := G(a_n b_n) .$$

Než budeme pokračovat dále, ověříme, že tyto definice jsou korektní.

## 2.6 Desetinná reálná čísla

## 2.7 Komplexní čísla

Komplexní čísla, jejichž množinu označujeme $\mathbb{C}$, jsou vybudována z $\mathbb{R}$. Zde nejprve dokážeme, že $\mathbb{C}$ spolu s jistými operacemi tvoří těleso rozšiřující těleso $\mathbb{R}$. V následujícím oddílu dokážeme Základní větu algebry, že každý nekonstantní komplexní polynom má komplexní kořen.

**Definice 2.7.1 (komplexní čísla 1)** *Komplexními čísly rozumíme algebraickou strukturu*

$$\mathbb{C}_{\mathrm{TE}} = (\mathbb{R}^2,\, 0_{\mathbb{C}},\, 1_{\mathbb{C}},\, +,\, \cdot)$$

*s konstantami* $0_{\mathbb{C}} = (0,0)$ *a* $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$ *a s binárními operacemi sčítání* $+$ *a násobení* $\cdot$ *danými předpisy* $(a,b) + (c,\, d) = (a+c, b+d)$ *a* $(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Mnohem častěji se ale používá následující ekvivalentní definice.

**Definice 2.7.2 (komplexní čísla 2)** *Komplexními čísly rozumíme algebraickou strukturu*

$$\mathbb{C}_{\mathrm{TE}} = (\mathbb{C},\, 0_{\mathbb{C}},\, 1_{\mathbb{C}},\, +,\, \cdot)$$

*s nosnou množinou* $\mathbb{C} = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ *formálních lineárních kombinací prvků* $1$ *&* $i$ *s reálnými koeficienty, s konstantami* $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ *a* $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$ *a s binárním sčítáním* $+$ *po složkách a s binárním násobením* $\cdot$ *pomocí distributivního zákona a pravidla, že* $i^2 = i \cdot i = -1$.

Například součet $(1+2i) + (3+4i) = (1+3) + (2+4)i = 4 + 6i$ a součin $(1+2i)\cdot(3+4i)$ je

$$1\cdot 3 + 1\cdot 4\cdot i + 2\cdot i\cdot 3 + 2\cdot i\cdot 4\cdot i = 3 + 4i + 6i - 8 = -5 + 10i\,.$$

Tady jsme ale použili i asociativitu a komutativitu jak formálního sčítání, tak formálního skalárního násobení. Izomorfismus obou definic je zprostředkován zobrazením $(a,b) \mapsto a + bi$.

**Věta 2.7.3 ($\mathbb{C}_{\mathrm{TE}}$ je těleso)** *Algebraická struktura* $\mathbb{C}_{\mathrm{TE}}$ *je těleso.*

**Důkaz.** Vyjdeme z toho, že $\mathbb{R}$ je těleso. Odtud snadno plyne, že $0_{\mathbb{C}}$ je aditivně neutrální prvek a že komplexní sčítání je komutativní a asociativní a že existují aditivní inverzy: $-(a+bi) = (-a)+(-b)i$. Patrně $1_{\mathbb{C}}$ je multiplikativně neutrální prvek. Ověříme komutativitu a asociativitu komplexního násobení. Patrně $(a + bi)\cdot(c+di)$ je

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i = (c + di)\cdot(a + bi)\,,$$

což dokazuje komutativitu. Rovnost

$$\begin{aligned}
&\big((a+bi)\cdot(c+di)\big)\cdot(e+fi) = \big(ac - bd + (ad+bc)i\big)\cdot(e+fi) = \\
&= (ac-bd)e - (ad+bc)f + \big((ac-bd)f + (ad+bc)e\big)i = \\
&= ace - bde - adf - bcf + (acf - bdf + ade + bce)i = \\
&= a(ce - df) - b(cf + de) + \big(a(cf+de) + b(ce - df)\big)i = \\
&= (a+bi)\cdot\big(ce - df + (cf+de)i\big) = (a+bi)\cdot\big((c+di)\cdot(e+fi)\big)
\end{aligned}$$

platí díky komutativitě a asociativitě reálného sčítání a násobení a distributivitě reálného násobení vzhledem ke sčítání. Podobně dostaneme distributivitu komplexního násobení vzhledem ke sčítání:

$$\begin{aligned}
&(a+bi)\cdot\big((c+di)+(e+fi)\big) = (a+bi)\cdot\big(c+e+(d+f)i\big) = \\
&= a(c+e) - b(d+f) + \big(a(d+f)+b(c+e)\big)i = \\
&= ac + ae - bd - bf + (ad + af + bc + be)i = \\
&= \big(ac - bd + (ad+bc)i\big) + \big(ae - bf + (af+be)i\big) = \\
&= (a+bi)\cdot(c+di) + (a+bi)\cdot(e+fi)\ .
\end{aligned}$$

Komplexní číslo $a + bi \neq 0 + 0i$ má multiplikativní inverz $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$. □

Ověření, že zobrazení $\mathbb{R} \ni a \mapsto a + 0i \in \mathbb{C}$ je izomorfismus tělesa reálných čísel s podtělesem tělesa komplexních čísel přenecháme čtenáři.

## 2.8 Základní věta algebry

V tomto oddílu dokážeme Základní větu algebry, krátce ZVALG, že každý nekonstantní komplexní polynom má kořen. Nejprve ovšem komplexní polynomy definujeme. V definici 5.5.1, pouze reálné konstantní funkce rozšíříme do komplexních a totéž provedeme s identickou funkcí.

**Definice 2.8.1 (komplexní polynomy)** *Komplexní polynom je každá funkce $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která vznikne konečně mnoha užitími dvou následujících pravidel.*

1. *Konstantní funkce $f_u\colon \mathbb{C} \to \{u\}$, $u \in \mathbb{C}$, a identická funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z) = z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou komplexní polynomy.*

2. *Jsou-li $p$ a $q$ komplexní polynomy, jejich součet $p + q$ a součin $pq = p \cdot q$ je také komplexní polynom.*

*Množinu komplexních polynomů označíme jako $\mathbb{C}[z]$.*

Konstantní funkce $f_0$ je *nulový (komplexní) polynom.* Konstantní funkce $f_u$, $u \in \mathbb{C}$, jsou *konstantní (komplexní) polynomy*, ostatní komplexní polynomy jsou *nekonstantní.* Číslo $u \in \mathbb{C}$ je *kořenem* komplexního polynomu $p(z)$, pokud $p(u) = 0$. Teď už tedy víme, co Zvalg říká: pro každý $p \in \mathbb{C}[z]$, $p \neq f_u$ pro každé $u \in \mathbb{C}$, existuje $v \in \mathbb{C}$, že $p(v) = 0$. Následující tvrzení jednoduše vyplývá z definice komplexních polynomů.

**Tvrzení 2.8.2 (okruh komplexních polynomů)** *Algebraická struktura*

$$\mathbb{C}[z]_{\mathrm{ok}} := (\mathbb{C}[z],\ f_0,\ f_1,\ +,\ \cdot)$$

*je komutativní okruh s jedničkou. Sčítání a násobení v něm je obvyklé bodové sčítání a násobení funkcí.*

Z definice už ale třeba jednoduše neplyne, že $\mathbb{C}[z]_{\mathrm{ok}}$ je obor integrity, to jest pro každé dva polynomy $p, q \in \mathbb{C}[z]$ platí, že $pq = f_0 \Rightarrow p = f_0$ nebo $q = f_0$. Jednoduše to ale plyne z *kanonického tvaru* komplexních polynomů. Je analogický kanonickému tvaru reálných polynomů v tvrzení 5.5.2.

**Tvrzení 2.8.3 (kanonický tvar komplexních polynomů)** *Pro každý nenulový polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ existují jednoznačně určená čísla $n \in \mathbb{N}_0$ & $a_0, a_1, \ldots, a_n$ v $\mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, že*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\, \big(p(z) = \textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j z^j\big)\ .$$

Sčítanec je zde samozřejmě $f_{a_j} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^j$. Důkaz je stejný jako pro tvrzení 5.5.2, indukcí podle složitosti definice daného polynomu. Jednoznačnost koeficientů $a_j$ plyne jako pro reálné polynomy z horního odhadu $\deg p := n$ na počet kořenů nenulového polynomu $p$.

**Věta 2.8.4 (Zvalg)** *Každý nekonstantní komplexní polynom $p(z)$ má kořen, číslo $u \in \mathbb{C}$, pro něž $p(u) = 0$.*

Budeme pracovat v normovaném tělese komplexních čísel

$$\mathbb{C}_{\mathrm{nte}} = (\mathbb{C},\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, |\cdot|)\ ,$$

přičemž definici *normy* $|\cdot|$ a její vlastnosti připomeneme. Zvalg dokážeme jen pomocí topologické struktury definované normou. Nepoužijeme ani komplexní exponenciálu, ani reálný sinus či kosinus. Důkaz provedeme ve dvou krocích. V prvním kroku dokážeme, že když v $\mathbb{C}$ existují všechny odmocniny, to jest když každý polynom $z^n + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, má kořen, pak Zvalg platí. Ve druhém kroku dokážeme existenci těchto odmocnin.

*Norma*

$$|z| = |a + bi| \in [0,\, +\infty)$$

komplexního čísla $z = a + bi$ je definovaná předpisem

$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Existence (druhé) reálné odmocniny

$$\sqrt{a}\colon [0,\, +\infty) \to [0,\, +\infty)$$

tu snadno plyne pomocí Bolzano–Cauchyovy věty 1.6.16. Patrně $|z|^2 = z\overline{z}$, kde $\overline{z} = \overline{a + bi} := a - bi$ je číslo *komplexně sdružené k $z$*. Norma je tedy multiplikativní: když $u, v \in \mathbb{C}$, pak

$$|uv| = |u \cdot v| = |u| \cdot |v|\ .$$

Je jasné, že $|z| = 0$, právě když $z = 0$. Dokážeme *trojúhelníkovou nerovnost*

$$|u + v| \leq |u| + |v|\ .$$

Nechť $v = a + bi$ a $u \neq 0$, pro $u = 0$ nerovnost platí triviálně. Můžeme předpokládat, že $u = 1$: nerovnost vynásobíme číslem $|1/u| = 1/|u|$ a použijeme multiplikativitu. Dokazujeme tak, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\sqrt{(1+a)^2 + b^2} \leq 1 + \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Což je ekvivalentní nerovnosti $2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}$, která zjevně platí.

Pro posloupnost $(z_n) \subset \mathbb{C}$ a $z \in \mathbb{C}$ píšeme $\lim z_n = z$ a řekneme, že $(z_n)$ *má limitu* $z$, pokud

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0 \left(n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon\right)\ .$$

Komplexní posloupnosti s limitou jsou *konvergentní*. Patrně

$$\lim(a_n + b_n i) = a + bi \iff \lim a_n = a \ \text{ a } \ \lim b_n = b\ .$$

Množina $X \subset \mathbb{C}$ je *kompaktní*, má-li každá posloupnost $(z_n) \subset X$ konvergentní podposloupnost $(z_{m_n})$ s $\lim z_{m_n} \in X$. Ukážeme, že pro libovolná reálná čísla $\alpha \leq \alpha'$ a $\beta \leq \beta'$ je obdélník

$$R := \{a + bi \mid \alpha \leq a \leq \alpha' \wedge \beta \leq b \leq \beta'\} \subset \mathbb{C}$$

kompaktní množina. Je-li $(a_n + b_n i) \subset R$ libovolná posloupnost, pak $(a_n) \subset [\alpha, \alpha']$ a má podle Bolzano–Weierstrassovy věty konvergentní podposloupnost $(a_{m_n})$ s limitou $a \in [\alpha, \alpha']$. Stejně tak má $(b_{m_n})$ konvergentní podposloupnost $(b_{m_{k_n}})$ s limitou $b \in [\beta, \beta']$. Podle hořejší ekvivalence máme, že

$$\lim \left(a_{m_{k_n}} + b_{m_{k_n}} i\right) = a + bi \in R\ .$$

Nechť $X \subset \mathbb{C}$. Funkce $f = f(z) \colon X \to \mathbb{C}$ je *spojitá*, pokud

$$\forall\, u \in X\ \forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta \left(z \in X \wedge |z - u| < \delta \to |f(z) - f(u)| < \varepsilon\right).$$

Ekvivalentně řečeno, $f \colon X \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, pokud

$$\forall\, (z_n) \subset X\ \forall\, z \in X \left(\lim z_n = z \Rightarrow \lim f(z_n) = f(z)\right).$$

Stejně jako v reálném případu je zúžení spojité komplexní funkce spojité.

$\mathbb{R}$ bereme jako podmnožinu $\mathbb{C}$ a dokážeme, že každá spojitá funkce

$$f \colon X \to \mathbb{R}$$

definovaná na neprázdné kompaktní množině $X \subset \mathbb{C}$ nabývá svou nejmenší hodnotu:

$$\exists\, u \in X\ \forall\, v \in X \left(f(u) \leq f(v)\right)\ .$$

Kdyby obraz $f[X] \subset \mathbb{R}$ byl zdola neomezený, existovala by taková posloupnost $(z_n) \subset X$, že $\lim f(z_n) = -\infty$. Podle kompaktnosti $X$ by pak ale existovala konvergentní podposloupnost $(z_{m_n})$ s limitou $u \in X$. Ze spojitosti $f$ by byla

$\lim f(z_{m_n}) = f(u)$, ve sporu s tím, že též $\lim f(z_{m_n}) = -\infty$. Takže množina $f[X]$ je zdola omezená a máme reálné číslo

$$A := \inf(f[X]) \ .$$

Podle aproximace infima existuje posloupnost $(z_n) \subset X$, že

$$\lim f(z_n) = A \ .$$

Podle kompaktnosti $X$ existuje konvergentní podposloupnost $(z_{m_n})$ s limitou $u \in X$. Ze spojitosti $f$ je $\lim f(z_{m_n}) = f(u)$. Tedy $f(u) = A$ a $f(u) = A \leq f(v)$ pro každé $v \in X$, protože $A$ je infimum množiny $f[X]$.

Jsme připraveni na první redukční krok důkazu Zvalg.

**Tvrzení 2.8.5 (redukce)** *Pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $u \in \mathbb{C}$ má rovnice $z^n = u$ řešení $z \in \mathbb{C}$, pak každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.*

**Důkaz.** Nechť $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ a $a_n \neq 0$, je nekonstantní komplexní polynom. Z předpokladu odvodíme, že má kořen. Použijeme spojitou funkci

$$f(z) := |p(z)| \colon \mathbb{C} \to [0, +\infty)$$

a najdeme $u \in \mathbb{C}$, že $f(u) = 0$. Pak i $p(u) = 0$ a $u$ je kořen polynomu $p(z)$.

Nechť reálné číslo $K > 0$ je tak velké, že když $|z| \geq K$, pak

$$\frac{|a_n| \cdot |z|^n}{2} \geq |a_0| \ \text{ a } \ \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |z|^{j-n} \leq \frac{|a_n|}{2} \ .$$

Tedy

$$|z| \geq K \Rightarrow f(z) = |p(z)| \geq |z|^n \left( |a_n| - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |z|^{j-n} \right) \geq |a_0| = f(0) \ .$$

Vezmeme obdélník

$$R := \{a + bi \mid -K \leq a,\, b \leq K\} \subset \mathbb{C} \ .$$

Patrně $z \in \mathbb{C} \setminus R \Rightarrow |z| > K$. Z hořejší přípravy víme, že $R$ je kompaktní množina a že tak existuje $u \in R$, pro něž $f(u) \leq f(v)$ pro každé $v \in R$. Protože $0 \in R$, je $f(u) \leq f(0)$. Podle hořejšího odhadu tedy dokonce

$$\forall\, v \in \mathbb{C} \, \big( f(u) \leq f(v) \big)$$

a $f(u)$ je nejmenší hodnota funkce $f(z)$ na celé komplexní rovině $\mathbb{C}$.

Pomocí předpokladu o $n$-tých odmocninách ukážeme, že $f(u) = 0$. Za tím účelem polynom $p(z)$ „přecentrujeme“ z 0 do $u$: vyjádříme ho místo v bázi $\{z^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ v bázi $\{(z-u)^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ jako lineární kombinaci

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j (z-u)^j, \ b_j \in \mathbb{C} \ \text{ a } \ b_n = a_n \ .$$

Pro spor předpokládáme, že $f(u) = |p(u)| = |b_0| > 0$. Poblíž $u$ nalezneme $v \in \mathbb{C}$, že $f(v) = |p(v)| < |b_0| = f(u)$, což bude spor, a tedy $f(u) = 0$.

Polynom $p(z)$ napíšeme ve tvaru

$$p(z) = b_0 + b_k(z-u)^k + \underbrace{b_{k+1}(z-u)^{k+1} + \cdots + b_n(z-u)^n}_{q(z)} ,$$

kde $b_0 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ a $b_k \neq 0$. Použijeme předpoklad o odmocninách a vezmeme takové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že

$$\alpha^k = -\frac{b_0}{b_k} .$$

Je jasné, že pro $z \to u$ je $q(z) = o((z-u)^k)$. Vezmeme tedy čísla $\delta \in (0, 1)$ a $v := u + \delta\alpha \in \mathbb{C}$ tak, že

$$|q(v)| \leq |b_0| \cdot \frac{\delta^k}{2} .$$

Pak ale

$$\begin{aligned} f(v) = |p(v)| &= |b_0 + b_k\delta^k\alpha^k + q(v)| \leq |b_0 + b_k\delta^k\alpha^k| + |q(v)| \\ &= |b_0 - b_0\delta^k| + |q(v)| = |b_0|(1-\delta^k) + |q(v)| \\ &\leq |b_0|(1-\delta^k/2) \\ &< |b_0| = f(u) \end{aligned}$$

a $f(v) < f(u)$, jak jsme chtěli. □

Druhý krok důkazu Zvalg si žádá další přípravu. Pro reálné $r > 0$ a $u \in \mathbb{C}$ se množina

$$B(u, r) := \{v \in \mathbb{C} \mid |v-u| < r\}$$

nazývá *(otevřenou) koulí (se středem $u$ a poloměrem $r$)*. Vždy $u \in B(u, r)$, takže $B(u, r) \neq \emptyset$. Množina $X \subset \mathbb{C}$ je *otevřená*, pokud

$$\forall\, u \in X\ \exists\, r\, \big(B(u, r) \subset X\big) .$$

Lehce se vidí, že množiny $\emptyset$ a $\mathbb{C}$ jsou otevřené, že každá koule je otevřená, že sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina a že průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Dále není těžké vidět, že pro každou množinu $X \subset \mathbb{C}$ platí, že

$$\begin{aligned} &\text{funkce } f\colon X \to \mathbb{C} \text{ je spojitá} \iff \\ &\iff \forall \text{ otevřenou } A\ \exists \text{ otevřená } B\ \big(f^{-1}[A] = X \cap B\big) . \end{aligned}$$

Množina $X \subset \mathbb{C}$ je *nesouvislá*, pokud existují takové otevřené množiny $A, B \subset \mathbb{C}$, že

$$(X \subset A \cup B) \wedge (X \cap A \neq \emptyset \neq X \cap B) \wedge (X \cap A \cap B = \emptyset) .$$

V této situaci řekneme, že $A$ *a* $B$ *trhají* $X$. Jinak, pokud takové množiny $A$ a $B$ neexistují, je množina $X$ *souvislá*. Zde je jednoduchá konstrukce souvislých množin: platí, že

$$X, Y \subset \mathbb{C} \text{ jsou souvislé a } X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X \cup Y \text{ je souvislá .}$$

Lehce se totiž vidí, že kdyby $A$ a $B$ trhaly množinu $X \cup Y$, musely by trhat množinu $X$ nebo množinu $Y$.

Ukážeme, že každý reálný interval $I = [a, b] \subset \mathbb{C}$ je souvislý. Nechť pro spor $A$ a $B$ trhají $I$. Můžeme patrně předpokládat, že $a \in A$ a $b \in B$. Nechť

$$c := \sup(A \cap I) \in [a,\, b] \ .$$

Pokud $c \in A$, je $c < b$ podle otevřenosti $B$. Podle otevřenosti $A$ ale i každé $c' \in I$ s $c < c' < b$ a dostatečně blízké $c$ leží v $A$. To je spor s tím, že $c$ má být horní mez množiny $A \cap I$. Pokud $c \in B$, je podobně $a < c$. Podle otevřenosti $B$ ale i každé $c' \in I$ s $a < c' < c$ a dostatečně blízké $c$ leží v $B$, tedy mimo $A$. To je spor s aproximační vlastností suprema $c$.

Ukážeme, že spojitý obraz souvislé množiny je souvislý. Když $X \subset \mathbb{C}$ je souvislá množina a $f\colon X \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, je $f[X]$ souvislá množina. Kdyby $A$ a $B$ trhaly $f[X]$, podle hořejší ekvivalentní formulace spojitosti by jisté dvě otevřené množiny přiřazené k $f^{-1}[A]$ a k $f^{-1}[B]$ trhaly $X$.

Dokážeme, že *jednotková kružnice*

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina. Nechť $I := [-1, 1] \subset \mathbb{C}$ a funkce $f_+, f_-\colon I \to \mathbb{C}$ jsou dané vzorci

$$f_\pm(t) = t \pm i\sqrt{1 - t^2} \ .$$

Jsou patrně spojité a protože $I$ je souvislá množina, obě polokružnice $S^\pm := f_\pm[I]$ jsou souvislé. Z $S^+ \cap S^- \neq \emptyset$ podle hořejší konstrukce plyne, že množina $S = S^+ \cup S^-$ je souvislá. Toť vše, co pro druhý krok důkazu potřebujeme.

**Tvrzení 2.8.6 (existence odmocnin)** *V* $\mathbb{C}$ *existují všechny odmocniny, pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a každé* $u \in \mathbb{C}$ *rovnice* $z^n = u$ *má řešení* $z \in \mathbb{C}$.

**Důkaz.** Existenci $n$-té odmocniny z $u$ nejprve dokážeme ve dvou speciálních případech: (i) když $u \geq 0$ je nezáporné reálné číslo a (ii) když $n = 2$. Pro $n = 1$ ovšem také triviálně existuje. Případ (i) je vyřešený Bolzano–Cauchyovou větou 1.6.16. (ii) Nechť $n = 2$ a $u = a + bi \in \mathbb{C}$. Hledáme $v = c + di \in \mathbb{C}$, že $(c + di)^2 = a + bi$, aby tedy platila soustava rovnic $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$$c^2 - d^2 = a \wedge 2cd = b \ .$$

První rovnici vynásobíme $4c^2$, přičteme čtverec druhé rovnice a dostaneme rovnici $4c^4 = 4c^2a + b^2$, tj. kvadratickou rovnici $4(c^2)^2 - 4ac^2 - b^2 = 0$ v neznámé $c^2$. Pro $c$ pak máme řešení

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{8}\left(4a + \sqrt{16a^2 + 16b^2}\right)} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \ .$$

Podobné úpravy vedou k

$$d = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \,.$$

Tyto hodnoty $c$ a $d$ splňují první rovnici soustavy s jakoukoli volbou znamének. Druhou rovnici splňují pro $b \geq 0$ se znaménky shodnými a pro $b < 0$ s opačnými.

Případy (i) a (ii) nám umožňují redukovat řešení rovnice $z^n = u$ s danými $u \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ na situaci, že $|u| = 1$ a $n$ je liché číslo. Plyne to jednoduše z vyjádření libovolného $n \in \mathbb{N}$ jako $n = 2^k l$, kde $k \in \mathbb{N}_0$ a $l \in \mathbb{N}$ je liché číslo, a z rovnosti $|u/|u|| = 1$ platné pro každé nenulové $u \in \mathbb{C}$.

Buď tedy dáno liché $n \in \mathbb{N}$ a $u \in \mathbb{C}$ s $|u| = 1$. Číslo $u$ leží na jednotkové kružnici $S \subset \mathbb{C}$ a hledáme takové $z \in S$, že $z^n = u$. Potřebujeme dokázat, že spojitá funkce

$$f(z) = z^n \colon S \to S$$

je na. Díky lichému exponentu $n$ se $f(-z) = -f(z)$. Pro spor nechť $f$ není na a tedy existuje bod

$$w \in S \setminus f[S] \,.$$

Pak i $-w \in S \setminus f[S]$. Nechť $\ell \subset \mathbb{C}$ je přímka jdoucí body $w$ a $-w$. Dostáváme rozklad

$$\mathbb{C} = A \cup \ell \cup B$$

komplexní roviny $\mathbb{C}$ na přímku $\ell$ a dvě otevřené poloroviny $A$ a $B$ tvořící její doplněk do $\mathbb{C}$. Jistě

$$(A \cup B) \cap S = S \setminus \{w, -w\}, \;\; A = -B := \{-z \mid z \in B\}$$

a

$$\{1, -1\} \subset f[S] \cap (A \cup B) \,.$$

Vidíme, že $A$ a $B$ trhají množinu $f[S]$ a ta je nesouvislá. To je ale spor. Jak víme, množina $S$ je souvislá, takže i množina $f[S]$ je souvislá jako obraz souvislé množiny spojitým zobrazením. Proto $f[S] = S$ a každé $u \in S$ má $n$-tou odmocninu. □

Tvrzení 2.8.5 a 2.8.6 dohromady dokazují větu 2.8.4. Nepoužili jsme exponenciální funkci ani sinus či kosinus, s jejichž pomocí se obvykle existence komplexních odmocnin zdůvodňuje. Předvedli jsme, jak se Zvalg dá dokázat bez těchto speciálních funkcí, jen s pomocí základní topologie a aritmetiky komplexní roviny.

## 2.9 Algebraická a transcendentní čísla

Dokážeme pět vět o algebraických a transcendentních komplexních číslech. Pak uvedeme jednu slavnou větu bez důkazu. Věta 2.9.1 ukazuje, že množina algebraických čísel je jenom spočetná a tedy existuje velmi mnoho transcendentních

čísel. Podle věty 2.9.2 je součet, součin a podíl dvou algebraických čísel opět algebraické číslo. Liouvilleova nerovnost ve větě 2.9.3 dává v důsledku 2.9.4 explicitní transcendentní číslo. Je dobře známo, že z identity

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$$

plyne, že existují iracionální reálná čísla $a, b > 0$ s $a^b \in \mathbb{Q}$. Nedostáváme je však explicitně: $b = \sqrt{2}$, ale nevíme (no, podle Gelfond–Schneiderovy věty níže víme), zda $a = \sqrt{2}$ nebo $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Věta 2.9.5 uvádí explicitní příklad takových čísel $a$ & $b$. Ve větě 2.9.6 dokážeme transcendenci Eulerova čísla e. Konečně podle Gelfond–Schneiderovy věty 2.9.7, kterou uvádíme bez důkazu, hodnota mocniny $u^v$ pro algebraická komplexní čísla $u \neq 0$ a $v$ není transcendentní, pouze když $u = 1$ nebo $v \in \mathbb{Q}$.

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je *algebraické*, je-li kořenem nenulového racionálního polynomu, to jest $p(\alpha) = 0$ pro nějaký nenulový polynom $p \in \mathbb{Q}[z]$ (s racionálními koeficienty). Jinak $\alpha$ nazveme *transcendentním* číslem. Množina algebraických čísel se označuje jako $\overline{\mathbb{Q}}$. Velkým úspěchem Cantorovy teorie množin byl jednoduchý důkaz existence transcendentních čísel.

**Věta 2.9.1 (Cantorova o transcendentních číslech)** *Množina $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ je spočetná. Tudíž množina transcendentních čísel $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ je nespočetná a tedy jistě neprázdná. Totéž platí pro reálná transcendentní čísla $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$.*

**Důkaz.** Spočetnost množiny $\overline{\mathbb{Q}}$ plyne hned z vyjádření

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}[z] \setminus \{f_0\}} Z_{\mathbb{C}}(p) \,.$$

Každá množina komplexních kořenů $Z_{\mathbb{C}}(p) := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0\}$ má nejvýše $\deg p \in \mathbb{N}_0$ prvků. Množina $\mathbb{Q}[z] \setminus \{f_0\}$ je jistě spočetná, protože je nekonečná a máme injekci z ní do množiny

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{Q}^3 \cup \dots \,.$$

Tato množina je spočetná, protože $\mathbb{Q}$ je spočetná. Použijeme tak několikrát (patrně nekonečně krát) větu 2.1.8, s důkazem vyžadujícím AC, podle níž je nejvýše spočetné sjednocení nejvýše spočetných množin nejvýše spočetná množina. Tedy $\overline{\mathbb{Q}}$ je spočetná.

Jak ale víme z důsledku 1.7.17, množina $\mathbb{R}$, a tedy i její nadmnožina $\mathbb{C}$, je nespočetná. Takže množina transcendentních čísel $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ je nespočetná. □

Zajímavě o tomto Cantorově úspěchu píše R. Gray v článku [71].

Dokážeme, že algebraičnost se zachovává aritmetickými operacemi.

**Věta 2.9.2 (těleso algebraických čísel)** *Součet, součin a podíl dvou algebraických čísel je algebraické číslo.*

**Důkaz.** Je lehké dokázat, že pro každé nenulové algebraické číslo $\beta$ je jeho převrácená hodnota $1/\beta$ též algebraická:

$$\textstyle\sum_{j=0}^{n} b_j\beta^j = 0 \rightsquigarrow \sum_{j=0}^{n} b_j\left(\beta^{-1}\right)^{n-j} = 0/\beta^n = 0$$

($n \in \mathbb{N}$, $b_j \in \mathbb{Q}$ a $b_n \neq 0$). Předpoklad $\beta \neq 0$ teď vynecháme a předpokládáme, že také

$$\textstyle\sum_{j=0}^{m} a_j\alpha^j = 0 \quad (m \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{Q}\ \&\ a_m \neq 0).$$

Můžeme předpokládat, že $a_m = b_n = 1$. Pak se lehce vidí, že každá mocnina $\alpha^i$, resp. $\beta^j$, s $i, j \in \mathbb{N}_0$ je lineární kombinace mocnin 1, $\alpha$, …, $\alpha^{m-1}$, resp. 1, $\beta$, …, $\beta^{n-1}$, s racionálními koeficienty. Tedy každé z $mn + 1$ čísel

$$S = (1,\ \alpha + \beta,\ (\alpha + \beta)^2,\ \ldots,\ (\alpha + \beta)^{mn})$$

je lineární kombinace $mn$ monomů $\alpha^i\beta^j$, $0 \leq i < m$ a $0 \leq j < n$, s racionálními koeficienty. Lineární algebra nám říká, že potom existuje lineární kombinace čísel v $S$ s racionálními koeficienty, ne všemi nulovými, jež se rovná 0. To ale znamená, že $\alpha + \beta$ je algebraické číslo. Pro $\alpha\beta$ argumentujeme podobně a pro $\alpha/\beta$ použijeme vyjádření $\alpha/\beta = \alpha \cdot 1/\beta$. □

Cantorovy úvahy ale o třicet let předešel francouzský matematik J. Liouville (viz oddíl C.1), který v roce 1844 nalezl první příklady transcendentních čísel. Jeho metodu si teď ukážeme. V důkazu následující nerovnosti použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. *Stupeň* algebraického čísla $\alpha$ definujeme jako minimální stupeň $\deg p$ nenulového polynomu $p \in \mathbb{Q}[z]$ s $p(\alpha) = 0$.

**Věta 2.9.3 (Liouvilleova nerovnost)** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je iracionální algebraické číslo stupně $n$ (takže $n \geq 2$). Pak existuje konstanta $c = c(\alpha) > 0$, že pro každý zlomek $\frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ platí nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{k}{l}\right| \geq \frac{c}{l^n}\ .$$

**Důkaz.** Nechť $\alpha$ je, jak uvedeno, $p \in \mathbb{Q}[z]$ je nenulový polynom s $\deg p = n$ & $p(\alpha) = 0$ a $\frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ je libovolný zlomek. Můžeme patrně předpokládat, že $p \in \mathbb{Z}[z]$ a že $l > 0$. Odhadneme zdola nenulovou vzdálenost $|\alpha - k/l|$.

Nechť $I := [\alpha - 1, \alpha + 1]$. Pokud $\frac{k}{l} \notin I$, máme triviální odhad

$$\left|\alpha - \frac{k}{l}\right| \geq 1 \geq \frac{1}{l^n}\ .$$

Nechť $\frac{k}{l} \in I$. Pro funkci $p(z)$ a interval $I(\alpha, \frac{k}{l}) \subset I$ s krajními body $\alpha$ a $\frac{k}{l}$ použijeme Lagrangeovu větu 11.1.4 o střední hodnotě:

$$\frac{p(\alpha) - p(k/l)}{\alpha - k/l} = p'(\xi) \quad (\neq 0)$$

pro nějaké číslo $\xi$ ležící mezi $\alpha$ a $\frac{k}{l}$, speciálně $\xi \in I$. Patrně $p(\alpha) = 0$. Dále

$$|p(k/l)| \geq \frac{1}{l^n} ,$$

protože $p(k/l) \neq 0$ (jinak bychom $p(z)$ vydělili $z - \frac{k}{l}$ a dostali bychom nenulový racionální polynom stupně $n-1$ s kořenem $\alpha$) a $p(k/l)$ lze vyjádřit zlomkem se jmenovatelem $l^n$ a celočíselným čitatelem. Takže teď

$$\left|\alpha - \frac{k}{l}\right| \geq \frac{1/|p'(\xi)|}{l^n} \geq \frac{1/d}{l^n} ,$$

kde $d := \max(\{|p'(z)| \mid z \in I\}) \in (0, +\infty)$ (věta 8.4.1). Liouvilleova nerovnost tak platí s konstantou

$$c := \min(\{1,\, 1/d\}) .$$

□

**Důsledek 2.9.4** *Reálné číslo*

$$\lambda := \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!} = 0.110001000000000000000001000\ldots$$

*je transcendentní.*

**Důkaz.** Číslo $\lambda$ je iracionální, protože nemá eventuálně periodický desetinný rozvoj. Ukážeme, že se dá tak dobře aproximovat zlomky, že to porušuje Liouvilleovu nerovnost. Z toho hned plyne jeho transcendence. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažme zlomky

$$\frac{k_n}{l_n} = \frac{k_n}{10^{n!}} := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^{i!}} .$$

Díky součtu jisté geometrické řady je

$$\left|\lambda - \frac{k_n}{l_n}\right| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} \cdot \frac{1}{1 - 1/10^{n!}} \leq \frac{1}{l_n^n} .$$

Nechť $c > 0$ je libovolná konstanta a $m \in \mathbb{N}$ je hypotetický stupeň čísla $\lambda$. Vezmeme tak velké $n > m$, že $1/l_n^{n-m} < c$ (což lze, $l_n \geq 10$). Pak

$$\left|\lambda - \frac{k_n}{l_n}\right| \leq \frac{1}{l_n^n} = \frac{1/l_n^{n-m}}{l_n^m} < \frac{c}{l_n^m}$$

a máme spor s Liouvilleovou nerovností. Číslo $\lambda$ tedy není algebraické. □

Existují kladná iracionální reálná čísla $a$ & $b$, že $a^b$ je racionální číslo? Ukazuje se, že není moc obtížné je nalézt.

**Věta 2.9.5 (irac. umocněno na irac. může dáti rac.)** *V identitě*

$$a^b := \left(\sqrt{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(2)} = 2 \in \mathbb{Q}$$

*jsou kladná reálná čísla a & b iracionální.*

**Důkaz.** Je jasné, že $a = \sqrt{3}$ je iracionální číslo. Zbývá ukázat, že $b = \log_{\sqrt{3}}(2)$ je také iracionální. Pro spor nechť $b = p/q \in \mathbb{Q}$ s $p, q \in \mathbb{N}$. Pak

$$\left(\sqrt{3}\right)^{p/q} = 2 \rightsquigarrow 3^p = 2^{2q} \ .$$

Protože 2 a 3 jsou prvočísla, dostáváme, že 2 dělí 3 (i naopak), což je pochopitelně nemožné. □

Transcendenci čísla $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ dokázal jako první v roce 1873 francouzský matematik Ch. Hermite (viz oddíl C.1). Ukážeme si pozdější a jednodušší důkaz z roku 1890 od D. Hilberta (viz oddíl C.1).

**Věta 2.9.6 (transcendence** e**)** *Eulerovo číslo* $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ *je transcendentní.*

**Důkaz.** Vyjdeme z identity v tvrzení 20.1.1, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ se nevlastní Riemannův integrál $\int_0^{+\infty} x^n \exp(-x) = n!$. Pro každý celočíselný polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_j \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, pak máme zobecnění

$$\int_0^{+\infty} p(x) \exp(-x) = \sum_{j=0}^{n} a_j j! \ .$$

Pro spor buď e algebraické číslo. Můžeme tak předpokládat, že

$$a_0 + a_1 \mathrm{e} + \cdots + a_n \mathrm{e}^n = 0 \ ,$$

kde $a_j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $a_0 \neq 0$ (kdyby $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$ & $a_k \neq 0$, rovnici vydělíme číslem $\mathrm{e}^k$). S polynomy $p_m(x) := x^m((x-1)(x-2)\ldots(x-n))^{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, pak máme rovnosti

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 + a_1 \mathrm{e} + \cdots + a_n \mathrm{e}^n) \int_0^{+\infty} p_m(x) \exp(-x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{e}^j \int_0^j p_m(x) \exp(-x) + \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{e}^j \int_j^{+\infty} p_m(x) \exp(-x) \\ &=: P_m + Q_m \ . \end{aligned}$$

Veličina $P_m$ roste v $m$ nejvýše exponenciálně: lehce se vidí, že

$$|P_m| \leq (n+1) A \mathrm{e}^n n \left(n^{n+1}\right)^{m+1}, \quad A := \max(\{|a_0|, \ldots, |a_n|\}) \ .$$

Vždy $Q_m \in \mathbb{Z}$, protože $\mathrm{e}^j \int_j^{+\infty} p_m(x)\exp(-x)$ se díky linearitě nevlastních integrálů, díky tvrzení 5.3.5 a díky substituci v nevlastních integrálech rovná

$$\int_j^{+\infty} p_m(x)\exp(-(x-j)) = \int_0^{+\infty} p_m(x+j)\exp(-x) \in \mathbb{Z}\,.$$

Odtud, z definice polynomů $p_m(x)$ a z hořejší identity dokonce vidíme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ je

$$Q_m \equiv \pm a_0(n!)^{m+1} \cdot m! \pmod{(m+1)!}\,.$$

Pokud $Q_m = 0$, vydělíme $m!$ a dostaneme, že $m+1$ dělí $\pm a_0(n!)^{m+1}$. Pro $m+1$ nesoudělné s $a_0 \cdot n!$ ale tato dělitelnost nemůže nastat. Díky $a_0 \neq 0$ tedy existuje nekonečně mnoho čísel $m \in \mathbb{N}$, že $Q_m \neq 0$. Pro ně ale $|Q_m| \geq m!$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je tedy $P_m + Q_m = 0$ a $|P_m| \leq c^m$, kde $c > 1$ je konstanta vzhledem k $m$, ale současně $|Q_m| \geq m!$ pro nekonečně mnoho $m \in \mathbb{N}$. Je to spor. $\square$

V roce 1900 D. Hilbert přednesl na (druhém) *Mezinárodním kongresu matematiků* v Paříži slavný seznam problémů, které měly zaměstnat matematiky ve 20. století. Sedmý z nich požadoval dokázat, že hodnota mocniny $u^v$ pro algebraická čísla $u, v \in \mathbb{C}$ je, kromě zřejmých výjimek, vždy transcendentní. Zhruba v roce 1934, ještě za Hilbertova života, to pak nezávisle na sobě dokázali sovětský matematik A. O. Gelfond a německý matematik Th. Schneider (píšeme o nich v oddílu C.1). Jejich řešení sedmého Hilbertova problému se někdy nazývá *Gelfond–Schneiderovou větou.* Než ji přesně uvedeme, musíme vysvětlit, co se rozumí hodnotou mocniny $u^v$ pro komplexní čísla $u$ a $v$. Začneme komplexním logaritmem. Pokud $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$\operatorname{Log} u := \{z \in \mathbb{C} \mid \exp z = u\}\,,$$

kde $\exp z = \sum_{j\geq 0} z^j/j!$. Pro každé $u$ je $\operatorname{Log} u$ spočetná množina tvaru $\{z_0 + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Např. pro $u = -1$ se $z_0 = \pi i$. Pro každé $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$, pak klademe

$$u^v := \{\exp(vw) \mid w \in \operatorname{Log} u\}\,.$$

Pro reálné $u > 0$ a $v$ je hodnota reálné mocniny $u^v$ z oddílu 5.3 vždy prvkem této množiny.

**Věta 2.9.7 (Gelfond–Schneider)** *Nechť $u$ a $v$ jsou algebraická komplexní čísla, přičemž $u \neq 0, 1$ a $v \notin \mathbb{Q}$. Potom každá hodnota mocniny $u^v$ je transcendentní číslo.*

Takže třeba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je transcendentní a tedy iracionální číslo a

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$$

je vedle věty 2.9.5 další příklad jevu $\mathrm{irac}^{\mathrm{irac}} = \mathrm{rac}$. Do poměrně technického důkazu G.–S. věty se zde nebudeme pouštět. Je třeba v mém (on-line dostupném) učebním textu [93].

## 2.10 Užití axiomu výběru

## 2.11 Jazyk logiky prvního řádu

Vlastně podrobně rozvineme a zpřesníme podkapitolu 1.2 věnovanou logickému a množinovému značení. Toto značení teď zavedeme a probereme mnohem důkladněji. *Jazyk (logiky) prvního řádu*, anglickou zkratkou FOL, je založen na *pomocných symbolech*, *strukturálních symbolech* a *logických symbolech* (toto rozdělení symbolů je naše, není standardní), pomocí nichž se zapisují termy a formule.

**Definice 2.11.1 (pomocné symboly)** *Jsou tři: levá závorka (, pravá závorka ) a čárka , . Tříprvkovou množinu pomocných symbolů označíme jako $H$.*

**Definice 2.11.2 (strukturální symboly)** *Strukturální symboly jsou dané fixovanou spočetnou množinou proměnných*

$$V = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

*a zadanou množinou $F$ symbolů pro funkce (funkčních symbolů).*

**Definice 2.11.3 (logické symboly)** *Je to sedm standardních symbolů*

$$L := \{\, \vee \ \wedge \ \rightarrow \ \leftrightarrow \ \neg \ \exists \ \forall \,\}$$

*pro logické spojky (po řadě: disjunkce, konjunkce, implikace, ekvivalence, negace) a kvantifikátory (po řadě: existenční, obecný) a zadaná množina $P$ symbolů pro predikáty.*

Dále je zadána arita, česky snad „četnost“, funkce

$$a\colon F \cup P \rightarrow \mathbb{N}_0$$

určující, kolik argumentů má daná funkce či daný predikát.

**Definice 2.11.4 (termy)** *Nechť $H$, $V$, $F$, $a\colon F \rightarrow \mathbb{N}_0$ jsou jako výše. Termy, přesněji a-termy, jsou právě a jen ta neprázdná slova nad abecedou*

$$H \cup V \cup F\,,$$

*která se získají konečně mnoha použitími čtyř následujících pravidel.*

1. *Všechny proměnné $x \in V$ a všechny konstanty $f \in F$ (slova délky 1) jsou termy.*
2. *Má-li $f \in F$ četnost $a[f] = 1$ a $t$ je term, je složené slovo*

   $$f(t)$$

   *délky $|t| + 3$ term.*

3. *Má-li $f \in F$ četnost $a[f] = 2$ a $t$ a $u$ jsou termy, je složené slovo*

$$(tfu)$$

*délky $|t| + |u| + 3$ term.*

4. *Má-li $f \in F$ četnost $a[f] = k \geq 3$ a $t_1, \ldots, t_k$ je $k$ termů, je složené slovo*

$$f(t_1, t_2, \ldots t_k)$$

*délky $\sum_{i=1}^{k} |t_i| + k + 2$ term.*

**Tvrzení 2.11.5 (rozeznání termů)** *V důkazu načrtneme algoritmus, který pro každé vstupní slovo nad abecedou $H \cup V \cup F$ po konečně mnoha krocích určí, zda se jedná o term.*

**Důkaz.**

□

*Nekřížící se rozklad*, krátce *NC (non-crossing) rozklad*, je každý takový rozklad $R$ množiny $[2n]$, $n \in \mathbb{N}_0$, na $n$ dvouprvkových bloků, že pro žádné dva bloky $\{a < b\}, \{c < d\} \in R$ neplatí, že

$$a < c < b < d\ .$$

*Závorkování* je každé slovo $u = a_1 a_2 \ldots a_k$ nad dvouprvkovou abecedou $\{(,)\}$ složenou z levé závorky ( a pravé závorky ). *Dobré uzávorkování* pro dané závorkování $u = a_1 a_2 \ldots a_{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, je takový NC rozklad $R$ množiny $[2n]$, že pro každý blok $\{i < j\} \in R$ platí, že

$$a_i = (\ \text{ a } \ a_j =)\ .$$

Význam následující kombinatorické věty pro syntaxi matematické logiky je zásadní (a nezřídka nedoceňovaný). Její název odkazuje na standardní anglický termín „unique reading lemma“.

**Věta 2.11.6 (o jednoznačném čtení)** *Každé závorkování $u = a_1 a_2 \ldots a_{2n}$ má nejvýše jedno dobré uzávorkování.*

**Důkaz.**

□

## 2.12 Co je pravda? Co je důkaz?

*Kapitán bubnoval prsty o opěradlo židle. Nevěřím ti, pronesl.*
*John Grady neodpověděl.*
*Tohle nejsou fakta.*

*Pootočil se na židli a vyhlédl z okna.*

*To nejsou fakta, opakoval. Otočil se a přes rameno pohlédl na vězně.*

*Tady máš příležitost říkat pravdu. Tady. Za tři dny pojedete do Saltilla a pak už nebudete mít příležitost. Bude pryč. Potom bude pravda v jiných rukou. Rozumíš. Tady můžeme udělat pravdu. Nebo ji ztratit. Ale až odtud odjedeš, bude pozdě. Moc pozdě na pravdu. Pak tě budou mít v rukou jiní. Kdo ví, jaká pak bude pravda? Jaká bude potom? A budeš si za to moct sám. Uvidíš.*

*Pravda je jenom jedna, prohlásil John Grady. A pravda je to, co se stalo. Není to jenom to, co někdo napovídá.*

C. McCarthy, [118, str. 165–166]

V matematických, ale i jiných, textech často čteme o pravdě. Některá tvrzení, lemmata, věty platí, jsou pravdivé. Něco je pravda. Něco jiného zas ne. Ale už málo čteme, rozhodně v učebnicích analýzy, něco bližšího o tom, co pravda přesně je. Základní pojmy by měly být definované a vysvětlené, alespoň nějak. Zde se o to pokusíme. Necháme-li stranou přístupy popsané slovy jako nahlédnutí, prohlédnutí, osvícení, nazření a podobně, bývá pravda získávána pomocí důkazů. Ty v tomto oddílu definujeme a vysvětlíme též.

Podívejme se na takzvaný *paradox lháře.*

$L$: **Tato věta není pravdivá.**

Rozumí se, že zájmeno „Tato“ odkazuje právě na výše napsanou, odsazenou větu $L$, ne na nějakou jinou o pět řádek výše. $L$ vlastně říká **Já jsem nepravdivá věta.** Je to skutečný paradox. Pokud $L$ je pravdivá, pak to, co tvrdí, věrně popisuje stav věcí ve světě a ve světě to platí. Co tedy $L$ tvrdí? Že $L$ není pravdivá. Od předpokladu pravdivosti $L$ jsme dospěli k jeho záporu a máme spor. Vezměme tedy komplementární předpoklad, že $L$ není pravdivá. Předpokládáme tedy takový stav věcí ve světě, že $L$ není pravdivá. To ale přesně je, co $L$ tvrdí. Podle intuitivního chápání pojmu pravda tedy $L$ je pravdivá. Opět jsme dospěli k záporu předpokladu a opět máme spor.

Paradox lháře bývá nezřídka odmítán argumentem, že věta $L$ je sebevztažná a proto nesmyslná a není třeba se jí zabývat (viz diskuse v [186]). Řekne se třeba, že sebevztažná věta nemá jasně definovanou pravdivostní hodnotu, tedy nemá smysl se bavit o tom, zda je pravdivá nebo nepravdivá, a tedy je záležitost s paradoxem lháře vyřízená. Na to lze namítnout dvě věci.

Za prvé, odmítač paradoxu lháře se spokojuje s prvním dojmem a nedotahuje svou argumentaci do konce. Pokud je $L$ nesmyslná a nemá definovanou pravdivostní hodnotu, pak speciálně není pravdivá (čímž nemyslíme, že má pravdivostní hodnotu nepravda). To ale odpovídá tomu, co $L$ tvrdí. Takže nakonec $L$ má pravdivostní hodnotu, dokonce hodnotu pravda, ale my máme zase spor a paradox.

Za druhé, odmítač paradoxu lháře odmítá větu $L$ na základě toho, že je sebevztažná. Jak se to ale pozná? Sebevztažnosti věty lze dosáhnout mnoha způsoby a dá se zamaskovat, jak to popisuje A. Tarski (viz oddíl C.1) ve svém

popularizačním článku [165]. Jeden způsob ([185, str. 2]), jak nepřímo dosáhnout sebevztažnosti, vymyslel americký logik a filosof W. Van Orman Quine (viz oddíl C.1). Napíšeme následující větu, ve které relaxujeme školské konvence a začneme ji malým písmenem a neukončíme tečkou.

> $L'$: **„po připojení za svou citaci vytvoří větu, která není pravdivá“ po připojení za svou citaci vytvoří větu, která není pravdivá**

$L'$ nás tedy nabádá, abychom vzali výraz $V$ ve „$V$“, vytvořili jeho citaci, což je „$V$“, a za ni připojili $V$, což dá výraz „$V$“ $V$. $L'$ také tvrdí, že vzniklý výraz je věta, která není pravdivá. Efekt je tak týž jako u věty $L$.

Paradox lháře

## 2.13 ZFC

## 2.14 Tvrditelnost (Assertibility)

# Kapitola 3

# Přednáška 2. Existence limit posloupností

V oddílu 3.1 kapitoly doplňující druhou přednášku

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred2.pdf`

z 29. 2. 2024 zavedeme aritmetiku nekonečen a rozšířenou reálnou osu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,.$$

V tvrzení 3.1.7 dokážeme, že v $(\mathbb{R}^*, <)$ má každá podmnožina infimum i supremum. Věty 3.1.9 a 3.1.10 podrobně popisují aritmetiku nekonečen. Definujeme okolí bodů a nekonečen. Hlavní definice 3.1.16 zavádí současně vlastní i nevlastní limitu reálné posloupnosti. Definice 3.1.17 zavádí robustnost vlastností posloupností.

Oddíl 3.2 je věnován hlavně podposloupnostem. Věta 3.2.5 uvádí, že každá reálná posloupnost má podposloupnost s limitou, a pomocí podposloupností charakterizuje situace, kdy limita posloupnosti vůbec neexistuje, popřípadě se nerovná zadanému prvku $A \in \mathbb{R}^*$. V tvrzení 3.2.10 spočítáme, že $\lim n^{1/n} = 1$. Potřebujeme k tomu binomickou větu, kterou připomeneme v úloze 3.2.9.

Oddíl 3.3 obsahuje pět vět o existenci limit reálných posloupností. Podle věty 3.3.3 každá monotónní posloupnost má limitu. Ve větě 3.3.9 to zobecníme na kvazimonotónní posloupnosti. Bolzano–Weierstrassova věta 3.3.15 praví, že každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost. Věta 3.3.20 o Cauchyově podmínce ukazuje, že pro reálné posloupnosti je konvergence ekvivalentní cauchyovosti. Podle Feketeho lemmatu ve větě 3.3.25 subaditivita i superaditivita reálné posloupnosti $(a_n)$ zaručuje existenci limity $\lim a_n/n$.

## 3.1 Nekonečna, okolí, limity

• *Značení.* Připomeňme si logické a množinové značení. Dále značení $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ a $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Písmena $i$, $j$, $k$, $l$, $m$, $m_0$, $m_1$, … a $n$, $n_0$, $n_1$, …,

případně s čárkami, označují přirozená čísla a $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $\delta$, $\varepsilon$ a $\theta$, případně s indexy a čárkami, jsou reálná čísla, přičemž $\delta$, $\varepsilon$ a $\theta$ jsou vždy kladná. O prvcích $\mathbb{R}$ mluvíme jako o (reálných) číslech či jako o bodech (na reálné ose). Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je vlastně funkce $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Množiny reálných čísel obvykle označujeme písmeny $M$ a $N$ a mluvíme o nich jako o reálných množinách.

**Úloha 3.1.1** *Negujte výrok*

$$\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta\, \forall\, a,\, b \in M \left( |a - b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon \right) .$$

**Úloha 3.1.2 (trojúhelníková nerovnost)** *Pro každá reálná čísla $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) platí, že*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| .$$

Stručně mluvíme o <u>$\Delta$-ové nerovnosti</u>. Věta 5.1.19 je její nekonečná verze.

• *Počítání s nekonečny.* Pro definici nevlastních limit přidáme k $\mathbb{R}$ dva nové různé prvky, <u>nekonečna</u> $+\infty$ a $-\infty$. Dostaneme tak <u>rozšířenou reálnou osu</u>

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} .$$

Prvky v $\mathbb{R}^*$ značíme $A$, $B$, $K$ a $L$. V následující definici se předpokládá, že aritmetika v $\mathbb{R}$ je známa. Volit <u>shodná znaménka</u> nekonečen (či jiných symbolů) znamená volit v daném výrazu u daných $k$ nekonečen $\pm\infty$ buď všechna horní znaménka, anebo všechna dolní znaménka. Volba <u>nezávislých znamének</u> znamená volit všech $2^k$ možností znamének.

**Definice 3.1.3 (aritmetika v $\mathbb{R}^*$)** *Nechť $N$ a $N'$ jsou nekonečna. Pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ definujeme $\underline{N + A = A + N = N}$, kromě výrazů $+\infty + (-\infty)$ a $-\infty + (+\infty)$, které jsou <u>neurčité</u> (nedefinované). Dále pro každé $A \neq 0$ položíme s příslušnými znaménky $\underline{N \cdot A = A \cdot N = N'}$. Výrazy $0 \cdot N$ a $N \cdot 0$ jsou <u>neurčité</u>. Pro každé $b \in \mathbb{R}$ položíme $\underline{b/N = 0}$ a s příslušnými znaménky $\underline{N/b = N'}$ ($b \neq 0$). Výrazy $A/0$ a $N/N'$ jsou <u>neurčité</u>. Definujeme $\underline{-(\pm\infty) = \mp\infty}$. Konečně $(\mathbb{R}, <)$ rozšíříme o srovnání $\underline{-\infty < +\infty}$ a $\underline{-\infty < b < +\infty}$, $b \in \mathbb{R}$. <u>Neurčité výrazy</u> tedy jsou, se shodnými znaménky a $A \in \mathbb{R}^*$,*

$$\frac{A}{0},\ (\pm\infty) + (\mp\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad a \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty} .$$

Ani aditivní ani multiplikativní inverz nekonečna tak není definovaný, třebaže $-(\pm\infty) = \mp\infty$ a $1/\pm\infty = 0$. „Příslušná znaménka“ jsou dána pravidlem, že součin a podíl stejných (resp. různých) znamének je znaménko $+$ (resp. $-$).

**Definice 3.1.4 (odečítání)** *<u>Rozdíl</u> prvků $A, B \in \mathbb{R}^*$ definujeme jako*

$$A - B = A + (-1) \cdot B = A + (-B) .$$

**Úloha 3.1.5** *Spočtěte hodnoty* $\frac{-\infty}{-2}$, $(-\infty)-(+\infty)$, $-\infty+10$ *a* $\frac{+\infty}{0}$.

**Úloha 3.1.6** $(\mathbb{R}^*, <)$ *je lineární uspořádání.*

Následující tvrzení a dvě věty popisují aritmetiku nekonečen.

**Tvrzení 3.1.7 (inf a sup v $\mathbb{R}^*$)** *V lineárním uspořádání* $(\mathbb{R}^*, <)$ *má každá množina* $X \subset \mathbb{R}^*$ *infimum i supremum.*

**Důkaz.** Dokážeme existenci $\sup(X)$. Pro infimum je argument podobný. $H(X)$ $(\subset \mathbb{R}^*)$ je množina horních mezí množiny $X$. Pro $X = \emptyset$ se $H(\emptyset) = \mathbb{R}^*$ a

$$\sup(\emptyset) = \min(H(\emptyset)) = \min(\mathbb{R}^*) = -\infty\ .$$

Pro $X = \{-\infty\}$ se $H(\{-\infty\}) = \mathbb{R}^*$ a opět

$$\sup(\{-\infty\}) = \min(H(\{-\infty\})) = \min(\mathbb{R}^*) = -\infty\ .$$

Pro $+\infty \in X$ se $H(X) = \{+\infty\}$ a

$$\sup(X) = \min(H(X)) = \min(\{+\infty\}) = +\infty\,.$$

Zbývá případ, že $X \neq \emptyset, \{-\infty\}$ a $+\infty \notin X$. Nechť $X' = X \setminus \{-\infty\}$. Pak $X' \neq \emptyset$ a $X' \subset \mathbb{R}$. Když $X'$ není v LU $(\mathbb{R}, <)$ shora omezená, potom $H(X) = \{+\infty\}$ a

$$\sup(X) = \min(H(X)) = \min(\{+\infty\}) = +\infty\ .$$

Konečně pokud $X'$ je v LU $(\mathbb{R}, <)$ shora omezená, pak supremum

$$\sup_{(\mathbb{R}^*,\,<)}(X) = \sup_{(\mathbb{R},\,<)}(X') \in \mathbb{R}$$

existuje díky úplnosti $(\mathbb{R}, <)$, viz věta 1.6.14. □

**Úloha 3.1.8** *Nalezněte všechny množiny* $X \subset \mathbb{R}^*$, *pro něž* $\sup(X) = -\infty$.

Následující věta popisuje, které axiomy uspořádaného tělesa v $\mathbb{R}^*$ platí.

**Věta 3.1.9 (axiomy UT v $\mathbb{R}^*$)** *S výjimkou dvou axiomů existence inverzního prvku a axiomu uspořádání*

$$A < B \Rightarrow A + K < B + K\ ,$$

*splňuje algebraická struktura* $(\mathbb{R}^*, 0, 1, +, \cdot, <)$ *všechny ostatní axiomy* UT *v těch případech, kdy daný aritmetický výraz je definovaný.*

**Důkaz.** Ukážeme, že kromě tří uvedených axiomů přidání nekonečen ostatní axiomy nenarušilo, jen některé aritmetické výrazy nejsou definované. Neutralita 0 i neutralita 1 podle definice 3.1.3 stále platí. Definice 3.1.3 rovněž ukazuje, že platí i komutativita obou operací: pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ se buď

$$A + (\pm\infty) = \pm\infty + A \ \text{ a } \ A \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot A \ ,$$

se shodnými znaménky, anebo obě strany rovnosti jsou nedefinované, zkratkou OSRJN. Prověříme asociativitu. Pro $A, B, K \in \mathbb{R}^*$ prověřme rovnosti

$$(A + B) + K \stackrel{?}{=} A + (B + K) \ \text{ a } \ (A \cdot B) \cdot K \stackrel{?}{=} A \cdot (B \cdot K) \ .$$

Začneme sčítáním. Je-li právě jeden z prvků $A$, $B$ a $K$ nekonečno, pak rovnost platí a na obou jejích stranách je toto nekonečno. Jsou-li právě dva prvky nekonečna, pak pro shodná znaménka rovnost platí a na obou stranách je toto nekonečno, jinak OSRJN. Jsou-li všechny tři prvky nekonečna, pak pro shodná znaménka rovnost platí a na obou stranách je toto nekonečno, jinak OSRJN.

Přejdeme k násobení. Je-li alespoň jeden z prvků $A$, $B$ a $K$ nekonečno a žádný není nula, pak rovnost platí a na obou jejích stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének prvků $A$, $B$ a $K$. Je-li alespoň jeden z prvků $A$, $B$ a $K$ nekonečno a jiný je nula, pak OSRJN.

Podíváme se na distributivní zákon

$$A \cdot (B + K) \stackrel{?}{=} (A \cdot B) + (A \cdot K) \ .$$

Nechť $A$ je nekonečno. Pokud součet $B+K$ není definovaný, pak OSRJN, protože i napravo máme součet nekonečen s různými znaménky. Pokud prvky $B$ a $K$ mají různá znaménka nebo jeden z nich je nula, pak pravá strana není definovaná. Mají-li stejná znaménka, pak rovnost platí a na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének prvků $A$ a $B + K$. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $B$ nebo $K$ je nekonečno. Pokud součet $B + K$ není definovaný nebo $A = 0$, pak OSRJN. Ve zbývajícím případu, když $A \neq 0$ a $B + K$ je nekonečno, rovnost platí a na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének prvků $A$ a $B + K$.

Jak víme, ani aditivní ani multiplikativní inverzy prvků $\pm\infty$ nejsou definované. Víme, že relace $<$ na $\mathbb{R}^*$ je lineární uspořádání. Zbývá prověřit axiomy

$$A < B \Rightarrow A + K < B + K \ \text{ a } \ A, B > 0 \Rightarrow A \cdot B > 0 \ ,$$

pokud alespoň jeden z prvků $A$, $B$ a $K$ je nekonečno. První neplatí, když $K$ je nekonečno a $A < B$ jsou konečné. Snadno se vidí, že druhý axiom platí. □

Pokud se čtenář zaradoval, že jsme s nekonečny hotovi, radoval se předčasně. Prozkoumáme jejich vztah k operacím odečítání a dělení. Těm se v uspořádaném tělese $F$ nevěnuje moc pozornost, protože se dají redukovat na sčítání, násobení a inverzy: pro $a, b \in F$ je

$$a - b = a + (-1)_F \cdot b \ \text{ a } \ \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \ .$$

Odečítání v $\mathbb{R}^*$ lze takto odbýt (definice 3.1.4), ale dělení ne.

**Věta 3.1.10 (dělení v $\mathbb{R}^*$)** *Pro každé $A, B, K, L \in \mathbb{R}^*$ se*

$$\frac{A}{K} + \frac{B}{K} = \frac{A+B}{K} \quad a \quad \frac{A}{K} \cdot \frac{B}{L} = \frac{A \cdot B}{K \cdot L},$$

*nebo některá ze stran rovnosti není definovaná.*

**Důkaz.** Začneme první rovností. Nechť $K$ je nekonečno. Pokud $A$ nebo $B$ je nekonečno, pak OSRJN. Jsou-li $A$ a $B$ konečné, rovnost platí jako $0 + 0 = 0$. Nechť $K \in \mathbb{R}$ a $A$ nebo $B$ je nekonečno. Pokud $K = 0$, pak OSRJN. Nechť $K \neq 0$. Jsou-li $A$ a $B$ nekonečna s opačnými znaménky, pak OSRJN. Ve zbývajícím případu, kdy $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, např. $A$ je nekonečno a $B \in \mathbb{R}$ nebo $B$ je nekonečno se stejným znaménkem jako $A$, rovnost platí a na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným podílu znamének prvků $A$ a $K$.

Přejdeme ke druhé rovnosti. Nechť $A$ nebo $B$ je nekonečno. Aby pravá strana byla definovaná, ani $A$ ani $B$ ani $K$ ani $L$ není nula a ani $K$ ani $L$ není nekonečno. Rovnost pak platí, na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének těchto čtyř prvků. Nechť $A, B \in \mathbb{R}$ a $K$ nebo $L$ je nekonečno. Aby pravá strana byla definovaná, ani $K$ ani $L$ není nula. Rovnost pak platí jako $0 = 0$. □

Podle [44, str. 214 1. dílu], [46, str. 19] a [200, str. 122] symbol nekonečna $\infty$ zavedl do matematiky v r. 1655 anglický matematik J. Wallis. Více o něm je v oddílu C.1.

• *Okolí bodů a nekonečen.* Připomínáme značení reálných intervalů:

$$(a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\},\ (-\infty,\, a) = \{x \in \mathbb{R} :\ x < a\}$$

a podobně. Bohužel se lze stále setkat se značením intervalů pomocí obrácených hranatých závorek. Předchozí dva intervaly se pak zapíšou jako $]a, b]$ a $(-\infty, a[$. Někdy se objevují i špičaté závorky $\langle$ a $\rangle$.

**Definice 3.1.11 (okolí bodů a nekonečen)** *Pro $b \in \mathbb{R}$ definujeme <u>$\varepsilon$-okolí</u> bodu $b$ jako $U(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Dále <u>$\varepsilon$-okolí nekonečna</u> je*

$$U(-\infty,\, \varepsilon) = (-\infty,\, -1/\varepsilon) \quad a \quad U(+\infty,\, \varepsilon) = (1/\varepsilon,\, +\infty)\ .$$

Následující úlohy podávají přehled základních vlastností okolí.

**Úloha 3.1.12** *Když $c \in U(A, \varepsilon)$ a $c < b < A + \varepsilon$ nebo $A - \varepsilon < b < c$, pak i $b \in U(A, \varepsilon)$.*

Pro $M, N \subset \mathbb{R}$ značením $M < N$ říkáme, že vždy $x \in M$, $y \in N \Rightarrow x < y$.

**Úloha 3.1.13** *$A < B \Rightarrow$ existuje $\varepsilon$, že $U(A, \varepsilon) < U(B, \varepsilon)$, speciálně $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$.*

**Úloha 3.1.14** *Vždy $\varepsilon \leq \delta \Rightarrow U(A, \varepsilon) \subset U(A, \delta)$.*

**Úloha 3.1.15** *Vždy* $\bigcap_{k=1}^{\infty} U(b,\, 1/k) = \{b\}$ *a* $\bigcap_{k=1}^{\infty} U(\pm\infty, 1/k) = \emptyset$.

• *Limity posloupností.* Symboly $(a_n), (b_n)$ a $(c_n)$ označují posloupnosti reálných čísel. Říkáme jim reálné posloupnosti nebo jen posloupnosti. Následující definice je základní.

**Definice 3.1.16 (limita posloupnosti)** *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *a* $L \in \mathbb{R}^*$. *Pokud pro každé* $\varepsilon$ *existuje* $n_0$, *že* $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon)$, *píšeme, že* $\lim a_n = L$ *či* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *či* $a_n \to L$, *a řekneme, že posloupnost* $(a_n)$ *má* <u>*limitu*</u> $L$.

Když $L \in \mathbb{R}$, pak $(a_n)$ má <u>vlastní</u> limitu a <u>konverguje</u>. Když $L = \pm\infty$, pak $(a_n)$ má <u>nevlastní</u> limitu. Posloupnost <u>diverguje</u>, když nemá limitu nebo má nevlastní limitu. Vlastní limita $\lim a_n = a$ znamená, že pro každé reálné (a jakkoli malé) $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \geq n_0$ je vzdálenost mezi $a_n$ a $a$ menší než $\varepsilon$, to jest $|a_n - a| < \varepsilon$. Nevlastní limita $\lim a_n = -\infty$ znamená, že pro každé (a jakkoli záporné) $c$ existuje index $n_0$, že pro každý index $n \geq n_0$ je $a_n \leq c$. Opačná nerovnost dává limitu $+\infty$. <u>Eventuálně konstantní</u> posloupnost $(a_n)$ s $a_n = a$ pro každé $n \geq n_0$ je příklad konvergentní posloupnosti, samozřejmě s limitou $\lim a_n = a$. Místo nerovnostíi $|a_n - a| < \varepsilon$ budeme dále psát, v souladu s principem neostrých nerovností z minulé přednášky, nerovnost $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Nechť $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je množina všech reálných posloupností. Množinám $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ říkáme <u>vlastnosti</u> reálných posloupností.

**Definice 3.1.17 (robustní vlastnosti)** $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *je* <u>*robustní*</u> *vlastnost, když vždy platí implikace* $(a_n) \in V \Rightarrow (b_n) \in V$, *pakliže* $a_n \neq b_n$ *jen pro konečně mnoho indexů* $n$.

**Úloha 3.1.18** *Která z vlastností* $V_1, \ldots, V_4$ *posloupnosti* $(a_n)$ *je robustní?* $V_1$ : $(a_n)$ *konverguje,* $V_2$ : $(a_n)$ *diverguje,* $V_3$ : $\lim a_n = -\infty$ *a* $V_4$ : $a_1 = 0$.

**Tvrzení 3.1.19 (jednoznačnost limity)** *Limita posloupností je jednoznačná,* $\lim a_n = K \wedge \lim a_n = L \Rightarrow K = L$.

**Důkaz.** Nechť $\lim a_n = K$ i $\lim a_n = L$ a $\varepsilon$ je libovolné. Podle definice 3.1.16 existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(K, \varepsilon)$ i $a_n \in U(L, \varepsilon)$. Pro každé $\varepsilon$ je tedy $U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) \neq \emptyset$. Podle úlohy 3.1.13 se $K = L$. □

• *Dvě limity.* Ukážeme, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. Což je jasné, pro dané $\varepsilon$ a každé $n \geq n_0 := \lceil 1/\varepsilon \rceil$ je

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\underbrace{\lceil 1/\varepsilon \rceil}_{\geq 1/\varepsilon}} \leq \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \rightsquigarrow |1/n - 0| \leq \varepsilon\,.$$

Zde $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ označuje <u>horní celou část</u> čísla $a$, nejmenší číslo $v \in \mathbb{Z}$, že $v \geq a$. Podobně <u>dolní celá část</u> $\lfloor a \rfloor$ čísla $a$ je největší číslo $v \in \mathbb{Z}$, že $v \leq a$.

V druhém příkladu odvodíme, že

$$\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \to -\infty\,.$$

Buď dáno $c < 0$. Pro každé $n \geq n_0 \geq 4c^2, 2^6$ pak je

$$\overbrace{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}^{\text{netriviální}} = \overbrace{n^{1/2} \cdot \underbrace{(n^{-1/6} - 1)}_{\cdots \leq -1/2}}^{\text{triviální}} \leq \underbrace{-n^{1/2}}_{\cdots \leq -2|c|} \;/\,2 \leq -2|c|/2 = c\,.$$

První horní svorka říká, že v tomto tvaru je hledaná limita netriviální, jeví se jako neurčitý výraz $+\infty - (+\infty)$. Jednoduchou algebraickou úpravou ale výraz převedeme do triviální tvaru $(+\infty) \cdot (0 - 1) = -\infty$. Dolní svorka vždy udává horní mez platnou pro výraz uzavřený svorkou, když $n \geq n_0$.

Při výpočtu limity nemusíme nalézt optimální hodnotu indexu $n_0$ v závislosti na $\varepsilon$ či $c$. To lze jen v nejjednodušších případech typu $\lim \frac{1}{n}$, jinak to může být obtížné. Stačí mít libovolnou hodnotu $n_0$, aby pro každé $n \geq n_0$ platila (neostrá) nerovnost v definici limity. I k tomu je ale nutné umět správně zacházet s nerovnostmi a odhady.

**Úloha 3.1.20** *Vypočítejte limitu*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}}\,.$$

## 3.2 Podposloupnosti, limita $n$-té odmocniny z $n$

• *Podposloupnosti posloupností.* Podposloupnost posloupnosti $(a_n)$ získáme vynecháním některých členů v $(a_n)$ tak, že stále zbývá nekonečná posloupnost. Formálně níže. V definici 3.2.6 zavedeme takzvané slabé podposloupnosti.

**Definice 3.2.1 (podposloupnost)** *Řekneme, že $(b_n)$ je <u>podposloupností</u> posloupnosti $(a_n)$, pokud existuje posloupnost $(m_n) \subset \mathbb{N}$ s $m_1 < m_2 < \ldots$, že pro každé $n$ se $b_n = a_{m_n}$. Tento vztah posloupností $(b_n)$ a $(a_n)$ označíme symbolem $(b_n) \preceq (a_n)$.*

**Úloha 3.2.2** *Relace $\preceq$ na množině posloupností $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je reflexivní a tranzitivní.*

**Úloha 3.2.3** *Popište dvě posloupnosti, že $(a_n) \preceq (b_n)$ i $(b_n) \preceq (a_n)$, ale $(a_n) \neq (b_n)$.*

**Tvrzení 3.2.4 ($\preceq$ zachovává limity)** *Nechť $(b_n) \preceq (a_n)$ a $\lim a_n = L$. <u>Pak</u> i $\lim b_n = L$.*

**Důkaz.** Plyne hned z definic 3.1.16 a 3.2.1, protože posloupnost $(m_n)$ v poslední definici splňuje pro každé $n$, že $m_n \geq n$. □

První část následující věty dokážeme později a další dvě části hned.

**Věta 3.2.5 (o podposloupnostech)** *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$. *Platí následující.*

1. *Existuje* $(b_n)$, *že* $(b_n) \preceq (a_n)$ *a* $(b_n)$ *má limitu.*
2. $\lim a_n$ *neexistuje* $\iff$ $(a_n)$ *má dvě podposloupnosti s různými limitami.*
3. $(a_n)$ *nemá limitu* $A$ $\iff$ $(a_n)$ *má podposloupnost s limitou různou od* $A$.

**Důkaz.** 1. Dokážeme později.

2. Implikace $\Leftarrow$ plyne z posledního tvrzení. Dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Nechť $(a_n)$ nemá limitu. Podle části 1 existuje $(b_n) \preceq (a_n)$ s $\lim b_n = B$. Ale $B$ není limitou $(a_n)$, takže existuje $\varepsilon$ a posloupnost $(c_n) \preceq (a_n)$, že pro každé $n$ je $c_n \notin U(B, \varepsilon)$. Podle části 1 existuje $(d_n) \preceq (c_n)$, že $\lim d_n = K$. Patrně $(d_n) \preceq (a_n)$ a $K \neq B$. Tedy $(b_n)$ a $(d_n)$ jsou hledané podposloupnosti.

3. Implikace $\Leftarrow$ plyne z posledního tvrzení. Dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Nechť $(a_n)$ nemá limitu $A$. Tedy existuje $\varepsilon$ a $(b_n) \preceq (a_n)$, že pro každé $n$ je $b_n \notin U(A, \varepsilon)$. Podle části 1 existuje $(c_n) \preceq (b_n)$, že $\lim c_n = B$. Patrně $(c_n) \preceq (a_n)$ a $B \neq A$. Tedy $(c_n)$ je hledaná podposloupnost. $\square$

Vždy tedy můžeme dokázat, že daná posloupnost nemá limitu nalezením dvou podposloupností s různými limitami. Např.

$$(a_n) = ((-1)^n) = (-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots)$$

nemá limitu, protože $(1, 1, \dots) \preceq (a_n)$ i $(-1, -1, \dots) \preceq (a_n)$ a tyto konstantní podposloupnosti mají různé limity 1 a $-1$.

**Definice 3.2.6 (slabá podposloupnost)** *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$. *Posloupnost* $(b_n)$ *nazveme slabou podposloupností posloupnosti* $(a_n)$, *existuje-li taková posloupnost* $(m_n) \subset \mathbb{N}$, *že* $\lim m_n = +\infty$ *a pro každé* $n$ *se* $b_n = a_{m_n}$. *Tento vztah obou posloupností označíme jako* $(b_n) \preceq^* (a_n)$.

**Úloha 3.2.7** *Dokažte zobecnění tvrzení 3.2.4: když* $(b_n) \preceq^* (a_n)$ *a* $\lim a_n = L$, *pak i* $\lim b_n = L$.

**Úloha 3.2.8** *Když* $(b_n) \preceq^* (a_n)$, *pak existuje* $(c_n)$, *že* $(c_n) \preceq (b_n)$ *a* $(c_n) \preceq (a_n)$.

• *Limita* $n$*-té odmocniny z* $n$. Výpočet limity je <u>netriviální</u>, když je nutné počítat limitu nějakého neurčitého (aritmetického nebo mocninného) výrazu. Jinak je <u>triviální</u>. Třeba limity $\lim(2^n + 3^n)$ a $\lim \frac{4}{5n-3}$ jsou triviální, kdežto limity $\lim(2^n - 3^n)$ a $\lim \frac{4n+7}{5n-3}$ jsou netriviální. Netriviální limitu často spočítáme tak, že ji algebraicky upravíme na triviální. Viz $\lim(\sqrt[3]{n} - \sqrt{n})$ výše. Následující limita z $n^{1/n}$ je netriviální, protože $n$ jde do $+\infty$, ale $1/n$ jde k 0, a $(+\infty)^0$ je neurčitý mocninný výraz (jsou tři druhy neurčitých mocninných výrazů, přesně je uvedeme později). Jak hned uvidíme, exponent převládne a $n^{1/n} \to 1$. K počítání limit posloupností daných aritmeticko-mocninnými výrazy se vrátíme v oddílu 6.1. Začneme připomenutím známé <u>Binomické věty</u>.

**Úloha 3.2.9 (Binomická věta)** *Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ se*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} .$$

*Zde* $\binom{n}{j} = n(n-1)\dots(n-j+1)/j!$, *s* $\binom{n}{0} = 1$.

**Tvrzení 3.2.10** ($n^{1/n} \to 1$) *Platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

**Důkaz.** Vždy $n^{1/n} \geq 1$. Kdyby $n^{1/n} \not\to 1$, existovalo by číslo $c > 0$ a posloupnost $(n_i) \subset \mathbb{N}$ s $2 \leq n_1 < n_2 < \dots$, že pro každé $i$ je $n_i^{1/n_i} \geq 1 + c$ (úloha 3.2.11). Umocněním této nerovnosti na $n_i$ a použitím úlohy 3.2.9 dostáváme pro každý index $i$, že

$$\begin{aligned} n_i &\geq (1+c)^{n_i} = \sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} c^j = 1 + \binom{n_i}{1} c + \binom{n_i}{2} c^2 + \dots + \binom{n_i}{n_i} c^{n_i} \\ &\geq \binom{n_i}{2} c^2 = \tfrac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 . \end{aligned}$$

Pro každé $i$ tak máme

$$n_i \geq \tfrac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 \rightsquigarrow 1 + 2/c^2 \geq n_i .$$

To je spor, posloupnost $n_1 < n_2 < \dots$ není shora omezená. □

**Úloha 3.2.11** *Vysvětlete, proč existuje posloupnost $(n_i)$ s uvedenou vlastností.*

## 3.3 Pět vět o existenci limit

Uvedeme a dokážeme pět vět o existenci limit reálných posloupností, větu 3.3.3, 3.3.9, 3.3.15, 3.3.20 a 3.3.25.

• *Monotonie a omezenost posloupností.* Připomeneme monotónní, omezené a neomezené posloupnosti. Řekneme, že posloupnost $(a_n)$ <u>neklesá</u> (resp. <u>neroste</u>), když pro $\forall n$ je $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$). <u>Klesá</u> (resp. <u>roste</u>), když pro $\forall n$ je $a_n > a_{n+1}$ (resp. $a_n < a_{n+1}$). Je <u>monotónní</u>, když neklesá nebo neroste. Posloupnost je <u>ryze monotónní</u>, když klesá nebo roste.

Posloupnost $(a_n)$ je <u>shora omezená</u>, pokud existuje $c$, že pro $\forall n$ je $a_n \leq c$, jinak je $(a_n)$ <u>shora neomezená</u>. Otočením nerovnosti máme <u>omezenost zdola</u>, resp. <u>neomezenost zdola</u>. Posloupnost $(a_n)$ je <u>omezená</u>, je-li shora i zdola omezená.

**Úloha 3.3.1** *Dokažte, že posloupnost $(a_n)$ je omezená, právě když existuje $c$, že pro každé $n$ je $|a_n| \leq c$.*

**Úloha 3.3.2** *Které z těchto jedenácti vlastností posloupností jsou robustní?*

• *Limity monotónních posloupností.* Existence limity posloupnosti se dá často dokázat pomocí následující věty a jejího důsledku.

**Věta 3.3.3 (limity MP)** *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *neklesá, resp. neroste. Pak limita* $\lim a_n$ *existuje a rovná se*

$$\sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}), \text{ resp. } \inf(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

*Supremum a infimum zde bereme v lineárním uspořádání* $(\mathbb{R}^*, <)$.

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ neroste (případ neklesající $(a_n)$ je podobný), $A \in \mathbb{R}^*$ je uvedené infimum a je dáno $\varepsilon$. Vezmeme $c > A$ tak, že $c \in U(A, \varepsilon)$. Podle definice infima pro nějaké $m$ je $a_m < c$. Pro každé $n \geq m$ pak je $A \leq a_n \leq a_m < c$. Podle úlohy 3.1.12 je $a_n \in U(A, \varepsilon)$. Takže $\lim a_n = A$. □

Monotonie ale není robustní vlastnost. Důsledek to napraví.

**Důsledek 3.3.4 (robustní zobecnění)** *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má podposloupnost* $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$, *která neklesá, resp. neroste. Pak limita* $\lim a_n$ *existuje a rovná se*

$$\sup(\{a_n : n \geq m\}), \text{ resp. } \inf(\{a_n : n \geq m\}).$$

*Supremum a infimum zde opět bereme v lineárním uspořádání* $(\mathbb{R}^*, <)$.

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ a $m$ jsou, jak uvedeno. Z definice limity je jasné, že limita podposloupnosti $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ se rovná limitě celé posloupnosti. □

**Úloha 3.3.5** *Předpoklad důsledku definuje robustní vlastnost posloupností.*

• *Limity kvazimonotónních posloupností.* Zobecníme monotónní posloupnosti. Řekneme, že $(a_n) \subset \mathbb{R}$ kvazineklesá (popř. kvazineroste), pokud pro každé $n$ existuje jen konečně mnoho $m$, že $a_m < a_n$ (popř. $a_m > a_n$). Posloupnost $(a_n)$ je kvazimonotónní, je-li kvazineklesající nebo kvazinerostoucí.

**Úloha 3.3.6** *Každá monotónní posloupnost je kvazimonotónní.*

**Úloha 3.3.7** *Uveďte příklad kvazimonotónní posloupnosti* $(a_n)$, *jejíž žádná podposloupnost* $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ *není monotónní.*

**Úloha 3.3.8** *Zapište kvazimonotonii jen pomocí kvantifikátorů, logických spojek, závorek, proměnných a nerovností mezi přirozenými a reálnými čísly.*

Následující věta používá veličiny lim sup a lim inf posloupnosti. Ty jsou vždy definované a nabývají hodnoty v $\mathbb{R}^*$. Definujeme je příště.

**Věta 3.3.9 (limity KMP).** *Když posloupnost* $(a_n)$ *kvazineklesá, popř. kvazineroste, pak* $\lim a_n = \limsup a_n$, *popř.* $\lim a_n = \liminf a_n$.

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ kvazineklesá (případ kvazinerostoucí $(a_n)$ je podobný), $A = \limsup a_n$ a je dáno $\varepsilon$. Posloupnost $(a_n)$ má podposloupnost $(a_{m_n})$ s $\lim a_{m_n} = A$ a pro každé $n \geq n_0$ je $a_n < A + \varepsilon$. Vezmeme $n'$, že $a_{m_{n'}} \in U(A, \varepsilon)$. Protože $(a_n)$ kvazineklesá, vezmeme $n_1 \geq n_0$, že pro každé $n \geq n_1$ je

$$a_{m_{n'}} \leq a_n < A + \varepsilon \,.$$

Podle úlohy 3.1.12 je $a_n \in U(A, \varepsilon)$ a $\lim a_n = A$. □

Opět uvedeme robustní zesílení.

**Důsledek 3.3.10 (robustní zobecnění)** *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má podposloupnost $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$, která kvazineklesá, resp. kvazineroste. Pak*

$$\lim\, a_n = \limsup a_n, \;\; \textit{resp.} \;\; \lim\, a_n = \liminf a_n \,.$$

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ a $m$ jsou, jak uvedeno. Z definice limity je jasné, že limita podposloupnosti $(b_n) = (a_m, a_{m+1}, \dots)$ se rovná limitě celé posloupnosti. Samozřejmě $\limsup b_n = \limsup a_n$ a totéž pro liminf. □

**Úloha 3.3.11** *Předpoklad důsledku definuje robustní vlastnost posloupností.*

I ve větě 3.3.3 a důsledku 3.3.4 lze suprema a infima nahradit limsupy a liminfy. S kvazimonotónními posloupnostmi přišel anglický matematik G. H. Hardy (viz oddíl C.1). V oddílu 6.3 dokážeme, že předešlý důsledek je v jistém smyslu nejobecnější výsledek o existenci limit posloupností omezených nerovnostmi.

• *Bolzano–Weierstrassova věta.* Začneme zajímavým pomocným výsledkem.

**Tvrzení 3.3.12 (existence MPP)** *Každá reálná posloupnost má monotónní podposloupnost.*

**Důkaz.** Pro danou posloupnost $(a_n)$ uvážíme množinu

$$M = \{n : \; \forall\, m \big(n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m\big)\} \,.$$

Když množina $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$ je nekonečná, máme nerostoucí podposloupnost $(a_{m_n})$. Když $M$ je konečná, vezmeme číslo $m_1 > \max(M)$ (pro $M = \emptyset$ je $m_1$ libovolné). Pak jistě $m_1 \notin M$ a tedy existuje číslo $m_2 > m_1$, že $a_{m_1} < a_{m_2}$. Protože $m_2 \notin M$, existuje $m_3 > m_2$, že $a_{m_2} < a_{m_3}$. A tak dále, dostaneme rostoucí podposloupnost $(a_{m_n})$. □

**Úloha 3.3.13** *Zobecněte předchozí tvrzení pro obecné lineární uspořádání.*

Z věty 3.3.3 a z předešlého tvrzení dostáváme dva důsledky. První z nich je část 1 věty 3.2.5. Druhým je Bolzano–Weierstrassova věta.

**Důsledek 3.3.14 (část 1 věty 3.2.5)** *Každá posloupnost reálných čísel má podposloupnost, která má limitu.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Podle předešlého tvrzení máme monotónní podposloupnost $(b_n) \preceq (a_n)$. Podle věty 3.3.3 má $(b_n)$ limitu. $\square$

**Věta 3.3.15 (Bolzano–Weierstrassova)** *Každá omezená reálná posloupnost má konvergentní podposloupnost.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ je omezená posloupnost a $(b_n) \preceq (a_n)$ je její monotónní podposloupnost zaručená předešlým tvrzením. Patrně je $(b_n)$ omezená a podle věty 3.3.3 má vlastní limitu. $\square$

**Úloha 3.3.16 (limita v intervalu)** *Nechť $a \leq b$ jsou reálná čísla. Pak každá posloupnost $(a_n) \subset [a, b]$ má podposloupnost $(a_{m_n})$, která má vlastní limitu $\lim a_{m_n} \in [a, b]$.*

O německém matematikovi K. Weierstrassovi a česko-italsko-německém knězi, filosofovi a matematikovi B. Bolzanovi je více v oddílu C.1.

• *Cauchyova podmínka.* V definici množiny $\mathbb{R}$ jsme se setkali s Cauchyovými posloupnostmi zlomků. Reálné Cauchyovy posloupnosti jsou definovány stejně.

**Definice 3.3.17 (Cauchyovy posloupnosti)** *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nazveme Cauchyovou (nebo cauchyovskou), pokud pro každé $\varepsilon$ existuje $n_0$, že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon$.*

**Úloha 3.3.18** *Cauchyovost posloupností reálných čísel je robustní vlastnost.*

**Úloha 3.3.19** *Každá Cauchyova posloupnost reálných čísel je omezená.*

**Věta 3.3.20 (Cauchyova podmínka)** *$(a_n)$ je konvergentní $\iff$ $(a_n)$ je Cauchyova.*

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim a_n = a$ a je dáno $\varepsilon$. Pak $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ pro každé velké $n$. Podle úlohy 3.1.2 pro každé velké $m$ a $n$ platí, že

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

Takže $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost. Jak víme z poslední úlohy, $(a_n)$ je omezená. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty má konvergentní podposloupnost $(a_{m_n})$ s limitou $a$. Pro dané $\varepsilon$ tak pro každé velké $m$ a $n$ je $|a_{m_n} - a| \leq \varepsilon/2$ a $|a_m - a_n| \leq \varepsilon/2$. Vždy $m_n \geq n$, takže opět podle úlohy 3.1.2 pro každé velké $n$ je

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

Tedy $\lim a_n = a$. $\square$

Je zajímavé, že francouzský matematik A.-L. Cauchy, po němž jsou posloupnosti v definici 3.3.17 (a řada dalších pojmů v analýze) nazvány, pobýval několik let v Praze v politickém exilu, viz oddíl C.1.

**Úloha 3.3.21** *Ukažte, že existuje Cauchyova posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$, která nemá racionální limitu. Předešlá věta tak v uspořádaném tělese $\mathbb{Q}$ neplatí.*

To není nic překvapujícího, víme, že uspořádané těleso $\mathbb{Q}$ není úplné.

**Úloha 3.3.22** *Kde se v důkazu předešlé věty použila úplnost reálných čísel?*

• *Feketeho lemma.* Lemma, jež uvedeme jako větu, se jmenuje podle maďarsko-izraelského matematika M. Feketeho. Píšeme o něm v oddílu C.1.

**Úloha 3.3.23** *fekete = ?*

**Úloha 3.3.24** *Řešte předešlou úlohu prostředky dostupnými v r. 1984.*

Posloupnost $(a_n)$ je <u>superaditivní</u>, popř. <u>subaditivní</u>, pokud pro každé indexy $m$ a $n$ je $a_{m+n} \geq a_m + a_n$, popř. $a_{m+n} \leq a_m + a_n$.

**Věta 3.3.25 (Feketeho lemma)** *Nechť $(a_n)$ je posloupnost a $M = \{a_n/n : n \in \mathbb{N}\}$. Když $(a_n)$ je superaditivní, popř. subaditivní, <u>pak</u> $\lim \frac{a_n}{n} = \sup(M)$, popř. $\lim \frac{a_n}{n} = \inf(M)$. Supremum a infimum zde bereme <u>v</u>* LU $(\mathbb{R}^*, <)$.

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ je superaditivní (pro subaditivní posloupnosti je argument podobný) a je dáno $\varepsilon$. Vezmeme $c < \sup(M)$ tak, že $c \in U(\sup(M), \varepsilon)$. Podle definice suprema existuje $m$, že $a_m/m > c$. Nechť číslo $n \geq m$ je libovolné. Napíšeme ho jako $n = km + l$, kde $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq l < m$ (tj. $n$ vydělíme číslem $m$ se zbytkem). Díky superaditivitě $(a_n)$ je

$$\frac{a_n}{n} \geq \frac{ka_m}{km + l} + \frac{a_l}{n} = \frac{a_m/m}{1 + l/km} + \frac{a_l}{n}\,.$$

Pro $n \to \infty$ i $k \to \infty$, tedy $1 + l/km \to 1$, $a_l/n \to 0$ a pro každé $\delta$ pro velké $n$ je $a_n/n \geq a_m/m - \delta$. Existuje $n_0 \geq m$, že pro každé $n \geq n_0$ je $c < a_n/n \leq \sup(M)$. Podle úlohy 3.1.12 je $a_n/n \in U(\sup(M), \varepsilon)$. Tedy $a_n/n \to \sup(M)$. □

Ve čtyřech úlohách ukážeme použití věty 3.3.25 v extremální kombinatorice.

**Úloha 3.3.26 (*abba*-prostá slova)** *Nechť $f(n) = l$ je maximální délka slova $u = a_1 a_2 \ldots a_l$ nad $n$-prvkovou abecedou splňujícího dvě podmínky.* (i) *Pro každé $i \in [l-1]$ je $a_i \neq a_{i+1}$.* (ii) *Slovo $u$ neobsahuje podslovo typu abba, takže neexistují čtyři indexy $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq l$, pro něž $a_{k_1} = a_{k_4} \neq a_{k_2} = a_{k_3}$. Pomocí Feketeho lemmatu dokažte, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$L = \lim f(n)/n\,.$$

Není moc těžké dokázat, že $f(n) = 3n - 2$, takže $L = 3$.

**Úloha 3.3.27 (*abab*-prostá slova)** *Táž úloha pro abab-prostá slova.*

I zde není moc těžké dokázat, že $f(n) = 2n - 1$, takže $L = 2$.

**Úloha 3.3.28 (*aabb*-prostá slova)** *Táž úloha pro aabb-prostá slova.*

Aritmetickou posloupností $X$ ($\subset \mathbb{Z}$) délky $k \in \mathbb{N}$ rozumíme každou množinu

$$X = \{a + jd : \ j \in [k]\}, \ a \in \mathbb{Z} \ \& \ d \in \mathbb{N}\,.$$

**Úloha 3.3.29 (funkce $r_k(n)$)** *Pro $k, n \in \mathbb{N}$ nechť $r_k(n)$ je maximální velikost množiny $A \subset [n]$ neobsahující aritmetickou posloupnost délky $k$. Pomocí Feketeho lemmatu dokažte, že pro každé $k$ existuje vlastní limita*

$$L_k = \lim_{n\to\infty} r_k(n)/n \quad (\in [0,1])\ .$$

Lehce se vidí, že $L_1 = L_2 = 0$. Pro $k \geq 3$ platí následující slavná věta.

**Věta 3.3.30 (E. Szemerédi, 1975)** *I pro každé $k \geq 3$ se $L_k = 0$.*

Její důkaz je dosti obtížný, viz [156] či [161].

# Kapitola 4

# Přednáška 3. Aritmetika limit. AK řady

Kapitolu založenou na třetí přednášce

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred3.pdf`

ze 7. 3. 2024 začneme oddílem 4.1 o vztahu limit posloupností a aritmetických operací. Hlavním výsledkem je věta 4.1.2 o limitě součtové, součinové a podílové posloupnosti. Ve dvou jejích dodatcích v tvrzeních 4.1.4 a 4.1.6 nejprve uvedeme několik situací větou nepokrytých, a pak pomocí limit zachytíme nejednoznačnost neurčitých aritmetických výrazů. Důkazy dodatků jsou úlohy.

V oddílu 4.2 ilustrujeme důkazem tvrzení 4.2.2 výpočet limity rekurentní posloupnosti. V tvrzení 4.2.4 určíme limity posloupnosti $(q^n)$. Oddíl 4.3 se zabývá vztahem limit a uspořádání reálných čísel. Věta 4.3.2 o tomto vztahu je v naší učebnici silnější, než jak se obvykle uvádí. Podobně i věta 4.3.10 o dvou strážnících. Oddíl 4.4 se věnuje veličinám $\liminf$ a $\limsup$ reálné posloupnosti. Ve větě 4.4.4 dokážeme, že tyto hodnoty přiřazené dané posloupnosti jsou vždy definované, a věta 4.4.6 uvádí jejich základní vlastnosti.

V závěrečném oddílu 4.5 uvedeme na scénu (nekonečné) řady. Pojmeme je jinak, než je standardní, zavedeme takzvané AK řady jako spočetná zobecnění konečných součtů. Řadám se podrobněji věnujeme v následující přednášce a v kapitole 6.

## 4.1 Aritmetika limit

• *Aritmetika limit.* Připomínáme, že $(a_n)$, $(b_n)$ a $(c_n)$ označují reálné posloupnosti, že reálná čísla $\varepsilon$, $\delta$ a $\theta$ jsou vždy kladná, že $\mathbb{R}^*$ je rozšířená reálná osa a že $A$, $B$, $K$ a $L$ označují její prvky. Připomínáme počítání s nekonečny v definici 3.1.3. Následující věta je základem pro výpočet limit. Nejprve ale úloha.

**Úloha 4.1.1 (obměna Δ-ové nerovnosti)** *Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ je*

$$|a+b| \geq |a| - |b| \;\; i \;\; |a-b| \geq |a| - |b| \; .$$

**Věta 4.1.2 (aritmetika limit)** *Nechť $\lim a_n = K$ a $\lim b_n = L$. Potom se $\lim(a_n + b_n) = K + L$, $\lim(a_n b_n) = KL$ a $\lim(a_n/b_n) = K/L$, když výraz vpravo není neurčitý.*

**Důkaz.** Součet. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon$. Pro každé velké $n$ máme $|a_n - K| \leq \varepsilon/2$ a $|b_n - L| \leq \varepsilon/2$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato $n$

$$|(a_n + b_n) - (K + L)| \leq |a_n - K| + |b_n - L| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

a $a_n + b_n \to K + L$.

Nechť $K = L = \pm\infty$ a je dáno $\varepsilon$. Pro každé velké $n$ mají $a_n$ a $b_n$ znaménko jako $K$ a $|a_n|, |b_n| \geq 1/2\varepsilon$. Pro tato $n$ tedy $a_n + b_n$ má znaménko jako $K$, $|a_n + b_n| = |a_n| + |b_n| \geq 1/2\varepsilon + 1/2\varepsilon = 1/\varepsilon$ a $a_n + b_n \to K + L = K = L$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon$. Pro každé velké $n$ má $a_n$ znaménko jako $K$, $|a_n| \geq 1/\varepsilon + |L| + 1$ a $|b_n - L| \leq 1$, tedy $|b_n| \leq |L| + 1$. Pro tato $n$ má $a_n + b_n$ znaménko jako $K$ a, podle úlohy 4.1.1, $|a_n + b_n| \geq |a_n| - |b_n| \geq 1/\varepsilon + |L| + 1 - |L| - 1 = 1/\varepsilon$, tudíž $a_n + b_n \to K + L = K$. Případy $K \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$ řeší komutativita sčítání.

Součin. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon \leq 1$. Pro každé velké $n$ máme $|a_n - K| \leq \varepsilon/(2|L|+1)$, tedy $|a_n| \leq |K|+1$, a $|b_n - L| \leq \varepsilon/(2|K|+2)$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato $n$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - KL| &\leq |a_n| \cdot |b_n - L| + |L| \cdot |a_n - K| \\ &\leq (|K| + 1) \cdot \tfrac{\varepsilon}{2|K|+2} + |L| \cdot \tfrac{\varepsilon}{2|L|+1} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

a $a_n b_n \to KL$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ a je dáno $\varepsilon$. Pro každé velké $n$ má $a_n$ znaménko jako $K$, $b_n$ jako $L$ a $|a_n|, |b_n| \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$. Pro tato $n$ má tedy $a_n b_n$ znaménko jako $KL$, $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \geq 1/\sqrt{\varepsilon} \cdot 1/\sqrt{\varepsilon} = 1/\varepsilon$ a $a_n b_n \to KL$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($L = 0$ dává neurčitý výraz) a je dáno $\varepsilon$. Pro každé velké $n$ má $a_n$ znaménko jako $K$, $|a_n| \geq 2/(\varepsilon|L|)$ a $|b_n - L| \leq |L|/2$, tedy $|b_n| \geq |L|/2$. Pro tato $n$ tedy $a_n b_n$ má znaménko jako $KL$, $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \geq \frac{2}{\varepsilon|L|} \cdot \frac{|L|}{2} = 1/\varepsilon$ a $a_n b_n \to KL$. Případy $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $L = \pm\infty$ řeší komutativita násobení.

Podíl. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($L = 0$ dává neurčitý výraz) a je dáno $\varepsilon$. Pro velké $n$ je $|a_n - K| \leq \min(\{1, \varepsilon L^2/4(|L|+1)\})$ a $|b_n - L| \leq \min(\{1, \varepsilon L^2/4(|K|+1), |L|/2\})$, tedy $|a_n| \leq |K| + 1$, $|b_n| \leq |L| + 1$ a $|b_n| \geq |L|/2$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato $n$ je $\left|a_n/b_n - K/L\right| = \left|(a_n L - b_n K)/b_n L\right|$

$$\leq \frac{|a_n| \cdot |L - b_n| + |b_n| \cdot |a_n - K|}{|b_n| \cdot |L|} \leq \frac{\varepsilon L^2/4 + \varepsilon L^2/4}{L^2/2} = \varepsilon$$

a $a_n/b_n \to K/L$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a je dáno $\varepsilon$. Pro každé velké $n$ má $a_n$ znaménko jako $K$, $|a_n| \geq (|L|+1)/\varepsilon$ a $|b_n - L| \leq 1$, tedy $|b_n| \leq |L|+1$. Pro tato $n$ tedy $a_n/b_n$ má znaménko jako $K/L$, $|a_n/b_n| = |a_n|/|b_n| \geq \frac{|L|+1}{\varepsilon}/(|L|+1) = 1/\varepsilon$ a $a_n/b_n \to K/L$.

Nechť $K \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ a je dáno $\varepsilon$. Pro každé velké $n$ je $|a_n - K| \leq 1$, tedy $|a_n| \leq |K|+1$, a $|b_n| \geq (|K|+1)/\varepsilon$. Pro tato $n$ tedy $|a_n/b_n - 0| = |a_n/b_n| = |a_n|/|b_n| \leq \frac{|K|+1}{(|K|+1)/\varepsilon} = \varepsilon$ a $a_n/b_n \to K/L = 0$. □

Když $\lim a_n = K$, $\lim b_n = L$ a $K/L$ není neurčitý výraz, pak $L \neq 0$. Konečně mnoho indexů $n$, kdy $b_n = 0$ a zlomek $a_n/b_n$ není definovaný, pak ignorujeme či pro ně $a_n/b_n$ libovolně dodefinujeme.

• *Dodatky k aritmetice limit.* Předešlá věta zdaleka nepopisuje aritmetiku limit reálných posloupností beze zbytku. I když $(a_n)$ nebo $(b_n)$ nemá limitu, výsledná jednoznačná limita součtu, součinu či podílu může stále existovat. Šest takových situací teď popíšeme. Důkazy ponecháváme jako úlohu.

**Úloha 4.1.3** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 4.1.4 (dodatek 1 k AL)** *Nechť $(a_n)$ a $(b_n)$ jsou reálné posloupnosti. I když případně $(a_n)$ nemá limitu, platí následující implikace.*

1. *$(a_n)$ je omezená a $L = \lim b_n = \pm\infty$. <u>Pak</u> $\lim (a_n + b_n) = L$.*
2. *$(a_n)$ je omezená a $\lim b_n = 0$. <u>Pak</u> $\lim a_n b_n = 0$.*
3. *Pro každé velké $n$ je $a_n \geq c > 0$ a $L = \lim b_n = \pm\infty$. <u>Pak</u> $\lim a_n b_n = L$.*
4. *$(a_n)$ je omezená a $\lim b_n = \pm\infty$. <u>Pak</u> $\lim a_n/b_n = 0$.*
5. *Pro každé velké $n$ je $a_n \geq c > 0$ i $b_n > 0$ a $\lim b_n = 0$. <u>Pak</u> $\lim a_n/b_n = +\infty$.*
6. *Pro každé velké $n$ je $0 < a_n \leq c$ a $L = \lim b_n = \pm\infty$. <u>Pak</u> $\lim b_n/a_n = L$.*

V částech 3 a 5 může také být $a_n \leq c < 0$, v části 6 může být $c \leq a_n < 0$ a v části 5 může být $b_n < 0$. Čtenář si tyto modifikace sám snadno přesně zformuluje a dokáže.

Je-li výraz $K+L$, $KL$ či $K/L$ neurčitý, není v obecné situaci výsledná limita jednoznačně určena. Na příkladech ukážeme, co se může dít.

**Úloha 4.1.5** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 4.1.6 (dodatek 2 k AL)** *Pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ existují reálné posloupnosti $(a_n)$ a $(b_n)$, pro něž platí následující.*

1. *$\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ a $\lim (a_n + b_n) = A$.*
2. *$\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n = A$.*
3. *$\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim a_n/b_n = A$.*
4. *$\lim a_n = \pm\infty$, $\lim b_n = \pm\infty$ a $\lim a_n/b_n = A$.*

## 4.2 Rekurentní posloupnosti

Počítání limit rekurentních posloupností demonstrujeme na příkladu v důkazu následujícího tvrzení. Podrobněji se jím zabýváme v oddílu 6.3.

• *Limita jedné rekurentní posloupnosti.* Začneme ale úlohou o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

**Úloha 4.2.1 (AG nerovnost)** *Pro každá dvě čísla $a, b \geq 0$ je $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.*

**Tvrzení 4.2.2 (rekurentní limita)** *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ buď dána jako $a_1 = 1$ a pro $n \geq 2$ vztahem $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$. Pak $\lim a_n = \sqrt{2}$.*

**Důkaz.** Nejprve dokážeme, že $a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$, takže $(a_n)$ konverguje podle důsledku 3.3.4. Patrně vždy $a_n > 0$ a $a_n$ je definována pro každé $n$. Pro $n \geq 2$ je podle AG nerovnosti

$$a_n = a_{n-1}/2 + 1/a_{n-1} \geq 2\sqrt{(a_{n-1}/2)/a_{n-1}} = \sqrt{2}\,.$$

Pro $n \geq 3$ pak platí $a_{n-1} \geq a_n$, právě když $a_{n-1}/2 \geq 1/a_{n-1}$, to jest právě když $a_{n-1} \geq \sqrt{2}$, což je pravda. Nechť $a = \lim a_n \geq \sqrt{2}$. Podle AL a limit podposloupností je

$$a = \lim a_n = \frac{\lim a_{n-1}}{2} + \frac{1}{\lim a_{n-1}} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}\,.$$

Tedy $a/2 = 1/a$, $a^2 = 2$ a $a = \sqrt{2}$. □

Aby postup při hledání limity rekurentní posloupnosti $(a_n)$ předvedený výše byl správný, musí se vždy dokázat, že $\lim a_n$ existuje. Například rekurentní posloupnost $(a_n)$ daná jako $a_1 = 1$ a $a_n = -a_{n-1}$, $n \geq 2$, nemá limitu $\lim a_n = 0$, přestože rovnice $L = -L$ má v $\mathbb{R}^*$ jediné řešení $L = 0$. Limita posloupnosti $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ neexistuje.

• *Limita geometrické posloupnosti.* Je to posloupnost mocnin

$$(q^n) = (q,\, q^2,\, q^3,\, \dots),\ q \in \mathbb{R}\,.$$

**Úloha 4.2.3 (další dodatek k AL)** *Pro každou posloupnost $(a_n)$ je*

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0\,.$$

**Tvrzení 4.2.4 (limita geometrické posloupnosti)** *Nechť je $q \in \mathbb{R}$. Potom pro $|q| < 1$ se $\lim q^n = 0$, pro $q = 1$ se $\lim q^n = 1$, pro $q > 1$ se $\lim q^n = +\infty$ a pro $q \leq -1$ tato limita neexistuje.*

**Důkaz.** Nechť $|q| < 1$. Podle poslední úlohy lze předpokládat, že $q \in [0, 1)$. Pak $(q^n)$ neroste a je zdola omezená. Podle důsledku 3.3.10 má nezápornou vlastní limitu $L$. Protože $q^n = q \cdot q^{n-1}$, platí rovnice $L = q \cdot L$. Tedy $L = 0/(1-q) = 0$. Pro $q = 1$ máme konstantní posloupnost $(1, 1, \dots)$. Nechť $q > 1$. Podle první části tohoto tvrzení a části 5 tvrzení 4.1.4 je $\lim q^n = \lim \frac{1}{(1/q)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Pro $q \leq -1$ posloupnost $(q^n)$ nemá limitu, protože podposloupnosti se sudými a s lichými indexy mají různé limity. □

## 4.3 Uspořádání a limity

Probereme vztah limit a LU $(\mathbb{R}^*, <)$. K této záležitosti se vrátíme v oddílu 6.3.

• *Obligátní věta jinak.* Umíme-li porovnat členy dvou posloupností, umíme porovnat i jejich limity, a naopak. Ale které členy obou posloupností mezi sebou porovnáváme? Začneme úlohou.

**Úloha 4.3.1** *Když $A < B$, pak existuje $\varepsilon$, že $U(A, \varepsilon) < U(B, \varepsilon)$, to jest vždy $x \in U(A, \varepsilon)$ a $y \in U(B, \varepsilon) \Rightarrow x < y$.*

**Věta 4.3.2 (limita a uspořádání)** *Mějme reálné posloupnosti $(a_n)$ a $(b_n)$, že $\lim a_n = K$ a $\lim b_n = L$. <u>Potom</u> platí následující.*

1. *Když $K < L$, tak existuje $n_0$, že pro <u>každé dva, ne nutně stejné</u>, indexy $m, n \geq n_0$ je $a_m < b_n$.*
2. *Když pro každé $n_0$ existují indexy $m$ a $n$, že $m, n \geq n_0$ & $a_m \geq b_n$, pak $K \geq L$.*

**Důkaz.** 1. Nechť $K < L$. Podle úlohy 4.3.1 existuje $\varepsilon$, že $U(K, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Podle definice limity máme $n_0$, že platí implikace $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m$ je v $U(K, \varepsilon)$ a $b_n$ v $U(L, \varepsilon)$. Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m < b_n$.

2. Podle logiky je implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ totéž, jako její obměna $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ (úloha 1.2.2). Obměna implikace v části 1 je ale právě část 2. □

Jednou z nejhlubších záhad výuky matematické analýzy je, proč se tato věta jinde uvádí vždy v daleko slabší podobě: $K < L \Rightarrow$ existuje $n_0$, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$. Podobně druhá část. (Sám jsem ovšem tyto slabší verze také řadu let učil.) Na vztah limit reálných posloupností a uspořádání reálných čísel se opět podíváme v oddílu 6.3.

**Úloha 4.3.3** *Vysvětlete, proč je první část věty 4.3.2 s různými indexy $m$ a $n$ silnější výsledek, než obvyklá verze s $m = n$.*

Ostrá nerovnost mezi členy dvou posloupností může v limitě přejít v rovnost.

**Úloha 4.3.4** *Uveďte příklad konvergentních posloupností $(a_n)$ a $(b_n)$, že pro každé $m$ a $n$ je $a_m > b_n$, ale $\lim a_n = \lim b_n$.*

Následující tvrzení dále zesiluje první část poslední věty.

**Úloha 4.3.5** *Dokažte následující tvrzení a formulujte odpovídající druhou část.*

**Tvrzení 4.3.6 (zesílení věty 4.3.2)** *Když* $\lim a_n = K$, $\lim b_n = L$ *a* $K < L$, *pak existují reálná čísla* $a < b$, *že pro každé* $m, n \geq n_0$ *je*

$$a_m \leq a < b \leq b_n \ .$$

• *Intervaly.* Pro reálná čísla $a$ a $b$ označíme uzavřený interval s konci $a$ a $b$ jako $I(a, b)$:

$$I(a, b) = [a, b] \text{ pro } a \leq b \text{ a } I(a, b) = [b, a] \text{ pro } a \geq b \ .$$

$M \subset \mathbb{R}$ je konvexní množina, pokud pro každé $a, b \in M$ je $I(a, b) \subset M$. Například každé okolí $U(A, \varepsilon)$ je konvexní.

**Tvrzení 4.3.7 (o intervalech)** *Konvexní množiny reálných čísel jsou právě* $\emptyset$, *singletony* $\{a\}$ *pro* $a \in \mathbb{R}$, *celé* $\mathbb{R}$ *a pro reálná čísla* $a < b$ *intervaly* $(a, b)$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, a]$ & $[a, +\infty)$.

**Důkaz.** Z tranzitivity $<$ plyne, že všechny uvedené množiny jsou konvexní. Ukážeme, že jiné konvexní reálné množiny neexistují. Nechť $X \subset \mathbb{R}$ s $X \neq \emptyset, \mathbb{R}, \{a\}$ je konvexní množina a $a \in \mathbb{R} \setminus X$. Z konvexity $X$ plyne, že $a \in H(X)$ (horní meze množiny $X$) nebo $a \in D(X)$ (dolní meze množiny $X$). Probereme pouze první případ, druhý se na něj převede otočením nerovností.

Nechť tedy $H(X) \neq \emptyset$. Položíme $b = \sup(X)$. Nechť $D(X) = \emptyset$. Pokud $b \in X$, pak $X = (-\infty, b]$. Pokud $b \notin X$, pak $X = (-\infty, b)$. Nechť $D(X) \neq \emptyset$. Pak položíme $c = \inf(X)$, patrně $c < b$. Pokud $b \notin X$ a $c \notin X$, pak $X = (c, b)$. Pokud $b \notin X$ a $c \in X$, pak $X = [c, b)$. Pokud $b \in X$ a $c \notin X$, pak $X = (c, b]$. Konečně pokud $b \in X$ a $c \in X$, pak $X = [c, b]$. □

**Úloha 4.3.8** *Existují neprázdné konečné intervaly?*

**Definice 4.3.9 (netriviální intervaly)** *Interval* $I$ *je netriviální, pokud* $I \neq \emptyset, \{a\}$ *pro* $a \in \mathbb{R}$.

• *Věta o dvou strážnících.* Následující věta je populární vzhledem ke svému názvu. Zformulujeme ji trochu obecněji, než je obvyklé.

**Věta 4.3.10 (dva strážníci)** *Když* $\lim a_n = \lim b_n = a$, $(c_n) \subset \mathbb{R}$ *a pro každé velké* $n$ *je* $c_n \in I(a_n, b_n)$, *pak též* $\lim c_n = a$.

**Důkaz.** Nechť posloupnosti $(a_n)$, $(b_n)$ a $(c_n)$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. Pak pro každé velké $n$ je $a_n, b_n \in U(a, \varepsilon)$. Díky konvexitě $U(a, \varepsilon)$ pro každé velké $n$ je $c_n \in I(a_n, b_n) \subset U(a, \varepsilon)$ a $c_n \to a$. □

Obvykle se požaduje $a_n \leq c_n \leq b_n$. Dva strážníci $(a_n)$ a $(b_n)$ mezi sebou vedou podezřelou posloupnost $(c_n)$ ke společné limitě $a$.

**Úloha 4.3.11** *Pro nevlastní limitu stačí jeden strážník: když* $\lim a_n = -\infty$ *a pro každé velké* $n$ *je* $b_n \leq a_n$, *pak i* $\lim b_n = -\infty$. *Podobně pro limitu* $+\infty$.

## 4.4 Limes inferior a limes superior

Tyto latinské termíny znamenají „nejmenší limita“ a „největší limita“.

• *Hromadné body.* Hromadné body posloupností jsou limity podposloupností.

**Definice 4.4.1 (hromadné body)** *$A \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti $(a_n)$, pokud $A = \lim b_n$ pro nějakou $(b_n) \preceq (a_n)$. $H(a_n)$ $(\subset \mathbb{R}^*)$ označuje množinu hromadných bodů posloupnosti $(a_n)$.*

Například $(a_n) = (n-1+(-1)^n n+1/n)$ má hromadné body $H(a_n) = \{-1, +\infty\}$.

**Úloha 4.4.2** *Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

• *Limes inferior a limes superior posloupnosti.* Jak jsme už prozradili, jedná se o nejmenší, resp. největší, limitu podposloupnosti dané posloupnosti.

**Definice 4.4.3 (liminf a limsup)** *Pro každou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme $\liminf a_n = \min(H(a_n))$ a $\limsup a_n = \max(H(a_n))$. Minimum a maximum bereme v* LU $(\mathbb{R}^*, <)$.

Musíme ale dokázat, že tato minima a maxima existují.

**Věta 4.4.4 (liminf a limsup)** *Pro každou $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je $H(a_n) \neq \emptyset$. Množina $H(a_n)$ má v lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ minimum i maximum.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$. $H(a_n) \neq \emptyset$ podle úlohy 4.4.2. Dokážeme existenci $\max(H(a_n))$, pro minimum se argumentuje podobně. Nechť $A = \sup(H(a_n))$, bráno v $(\mathbb{R}^*, <)$ (díky tvrzení 3.1.7 supremum $A$ existuje). Dokážeme, že $A$ je v $H(a_n)$. Když $A = -\infty$, je $H(a_n) = \{-\infty\}$ a jsme hotovi, $A \in H(a_n)$.

Nechť $A > -\infty$. Můžeme předpokládat, že existuje reálná posloupnost $(b_n) \subset H(a_n)$ s $\lim b_n = A$. Pro $A < +\infty$ a pro $A = +\infty \notin H(a_n)$ to plyne z definice suprema. Pro $A = +\infty \in H(a_n)$ jsme hotovi. Protože každé číslo $b_n$ je limitou podposloupnosti posloupnosti $(a_n)$, snadno sestrojíme podposloupnost $(a_{m_n})$, že pro každé $n$ je $a_{m_n} \in U(b_n, 1/n)$. Pak $\lim a_{m_n} = \lim b_n = A$ a tedy $A \in H(a_n)$. □

Je jasné, že když limita $\lim a_n$ existuje, je $H(a_n) = \{\lim a_n\}$. Dokážeme několik dalších vlastností liminfů a limsupů posloupností.

**Tvrzení 4.4.5 ($\liminf \stackrel{?}{=} \limsup$)** *Vždy platí, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Rovnost nastává $\iff$ existuje $\lim a_n$. Pak $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$.*

**Důkaz.** Nerovnost je zřejmá, protože $\liminf a_n = \min(H(a_n))$ a $\limsup a_n = \max(H(a_n))$. Platí-li rovnost, je množina $H(a_n)$ jednoprvková, $(a_n)$ nemá dvě podposloupnosti s různými limitami a podle části 2 tvrzení 3.2.4 má $(a_n)$ limitu. Ta se rovná $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$. Pokud $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, posloupnost $(a_n)$ má dvě podposloupnosti s různými limitami a nemá limitu. □

**Věta 4.4.6 (vlastnosti liminfů a limsupů)** *Nechť* $(a_n)$ *je posloupnost,* $A = \liminf a_n$ *a* $B = \limsup a_n$.

1. *Když* $A = -\infty$*, pak pro každé* $c < 0$ *pro nekonečně mnoho* $n$ *je* $a_n \leq c$*. Když* $A = +\infty$*, pak* $\lim a_n = +\infty$*.*

2. *Když* $A \in \mathbb{R}$*, pak pro každé* $\varepsilon$ *pro nekonečně mnoho* $n$ *je* $a_n \leq A + \varepsilon$ *&* *pro každé* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq A - \varepsilon$*.*

3. *Když* $B = +\infty$*, pak pro každé* $c > 0$ *pro nekonečně mnoho* $n$ *je* $a_n \geq c$*. Když* $B = -\infty$*, pak* $\lim a_n = -\infty$*.*

4. *Když* $B \in \mathbb{R}$*, pak pro každé* $\varepsilon$ *pro nekonečně mnoho* $n$ *je* $a_n \geq B - \varepsilon$ *&* *pro každé* $n \geq n_0$ *je* $a_n \leq B + \varepsilon$*.*

**Důkaz.** Dokážeme části 1 a 2. Důkaz částí 3 a 4 je úloha níže.

1. Nechť $A = -\infty$. Pak $\lim b_n = -\infty$ pro nějakou $(b_n) \preceq (a_n)$ a tvrzení zřejmě platí podle definice limity $-\infty$. Nechť $A = +\infty$. Pak $H(a_n) = \{+\infty\}$ a podle předešlého tvrzení se $\lim a_n = +\infty$.

2. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon$. Protože existuje $(b_n) \preceq (a_n)$ s $\lim b_n = A$, jistě pro nekonečně mnoho $n$ je $a_n \leq A + \varepsilon$. Kdyby bylo $a_n < A - \varepsilon$ pro nekonečně mnoho $n$, měli bychom $(c_n) \preceq (a_n)$ s limitou $\lim c_n$ menší než $A - \varepsilon$. To nelze, protože $A = \min(H(a_n))$. Tedy pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \geq A - \varepsilon$. □

Liminfy a limsupy posloupností se používají v teorii čísel. Třeba pro funkci $\tau(n)$ počtu dělitelů čísla $n$ (například $\tau(6) = |\{1, 2, 3, 6\}| = 4$) se dá dokázat, že

$$\limsup \frac{\log(\tau(n))}{(\log 2)(\log n)/(\log\log n)} = 1\,.$$

Zde $(\tau(n)) = (1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, \dots)$.

**Úloha 4.4.7** *Dokažte části 3 a 4 poslední věty.*

**Úloha 4.4.8** *Uveďte posloupnost* $(a_n)$ *s* $H(a_n) = \mathbb{R}^*$*.*

**Úloha 4.4.9** *Existuje posloupnost* $(a_n)$*, že* $H(a_n) = [-1, 0) \cup (0, 1]$*?*

**Úloha 4.4.10** *Pro* $a_n = n(1 + (-1)^n)$ *nalezněte* $\liminf a_n$ *a* $\limsup a_n$*.*

## 4.5 AK řady

Dost se odchýlíme od zavedení řad v

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred3.pdf`

a vlastně vůbec od standardního zavedení řad v učebnicích analýzy.

• AK *řady.* Naším cílem je rozšířit konečné součty $\sum_{x \in X} r_x$, kde $X$ je konečná indexová množina a $r_x \in \mathbb{R}$ (takové součty bereme jako známé), na součty se spočetnými indexovými množinami. Ovšem tak, aby se zachovala komutativita a asociativita sčítání. To se realizuje v AK řadách.

**Definice 4.5.1 (AK řady)** <u>AK řada</u> *(absolutně konvergentní řada) je každé takové zobrazení* $r\colon X \to \mathbb{R}$ *definované na spočetné množině* $X$*, že pro nějaké* $c \geq 0$ *pro každou konečnou množinu* $Y \subset X$ *je* $\sum_{x\in Y} |r(x)| \leq c$*.* AK *řadu zapíšeme jako* $\sum_{x\in X} r_x$*, s* $r_x := r(x)$*.*

Důležitým příkladem AK řad jsou konečné AK řady.

**Definice 4.5.2 (konečné AK řady)** <u>*Konečná* AK *řada*</u> *je každé takové zobrazení* $r\colon X \to \mathbb{R}$ *definované na spočetné množině* $X$*, že* $r(x) \neq 0$ *jen pro konečně mnoho* $x \in X$*. Opět je značíme symbolem* $\sum_{x\in X} r_x$ *s* $r_x := r(x)$*.*

Naše terminologie je korektní.

**Úloha 4.5.3** *Každá konečná* AK *řada je* AK *řada.*

Konečný součet $\sum_{x\in X} r_x$ s konečnou $X$ lze vždy chápat jako konečnou AK řadu: $X$ libovolně (ale tak, abychom neinterferovali s dalšími konstrukcemi) rozšíříme spočetnou množinou $Y \supset X$ a pro $x \in Y \setminus X$ položíme $r(x) = r_x = 0$.

Je-li $\sum_{x\in X} r_x$ AK řada a $Y \subset X$, je jasné, že $\sum_{x\in Y} r_x$ je rovněž AK řada. Nazveme ji <u>AK podřadou</u> AK řady $\sum_{x\in X} r_x$.

• *Součty* AK *řad.* Jsou dány následující větou.

**Věta 4.5.4 (součty AK řad)** *Nechť* $\sum_{x\in X} r_x$ *je* AK *řada.* <u>*Pak*</u> *pro každou bijekci* $f\colon \mathbb{N} \to X$ *existuje vlastní limita*

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} r(f(i)) \quad (\in \mathbb{R})$$

*a nezávisí na* $f$*. Limitu* $s$ *nazveme* <u>*součtem*</u> AK *řady* $\sum_{x\in X} r_x$*. Označíme ho opět symbolem* $\sum_{x\in X} r_x$*.*

**Důkaz.** Nechť $\sum_{x\in X} r_x$ je AK řada, $f, g\colon \mathbb{N} \to X$ jsou dvě bijekce a je dáno $\varepsilon$. Položíme

$$c = \sup(\{\textstyle\sum_{x\in Y} |r_x| : \ Y \subset X \text{ a je konečná}\})\,.$$

Vezmeme konečnou množinu $Y \subset X$, že $c - \varepsilon \leq \sum_{x\in Y} |r_x| \leq c$. Pak pro každou konečnou množinu $Z \subset X \setminus Y$ je $\sum_{x\in Z} |r_x| \leq \varepsilon$. Vezmeme $n_0$, že $f[\,[n_0]\,], g[\,[n_0]\,] \supset Y$. Pro každé $m, n \geq n_0$ pak je

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^{m} r(f(i)) - \sum_{i=1}^{n} r(g(i))\right| \leq \sum_{x\in X_m} |r_x| + \sum_{x\in Y_n} |r_x| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

protože $X_m$ a $Y_n$ jsou jisté konečné množiny obsažené v $X \setminus Y$. Volba $g = f$ dává cauchyovskost posloupnosti $\big(\sum_{i=1}^{n} r(f(i)) : \ n \in \mathbb{N}\big)$. Ta má podle věty 3.3.20 vlastní limitu $s$. Volba $g \neq f$ ukazuje, že tato limita nezávisí na bijekci $f$. $\square$

Adjektivum „absolutní“ obsažené ve zkratce AK neodkazuje tolik na absolutní hodnotu, ale spíše na to, že součet AK řady nezávisí na pořadí sčítání.

**Úloha 4.5.5** *Ukažte, že součet každé konečné* AK *řady chápané jako* AK *řada se rovná součtu odpovídajícího konečného součtu.*

**Tvrzení 4.5.6 (aproximace součtu)** *Nechť* $R = \sum_{x\in X} r_x$ *je* AK *řada se součtem* $s$. *Pak pro každé* $\varepsilon$ *existuje taková konečná množina* $Y = Y(\varepsilon, R) \subset X$, *že pro každou konečnou množinu* $Z$ *s* $Y \subset Z \subset X$ *je* $|\sum_{x\in Z} r_x - s| \le \varepsilon$.

**Důkaz.** Nechť $f\colon \mathbb{N} \to X$ je libovolná bijekce. Vezmeme $n_0$, že pro $n \ge n_0$ je $|\sum_{i=1}^{n} r_{f(i)} - s| \le \varepsilon/2$ a pro každou konečnou množinu $M \subset \mathbb{N} \setminus [n_0]$ je $\sum_{i\in M} |r_{f(i)}| \le \varepsilon/2$. Položíme $Y = f[\,[n_0]\,]$. Nechť $Z$ s $Y \subset Z \subset X$ je konečná množina. Pak

$$|\textstyle\sum_{x\in Z} r_x - s| \le |\sum_{x\in Y} r_x - s| + \sum_{x\in Z\setminus Y} |r_x| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

□

• AK *řady zobecňují konečné součty.* Nyní ukážeme, že součty AK řad jsou komutativní a asociativní. Získali jsme tedy dobré rozšíření konečných součtů na spočetné. Komutativita je zřejmý důsledek věty 4.5.4.

**Důsledek 4.5.7 (komutativita AK řad)** $R = \sum_{x\in X} r_x$ *buď* AK *řada. Pak pro* $\forall$ *bijekci* $f\colon X \to X$ *je* $\sum_{x\in X} r_{f(x)}$ AK *řada se stejným součtem jako* $R$.

Důkaz asociativity je složitější.

**Věta 4.5.8 (asociativita AK řad)** *Nechť* $R = \sum_{x\in X} r_x$ *je* AK *řada, která má součet* $r$, *a* $Y$ *je rozklad množiny* $X$. *Pro každý blok* $Z \in Y$ *označíme součet* AK *podřady* $R_Z = \sum_{x\in Z} r_x$ *jako* $r(Z)$. *Pak* $S = \sum_{Z\in Y} r(Z)$ *je* AK *řada se součtem* $s$ *rovným* $r$.

**Důkaz.** Nechť $R$ a $Y$ jsou, jak uvedeno. Přidáním nulových sčítanců je možné dosáhnout, že $Y$ i každý blok $Z \in Y$ je spočetná množina. Nejprve dokážeme, že $S$ je AK řada. Nechť

$$c = \sup(\{\textstyle\sum_{x\in Z} |r_x| :\ Z \subset X \text{ a je konečná}\})$$

a $Y' = \{Z_1, \dots, Z_n\} \subset Y$ je konečná množina. Pro $i \in [n]$ vezmeme podle tvrzení 4.5.6 konečné množiny $Z_i' = Y(2^{-i}, R_{Z_i})$ $(\subset Z_i)$. Poůložíme $Z_0 = Z_1' \cup \dots \cup Z_n'$. Pak

$$\textstyle\sum_{Z\in Y'} |r(Z)| \le \sum_{i=1}^{n} |r(Z_i) - \sum_{x\in Z_0} r_x| + |\sum_{x\in Z_0} r_x| \le 1 + c$$

a $\sum_{Z\in Y} r(Z)$ je AK řada.

Buď dáno $\varepsilon$. Dokážeme, že $|r - s| \le \varepsilon$. Podle tvrzení 4.5.6 vezmeme konečné množiny $X' = Y(\varepsilon/3, R)$ $(\subset X)$, $Y' = Y(\varepsilon/3, S) = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ $(\subset Y)$, $n \in \mathbb{N}$, a $Z_i' = Y(2^{-i}\varepsilon/3, R_{Z_i})$ $(\subset Z_i)$, $i \in [n]$. Nechť $X_0 = X' \cup Z_1' \cup \dots \cup Z_n'$ a $Z_n'' = (X' \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i') \cup Z_n'$. Pak $|r - s|$ je

$$\begin{aligned}&\le |r - \textstyle\sum_{x\in X_0} r_x| + \sum_{i=1}^{n-1} |\sum_{x\in Z_i'} r_x - r(Z_i)| + |\sum_{x\in Z_n''} r_x - r(Z_n)| + \\ &+ |\textstyle\sum_{i=1}^{n} r(Z_i) - s| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Vskutku $|r - s| \leq \varepsilon$. Protože to platí pro každé $\varepsilon$, nutně $r = s$. $\square$

**Úloha 4.5.9** *Proč jsme definovali množinu $Z''_n$ tak, jak jsme ji definovali?*

• *Lineární kombinace, suma a součin* AK *řad.* Popíšeme tři základní konstrukce nových AK řad z AK řad již definovaných. Začneme lineární kombinací.

**Tvrzení 4.5.10 (LK AK řad)** *Nechť $R = \sum_{x \in X} r_x$ a $S = \sum_{x \in X} s_x$ jsou* AK *řady se součty $r$ a $s$. Pak ($a, b \in \mathbb{R}$)*

$$T = \textstyle\sum_{x \in X} (ar_x + bs_x)$$

*je* AK *řada se součtem $ar + bs$.*

**Důkaz.** Nechť $c$, resp. $d$, je kladná konstanta dosvědčující podle definice, že $R$, resp. $S$, je AK řada. Nechť $Y \subset X$ je konečná množina. Pak

$$\textstyle\sum_{x \in Y} |ar_x + bs_x| \leq |a| \sum_{x \in Y} |r_x| + |b| \sum_{x \in Y} |s_x| \leq |a|c + |b|d\,.$$

Takže $T$ je AK řada. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to X$ je libovolná bijekce. Pak, podle AL,

$$\lim \textstyle\sum_{i=1}^{n} (ar_{f(i)} + bs_{f(i)}) = a \lim \sum_{i=1}^{n} r_{f(i)} + b \lim \sum_{i=1}^{n} s_{f(i)} = ar + bs\,.$$

$T$ tedy má součet $ar + bs$. $\square$

Suma a součin jsou už více množinově konstrukce. Důkaz první z nich ponecháme jako úlohu.

**Úloha 4.5.11** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 4.5.12 (suma AK řad)** *Nechť $R = \sum_{x \in X} r_x$ a $S = \sum_{y \in Y} s_y$ jsou* AK *řady na disjunktních množinách $X$ a $Y$, se součty $r$ a $s$. Pak*

$$T = \textstyle\sum_{x \in X \cup Y} t_x, \text{ kde } t_x = r_x \text{ pro } x \in X \text{ a } t_x = s_x \text{ pro } x \in Y\,,$$

*je* AK *řada se součtem $t$ rovným $r + s$.*

**Věta 4.5.13 (součin AK řad)** *Nechť $R = \sum_{x \in X} r_x$ a $S = \sum_{y \in Y} s_y$ jsou* AK *řady se součty $r$ a $s$. Pak*

$$T = \textstyle\sum_{(x,\,y) \in X \times Y} r_x s_y$$

*je* AK *řada se součtem $t$ rovným $rs$.*

**Důkaz.** Dokážeme, že $T$ je AK řada. Nechť horní mez $c$, resp. $d$, dosvědčuje podle definice, že $R$, resp. $S$, je AK řada a nechť $Z \subset X \times Y$ je konečná množina. Vezmeme konečné množiny $X' \subset X$ a $Y' \subset Y$, že $Z \subset X' \times Y'$. Pak

$$\textstyle\sum_{(x,\,y) \in Z} |r_x s_y| \leq \sum_{x \in X'} |r_x| \cdot \sum_{y \in Y'} |s_y| \leq cd$$

a $T$ je AK řada. Pro dané $\varepsilon \leq 1$ dokážeme, že $|t - rs| \leq \varepsilon$. Podle tvrzení 4.5.6 zvolíme konečné množiny $Z = Y(\varepsilon/3, T)$ $(\subset X \times Y)$, $X' = Y(\varepsilon/3(|s|+1), R)$ $(\subset X)$ a $Y' = Y(\varepsilon/3(|r|+1), S)$ $(\subset Y)$. Vezmeme konečné množiny $X''$ a $Y''$, že $X' \subset X'' \subset X$, $Y' \subset Y'' \subset Y$ a $Z \subset X'' \times Y''$. Pak $|t - rs|$ je nejvýše

$$\begin{aligned} &|t - \textstyle\sum_{(x,\,y)\in X''\times Y''} r_x s_y| + |\textstyle\sum_{x\in X''} r_x \cdot \sum_{y\in Y''} s_y - rs| \leq \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3} + |(r+\delta)(s+\theta) - rs| \ \text{ s } \ |\delta| \leq \tfrac{\varepsilon}{3(|s|+1)} \ \text{ a } \ |\theta| \leq \tfrac{\varepsilon}{3(|r|+1)}\,. \end{aligned}$$

Takže $|t - rs| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Platí to pro každé $\varepsilon$ a proto $t = rs$. □

• AK *řady versus standardní řady.* Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, což je vlastně posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, se součet standardně definuje jako $\lim(a_1 + \cdots + a_n)$, když tato limita existuje. Výhodou této definice je její jednoduchost. Jsou tu ale dvě nevýhody. Definuje se pojem, který nefunguje, jak potřebujeme — v první přednášce jsme v prvním paradoxu viděli, že takový součet obecně závisí na pořadí sčítanců. Standardně se absolutně konvergentní řady zavádějí až následně, my jsme je zde zavedli hned na začátku. Většina aplikací řad, i když ne všechny, pracuje s absolutně konvergentními řadami. Druhou nevýhodou standardního pojetí řad je přílišná svázanost s indexovou množinou $\mathbb{N}$. Například důkaz exponenciální identity (předvedeme ho ve větě 5.3.3), což je jedna ze základních aplikací absolutně konvergentních řad, lze provést přirozeně, elegantně a dostatečně přesně právě v rámci AK řad, pomocí vět 4.5.8 a 4.5.13.

# Kapitola 5

# Přednáška 4. Řady. Limity funkcí. Elementární funkce

Na rozdíl od posledního oddílu, kde jsme zavedli AK řady, v prvním oddílu kapitoly založené na čtvrté přednášce

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred4.pdf`

přednesené 14. 3. 2024 pojmeme řady standardním způsobem. V tvrzení 5.1.10 dokážeme divergenci harmonické řady a ve větě 5.1.22 odvodíme vzorec pro součet geometrické řady. Riemannova věta 5.1.17 popisuje třídu řad, jejichž součet lze přerovnáním libovolně změnit. V oddílu 5.2 zobecníme limity reálných posloupností na limity funkcí. Dokážeme větu 5.2.12 o Heineho definici limity funkce, která převádí limity funkcí na limity posloupností. V oddílu 5.3 uvedeme na scénu Základní elementární funkce: konstanty, $\exp x$, $\log x$, $a^b$, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$ a inverzy posledních čtyř. Ve větě 5.3.3 dokážeme exponenciální identitu $\exp x \cdot \exp y = \exp(x + y)$.

Nové jsou oddíly 5.4 a 5.5. Zavedeme Opravdu základní elementární funkce. Definice 5.4.4 a 5.4.13 jasně vymezují Elementární funkce jako funkce, které vzniknou ze Základních elementárních funkcí opakovaným sčítáním, násobením, dělením a skládáním. V definicích 5.5.1, resp. 5.5.6, pojmeme novým způsobem polynomy, resp. racionální funkce.

## 5.1 Standardní řady

V oddílu 4.5 jsme zavedli AK řady s komutativními a asociativními součty. Nyní zavedeme řady standardně.

• *Řady všeobecně.* Řada je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Značíme ji symboly $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo i $a_1 + a_2 + \cdots$. Čísla $a_n$ jsou její sčítance. Její součet je limita

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \quad (\in \mathbb{R}^*)\,,$$

existuje-li. Značíme ho opět $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo $a_1 + a_2 + \cdots$. Členy posloupnosti $(s_n) := (a_1 + \cdots + a_n)$ jsou <u>částečné součty</u> $s_n$ řady. Součet řady je tedy limita $\lim s_n$. Řada s vlastním součtem <u>konverguje</u>, jinak <u>diverguje</u>.

**Úloha 5.1.1** *Konvergence a divergence řady jsou robustní vlastnosti.*

Pro součty ale platí následující.

**Úloha 5.1.2** *Pro každou konvergentní řadu se změnou libovolného jediného sčítance její součet změní.*

**Úloha 5.1.3** *Každá řada $a_1 + a_2 + \ldots$, pro níž pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \geq 0$, má součet a ten není $-\infty$. Podobně každá řada se skoro všemi sčítanci nekladnými má součet, který není $+\infty$.*

**Úloha 5.1.4** $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$.

<u>Přerovnáním</u> řady $\sum a_n$ rozumíme řadu $\sum a_{f(n)}$, kde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce.

**Tvrzení 5.1.5 (komutativní součty)** *Má-li řada $\sum a_n$ jen konečně mnoho záporných sčítanců nebo jen konečně mnoho kladných sčítanců, <u>pak</u> všechna její přerovnání mají stejný součet $A$.*

**Důkaz.** Nechť $\sum a_n$ má jen konečně mnoho kladných sčítanců s indexy $I \subset \mathbb{N}$, $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou bijekce a $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_{f(i)}$, $t_n = \sum_{i=1}^{n} a_{g(i)}$. Vezmeme $m$, že $f[\,[m]\,], g[\,[m]\,] \supset I$. Pak $(s_n)$ a $(t_n)$ od indexu $m$ nerostou a podle důsledku 3.3.4 obě mají limitu. Dále není těžké vidět, že pro každé $n_1 \geq m$ existují $n_2, n_3 \geq m$, že $t_{n_2} \leq s_{n_1}$ a $s_{n_3} \leq t_{n_1}$. Tedy $\lim s_n = \lim t_n$. V případě, že $\sum a_n$ má jen konečně mnoho záporných sčítanců, argumentujeme podobně. □

<u>Nutnou podmínkou konvergence</u> řady $\sum a_n$ je, že $\lim a_n = 0$. Dokazuje to následující tvrzení.

**Tvrzení 5.1.6 (NPK řady)** *Když $\sum a_n$ konverguje, <u>pak</u> se $\lim a_n = 0$.*

**Důkaz.** Nechť pro řadu $\sum a_n$ je součet $s = \lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$ vlastní. Pak $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$. □

Pokud tedy $\lim a_n$ neexistuje nebo není 0, řada $\sum a_n$ diverguje. Pro součet $\pm\infty$ NKP pochopitelně neplatí.

**Úloha 5.1.7** *Zdůvodněte rovnosti v závěrečném výpočtu v důkazu.*

• <u>*Harmonická řada*</u>. Je to řada $\sum \frac{1}{n}$. I když $\lim \frac{1}{n} = 0$, uvidíme, že tato řada diverguje a má součet $+\infty$.

**Úloha 5.1.8** *Když $(a_n)$ neklesá a má podposloupnost s limitou $+\infty$, potom též $\lim a_n = +\infty$.*

**Úloha 5.1.9** *Když řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ splňují pro každé $n \geq n_0$, že $a_n \geq b_n$, a když součet $\sum b_n = +\infty$, potom i součet $\sum a_n = +\infty$.*

**Tvrzení 5.1.10 (součet harmonické řady)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots = +\infty$.

**Důkaz.** Vezmeme řadu $\sum b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$. Obecně $b_{2^k} = b_{2^k+1} = \cdots = b_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2^{k+1}}$. Pro $\forall n$ je $\frac{1}{n} \geq b_n$. Částečné součty $(s_n)$ řady $\sum b_n$ rostou a pro $k \in \mathbb{N}_0$ se $s_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2}$. Podle úlohy 5.1.8 se součet $\sum b_n = \lim s_n = +\infty$. Podle úlohy 5.1.9 i součet $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. □

Podle tvrzení 5.1.5 každé přerovnání harmonické řady má součet $+\infty$. Její částečné součty $(h_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \dots)$ $(\subset \mathbb{Q})$ jsou tzv. harmonická čísla. Že jdou do $+\infty$ dokázal už v r. 1350 francouzský scholastik Mikuláš Oresme (viz oddíl C.1).

**Věta 5.1.11 (asymptotika čísel $h_n$)** *Pro $n \in \mathbb{N}$ se harmonická čísla*

$$h_n = \log n + \gamma + a_n, \quad \text{kde } a_n = O(1/n)\,.$$

*Zde $\gamma = 0.57721\dots$ je tzv. Eulerova konstanta a symbolika $a_n = O(1/n)$ znamená, že $|a_n| \leq c/n$ pro nějakou konstantu $c > 0$.*

Tuto větu dokážeme v přednášce 14 pomocí integrálů. Asymptotické značení včetně $O(\cdot)$ zavedeme v oddílu 7.5.

**Úloha 5.1.12** *Dokažte, že $h_n \in \mathbb{N} \iff n = 1$. Návod: $m = (2l-1)2^k$.*

**Úloha 5.1.13 (zatím nevyřešeno)** *Eulerova konstanta $\gamma$ je iracionální číslo.*

• *Riemannova věta.* V první přednášce jsme se setkali s řadou $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$ se součtem 0. Ten jsme přerovnáním sčítanců změnili na kladný. Ve větě níže dokážeme, že vhodným přerovnáním můžeme získat libovolný součet. Začneme ale méně obecnými změnami součtů. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Indexy jejích nezáporných sčítanců označíme jako $k_1 < k_2 < \dots$ a podobně jako $z_1 < z_2 < \dots$ označíme indexy jejích záporných sčítanců. Je-li indexů $k_n$ nekonečně mnoho, podle tvrzení 5.1.5 mají všechna přerovnání řady $\sum a_{k_n}$ stejný součet. Totéž platí pro případnou řadu $\sum z_n$.

**Tvrzení 5.1.14 (součet $\pm\infty$)** *$\sum a_n$ má přerovnání se součtem $-\infty$ $\iff$ součet $\sum a_{z_n} = -\infty$. Podobně $\sum a_n$ má přerovnání se součtem $+\infty$ $\iff$ součet $\sum a_{k_n} = +\infty$.*

**Důkaz.** Dokážeme první tvrzení a důkaz druhého přenecháme úloze. Nechť $\sum a_{z_n} = -\infty$. Můžeme předpokládat, že indexů $k_n$ je nekonečně mnoho. Je-li jich jen konečně mnoho, podle tvrzení 5.1.5 má každé přerovnání řady $\sum a_n$ součet $-\infty$. Bijekci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pro níž součet $\sum a_{f(n)} = -\infty$, sestrojíme

v podobě prostých posloupností $P_k = (m_{n,k}) \subset \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, jejichž členy jsou indexy $k_n$ a $z_n$. Začneme posloupností $P_0 = (z_n)$. V $P_0$ vezmeme nějaký počáteční úsek $U_1$, že $\sum_{i \in U_1} a_i \leq -1 - a_{k_1}$. Za $U_1$ vložíme do $P_0$ index $k_1$ a dostaneme tak posloupnost $P_1$. V $P_1$ vezmeme nějaký počáteční úsek $U_2$, že $|U_2| > |U_1|$ a $\sum_{i \in U_2} a_i \leq -2 - a_{k_2}$. Za $U_2$ vložíme do $P_1$ index $k_2$ a dostaneme tak posloupnost $P_2$. A tak dál. $P_0$, $P_1$, $P_2$, ... zřejmě konvergují (vzhledem k $|U_1| < |U_2| < \dots$) ke hledané bijekci $f$.

Nechť není pravda, že $\sum a_{z_n} = -\infty$. Pak buď existuje jen konečně mnoho indexů $z_n$, anebo součet $\sum a_{z_n} \in \mathbb{R}$. V prvním případu podle tvrzení 5.1.5 všechna přerovnání řady $\sum a_n$ mají stejný součet, který jistě není $-\infty$. Ve druhém případu existuje $c$, že pro každé $n$ je $\sum_{i=1}^{n} a_{z_i} \geq c$. Odtud plyne, že žádné přerovnání řady $\sum a_n$ nemá součet $-\infty$. □

**Úloha 5.1.15** *Druhou část předešlého tvrzení dokažte redukcí na první část.*

**Tvrzení 5.1.16 (neexistence součtu)** *Řada $\sum a_n$ má přerovnání bez součtu $\iff$ součet $\sum a_{z_n} = -\infty$ a součet $\sum a_{k_n} = +\infty$.*

**Důkaz.** Nechť součet $\sum a_{z_n} = -\infty$ a součet $\sum a_{k_n} = +\infty$. Vezmeme počáteční úsek $U_1$ posloupnosti $(z_n)$, že $\sum_{i \in U_1} a_i \leq -1$. Vezmeme počáteční úsek $V_1$ posloupnosti $(k_n)$, že $\sum_{i \in V_1} a_i \geq 2$. Vezmeme počáteční úsek $U_2$ posloupnosti $(z_n) \setminus U_1$, že $\sum_{i \in U_2} a_i \leq -2$. Vezmeme počáteční úsek $V_2$ posloupnosti $(k_n) \setminus V_1$, že $\sum_{i \in V_2} a_i \geq 2$. A tak dá. Posloupnost

$$U_1 V_1 U_2 V_2 \ldots \subset \mathbb{N}$$

je bijekce $f$ z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a řada $\sum a_{f(n)}$ nemá součet, protože jak $\sum_{i=1}^{n} a_{f(i)} \leq -1$, tak $\sum_{i=1}^{n} a_{f(i)} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n$.

Nechť například součet $\sum a_{z_n} \in \mathbb{R}$. V případu, že $\sum a_{k_n} \in \mathbb{R}$, argumentujeme podobně. Pokud součet $\sum a_{k_n} = +\infty$, lehce se vidí, že každé přerovnání řady $\sum a_n$ má součet $+\infty$. Pokud i $\sum a_{k_n} \in \mathbb{R}$, řada $\sum a_n$ je AK řada a podle věty 4.5.4 mají všechna její přerovnání týž (vlastní) součet. □

**Věta 5.1.17 (Riemannova)** *Když řada $\sum a_n$ splňuje, že $\lim a_n = 0$, součet $\sum a_{k_n} = +\infty$ a součet $\sum a_{z_n} = -\infty$, pak pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ má $\sum a_n$ přerovnání se součtem $A$. Také má přerovnání bez součtu.*

**Důkaz.** Případy $A = \pm\infty$ řeší tvrzení 5.1.14. Případ neexistujícího součtu řeší tvrzení 5.1.16. Nechť $A = b \in \mathbb{R}$. Induktivně definujeme prostou posloupnost $(p_n) \subset \mathbb{N}$, která je bijekcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a pro kterou se součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = b$. Během konstrukce budeme označovat (od začátku) členy posloupností $(z_n)$ a $(k_n)$ jako „použité“. Začneme se všemi členy obou posloupností nepoužitými. Položíme $p_1 = k_1$ a index $k_1$ označíme jako použitý. Nechť už jsou $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ definované a $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_{p_i}$. Pokud $s_n \leq b$, pak $p_{n+1}$ je první nepoužitý člen posloupnosti $(k_n)$, který označíme jako použitý. Pokud $s_n > b$, pak $p_{n+1}$ je první nepoužitý člen posloupnosti $(z_n)$, který označíme jako použitý.

Není těžké vidět, že jak $s_n \le b$, tak $s_n > b$ pro nekonečně mnoho $n$. Tedy vyčerpáme obě posloupnosti a $(p_n)$ je bijekce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Pro každé $n \ge n_0$ je

$$s_n \in [b + a_{z_{i_n}}, b + a_{k_{j_n}}],$$

přičemž $\lim i_n = \lim j_n = +\infty$. Protože $\lim a_n = 0$, je $\lim s_n = b$. □

O německém matematikovi B. Riemannovi píšeme v oddílu C.1.

• *Absolutně konvergentní řady.* Tyto řady jsme značné obecně probrali už v minulém oddílu 4.5 o AK řadách. Zde se na ně podíváme standardně.

**Definice 5.1.18 (abskon řady)** *$\sum a_n$ je absolutně konvergentní řada (abskon řada), pokud součet $\sum |a_n| < +\infty$.*

Je jasné, že každá abskon řada je AK řada.

**Věta 5.1.19 (nekonečná Δ-ová nerovnost)** *$\sum a_n$ buď abskon řada. Potom $\sum a_n$ konverguje a pro součty platí nerovnost $|\sum a_n| \le \sum |a_n|$.*

**Důkaz.** Nechť $\sum a_n$ je abskon řada s částečnými součty $(s_n)$ a $\sum |a_n|$ má částečné součty $(t_n)$. Konvergence řady $\sum a_n$ plyne z věty 4.5.4, ale zde ji dokážeme bez pomoci této věty. Podle předpokladu a věty 3.3.20 je $(t_n)$ Cauchyova posloupnost. Pro dané $\varepsilon$ tedy pro každé dva velké indexy $m \le n$ platí nerovnost

$$|t_n - t_m| = \big||a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|\big| = |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| \le \varepsilon$$

(pro $m = n$ jsou tyto součty nulové). Díky konečné Δ-ové nerovnosti tedy pro stejné indexy $m \le n$ platí i nerovnosti

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \le |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| \le \varepsilon$$

a $(s_n)$ je Cauchyova posloupnost. Podle věty 3.3.20 posloupnost $(s_n)$ konverguje. Tedy řada $\sum a_n$ konverguje.

Díky konečné Δ-ové nerovnosti pro každé $n$ platí nerovnost $|s_n| \le t_n$, ekvivalentně $-t_n \le s_n \le t_n$. Limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme podle věty 4.3.2 pro součty nerovnosti $-\sum |a_n| \le \sum a_n \le \sum |a_n|$ a tedy $\big|\sum a_n\big| \le \sum |a_n|$. □

**Úloha 5.1.20** *Každé přerovnání abskon řady je abskon řada.*

**Tvrzení 5.1.21 (o abskon řadách)** *$\sum a_n$ je abskon řada $\iff$ všechna její přerovnání mají týž vlastní součet.*

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$ plyne z věty 4.5.4. Pokud $\sum a_n$ není abskon řada, pak součet $\sum a_{z_n} = -\infty$ nebo součet $\sum a_{k_n} = +\infty$ a podle tvrzení 5.1.14 některé přerovnání této řady nemá vlastní součet. □

• *Geometrické řady.* Jsou to řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$, kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient řady.

**Věta 5.1.22 (součet GŘ)** *Součet* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *je* $\frac{1}{1-q}$ *pro* $-1 < q < 1$, $+\infty$ *pro* $q \geq 1$ *a neexistuje pro* $q \leq -1$.

**Důkaz.** Pro každé $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí identita

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \tfrac{1-q^n}{1-q} = \tfrac{1}{1-q} + \tfrac{q^n}{q-1}\,.$$

Pro $q < -1$ tedy podle AL máme $\lim s_{2n-1} = +\infty$ a $\lim s_{2n} = -\infty$, tedy $\lim s_n$ neexistuje. Pro $q = -1$ je podobně $s_{2n-1} = 1$ a $s_{2n} = 0$, řada opět nemá součet. Pro $-1 < q < 1$ je $\lim q^n = 0$, takže podle AL máme součet $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$. Pro $q = 1$ se $s_n = n$, takže máme součet $\lim s_n = +\infty$. Pro $q > 1$ se $\lim q^n = +\infty$ a podle AL máme součet $\lim s_n = +\infty$. □

Jednou z aplikací tohoto vzorce je třeba rovnost desetinného rozvoje a zlomku

$$27.272727\cdots = 27(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots) = 27 \cdot \tfrac{1}{1-10^{-2}} = \tfrac{27\cdot 100}{99} = \tfrac{300}{11}\,.$$

**Úloha 5.1.23** *Pro* $q \in (-1, 1)$ *a* $m \in \mathbb{Z}$ *platí, že* $q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots = \frac{q^m}{1-q}$.

**Úloha 5.1.24** *Která geometrická řada je abskon?*

• *Zeta (dzéta) funkce/řada* $\zeta(s)$. Je to funkce $\zeta(s)\colon \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$ definovaná řadou $\zeta(s) = \sum n^{-s}$. Zde uvažujeme jen reálné $s$. Použijeme funkci reálné mocniny $a^b$ pro $a > 0$, kterou zavedeme za chvíli v oddílu 5.3.

**Definice 5.1.25 (řada $\zeta(s)$)** *Pro* $s \in \mathbb{R}$ *řada* $\zeta(s)$ *je* $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$.

Její konvergenci rozhodneme Cauchyovým kondenzačním kritériem.

**Věta 5.1.26 (CKK)** *Nechť* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *jsou reálná čísla. Potom řada* $\sum a_n$ *konverguje* $\iff$ *řada* $R = \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ *konverguje.*

**Důkaz.** Nechť $R$ má součet $+\infty$. Tedy i $\frac{1}{2}R = \sum 2^{n-1} \cdot a_{2^n}$ má součet $+\infty$. Platí nerovnosti $a_2 \geq a_2$, $a_3 + a_4 \geq 2a_4$, $a_5 + \cdots + a_8 \geq 4a_8$, $\dots$, $\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j \geq 2^{k-1} a_{2^k}$, $\cdots$. Sečtení dává, že součet $\sum a_n = +\infty$. Nechť $R$ konverguje. Platí nerovnosti $a_2 + a_3 \leq 2a_2$, $a_4 + \cdots + a_7 \leq 4a_4$, $\dots$, $\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq 2^k a_{2^k}$, $\cdots$. Sečtení dává, že řada $\sum a_n$ konverguje. □

**Věta 5.1.27 (o zeta funkci)** *Pro* $s \leq 1$ *má řada* $\zeta(s)$ *součet* $+\infty$. *Pro* $s > 1$ *tato řada konverguje.*

**Důkaz.** Dokázat první tvrzení je úloha níže. Nechť $s > 1$. Řada $R$ z CKK pro řadu $\zeta(s)$ je

$$\sum 2^n/(2^n)^s = \sum (1/2^{s-1})^n\,.$$

Protože $0 < 1/2^{s-1} < 1$, tato geometrická řada konverguje a podle věty 5.1.26 řada $\zeta(s)$ konverguje. □

V oddílu 6.5 dokážeme, že $\zeta(2) = \pi^2/6$. To je jeden z nejslavnějších výsledků L. Eulera (viz oddíl C.1). V oddílu 6.6 dokážeme, že $\zeta(3)$ je iracionální číslo.

**Úloha 5.1.28** *Dokažte, že pro $s \leq 1$ se součet řady $\zeta(s)$ rovná $+\infty$.*

**Úloha 5.1.29** *Pro která reálná $s$ konverguje řada $\sum_{n\geq 2} 1/n(\log n)^s$?*

## 5.2 Limity funkcí

Limity reálných posloupností, což jsou vlastně funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, rozšíříme na obecné funkce z $M$ do $\mathbb{R}$ pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}$.

• *Prstencová okolí a limitní body.* Pro $A \in \mathbb{R}^*$ známe $\varepsilon$-okolí $U(A, \varepsilon)$. Prstencové $\varepsilon$-okolí prvku $A$ je definováno jako

$$P(A, \varepsilon) = U(A, \varepsilon) \setminus \{A\}\,.$$

Prvek $L \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon \big(P(L, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\big)\,.$$

Množinu limitních bodů množiny $M \subset \mathbb{R}$ označíme jako $L(M)$ ($\subset \mathbb{R}^*$).

**Úloha 5.2.1** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 5.2.2 (o limitních bodech)** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Následující tvrzení jsou vzájemně ekvivalentní.* (1) *$A \in L(M)$.* (2) *Existuje posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ s $\lim a_n = A$.* (3) *Existuje prostá posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = A$.* (4) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $P(A, 1/n) \cap M \neq \emptyset$.*

**Úloha 5.2.3** *Žádná konečná množina $M \subset \mathbb{R}$ nemá limitní bod.*

**Úloha 5.2.4** *Každá nekonečná množina $M \subset \mathbb{R}$ má limitní bod.*

**Úloha 5.2.5** *Když $b \in L(M)$, pak i $b \in L(M \setminus \{b\})$.*

• *Reálné funkce a jejich limity.* Zavedeme a připomeneme následující značení.

**Definice 5.2.6 (značení funkcí)** *Pro $M \subset \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}(M) = \{f : f\colon M \to \mathbb{R}\}$. Klademe $\mathcal{R} = \bigcup_{M\subset\mathbb{R}} \mathcal{F}(M)$. Pro $f \in \mathcal{F}(M)$ definujeme $Z(f) = \{b \in M : f(b) = 0\}$. Definiční obor funkce $g\colon X \to Y$ je $M(g) = X$.*

**Definice 5.2.7 (limita funkce)** *Nechť je $f \in \mathcal{F}(M)$, $A \in L(M)$ a $L \in \mathbb{R}^*$. Když pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že*

$$f[P(A, \delta)] \subset U(L, \varepsilon)\,, \tag{*}$$

*píšeme $\lim_{x\to A} f(x) = L$ a řekneme, že funkce f má v A limitu L.*

Ano, vzhledem k definici obrazu množiny funkcí v první přednášce stačí místo $f[P(A,\delta)\cap M]$ psát jen $f[P(A,\delta)]$. Limita nezávisí na hodnotě $f(A)$. Funkce $f$ ani nemusí, a pro $A=\pm\infty$ ani nemůže, být v prvku $A$ definovaná. Pro posloupnost $(a_n)\subset\mathbb{R}$, což je funkce $a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, se $\lim_{x\to+\infty}a(x)=\lim a_n$.

**Úloha 5.2.8** *Jaké další limitní body má množina $\mathbb{N}$ ($\subset\mathbb{R}$) kromě $+\infty$?*

Pro $A=a\in\mathbb{R}$ & $L=b\in\mathbb{R}$ můžeme vztah $\lim_{x\to a}f(x)=b$ zapsat jako

$$\forall\,\varepsilon\,\exists\,\delta\,\big(x\in M(f)\wedge 0<|x-a|\le\delta\Rightarrow|f(x)-b|\le\varepsilon\big)$$

— připomínáme, že máme raději bezpečnější neostré nerovnosti. Ne vždy literatura jasně říká, že pro $f\in\mathcal{F}(M)$ a $A\notin L(M)$ není $\lim_{x\to A}f(x)$ definovaná. Pro nějaké $\delta$ pak je totiž $P(A,\delta)\cap M=\emptyset$ a $f[P(A,\delta)]=\emptyset$. Inkluze (*) v definici by pak platila pro každé $L$ a každé $\varepsilon$. Pokud napíšeme, že $\lim_{x\to A}f(x)$ existuje, implicitně se tím rozumí, že $A\in L(M(f))$.

**Tvrzení 5.2.9 (jednoznačnost limity)** *Limita funkce je jednoznačná — když $\lim_{x\to K}f(x)=L$ i $\lim_{x\to K}f(x)=L'$, <u>pak</u> $L=L'$.*

**Důkaz.** Pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že množina $f[P(K,\delta)]$ ($\neq\emptyset$) je obsažená v $U(L,\varepsilon)$ i v $U(L',\varepsilon)$. Tedy $\forall\varepsilon\big(U(L,\varepsilon)\cap U(L',\varepsilon)\neq\emptyset\big)$. Podle úlohy 3.1.13 se $L=L'$. □

Limita restrikce funkce se rovná limitě původní funkce.

**Tvrzení 5.2.10 (limita restrikce)** *Nechť $f\in\mathcal{F}(M)$, $X$ je libovolná množina, $A\in L(X\cap M)$ a nechť $\lim_{x\to A}f(x)=L$. <u>Pak</u> i $\lim_{x\to A}(f\,|\,X)(x)=L$.*

**Důkaz.** Pro dané $\varepsilon$ existuje $\delta$, že $f[P(A,\delta)]\subset U(L,\varepsilon)$. Z inkluze $P(A,\delta)\cap(X\cap M)\subset P(A,\delta)\cap M$ a z definice restrikce funkce dostáváme inkluze

$$(f\,|\,X)[P(A,\,\delta)]\subset f[P(A,\,\delta)]\subset U(L,\,\varepsilon)\,.$$

Tedy $\lim_{x\to A}(f\,|\,X)(x)=L$. □

**Úloha 5.2.11** *Uveďte příklad, kdy $f\in\mathcal{F}(M)$, $X$ je množina a $\lim_{x\to A}f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{x\to A}(f\,|\,X)(x)$ existuje (speciálně $A\in L(X\cap M)$).*

• *Heineho definice limity funkce.* Viděli jsme, že limita posloupnosti je speciálním případem limity funkce. E. Heine (viz oddíl C.1) ukázal, jak naopak limitu funkce zredukovat na limitu posloupnosti.

**Věta 5.2.12 (Heineho definice LF)** *Nechť je $f\in\mathcal{F}(M)$ a $K\in L(M)$. <u>Pak</u> $\lim_{x\to K}f(x)=L\iff$ pro každou posloupnost $(a_n)\subset M\setminus\{K\}$ s $\lim a_n=K$ se $\lim f(a_n)=L$.*

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim_{x\to K} f(x) = L$, $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ má limitu $K$ a je dáno $\varepsilon$. Pak existuje $\delta$, že pro $\forall\, x \in P(K,\delta) \cap M$ je $f(x) \in U(L,\varepsilon)$. Pro toto $\delta$ existuje $n_0$, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \in P(K,\delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(L,\varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

Obměna $\neg \Rightarrow \neg$. Nechť neplatí, že $\lim_{x\to K} f(x) = L$. Pak $\exists\, \varepsilon$, že pro $\forall\, \delta$ $\exists\, b = b(\delta) \in P(K,\delta) \cap M$ s $f(b) \notin U(L,\varepsilon)$. Pro $n$ v $\mathbb{N}$ vezmeme $\delta = \frac{1}{n}$ a pro $\forall\, n$ vybereme bod $b_n = b(\frac{1}{n}) \in P(K, 1/n) \cap M$, že $f(b_n) \notin U(L,\varepsilon)$. Pak $(b_n) \subset M \setminus \{K\}$ a $\lim b_n = K$, ale $\neg\big(\lim f(b_n) = L\big)$. Pravá strana ekvivalence tedy neplatí. $\square$

V důkazu obměny $\neg \Rightarrow \neg$ jsme použili axiom výběru, viz oddíl 2.1.

**Úloha 5.2.13** *Jak jsme ho použili?*

• *Pár limit.* Spočítáme si jednu limitu funkce. Díky identitám $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$ a $\frac{x}{y} = \frac{1}{y/x}$ vidíme, že $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+1/(+\infty)}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

**Úloha 5.2.14** *Spočítejte limity*
(1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$,
(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$,
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *a*
(4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

## 5.3 Základní elementární funkce

Postupně zavedeme pět podmnožin v $\mathcal{R}$: Základní elementární funkce (ZEF), Elementární funkce (EF), Opravdu základní elementární funkce (OZEF), polynomy (POL) a racionální funkce (RAC). Základní elementární funkce (ZEF) jsou konstanty $k_c(x)$ s $c \in \mathbb{R}$, $\exp x$, $\log x$, $a^x$ s $a > 0$, $x^b$ s $b > 0$, $0^x$, $x^m$ s $m \in \mathbb{Z}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ a $\operatorname{arccot} x$. Postupně je teď všechny definujeme.

• *Konstantní funkce čili konstanty* jsou funkce $k_c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ s $c \in \mathbb{R}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ tedy $k_c(x) = c$.

**Úloha 5.3.1** *Kolik je konstantních funkcí?*

• *Exponenciála* $\exp x = \exp(x) = \mathrm{e}^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dána součtem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (zde $0^0 = 1$).

**Úloha 5.3.2** *Pro každé reálné $x$ je $\exp x$ abskon řada, tudíž i* AK *řada.*

Pomocí AK řad dokážeme exponenciální identitu.

**Věta 5.3.3 (exponenciální identita)** $\forall\, x,\, y\, \big(\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)\big)$.

**Důkaz.** Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Věty 4.5.13 a 4.5.8 dávají rovnosti součtů

$$\exp x \cdot \exp y = \sum_{(m,\,n)\in\mathbb{N}_0^2} \frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m,\,n\in\mathbb{N}_0\\ m+n=k}} \frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!}\,,$$

protože $\exp x$ je AK řada. Díky algebraické úpravě a úloze 3.2.9 se poslední součet rovná $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m y^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+y)^k = \exp(x+y)$. $\square$

**Úloha 5.3.4** *Dokažte části 1–3 následujícího tvrzení.*

**Tvrzení 5.3.5 (vlastnosti $\mathrm{e}^x$)** *Pro exponenciálu platí následující.*

1. *Je* $\exp 0 = 1$ *a pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\exp x > 0$ *a* $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.
2. *Pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí, že* $x < y \Rightarrow \exp x < \exp y$.
3. *Platí limity* $\lim_{x\to-\infty}\exp x = 0$ *a* $\lim_{x\to+\infty}\exp x = +\infty$.
4. *Funkce* exp *je bijekce z* $\mathbb{R}$ *do* $(0, +\infty)$.

Část 4 dokážeme v důsledku 8.3.3.

• <u>*Eulerovo číslo* e</u> je $\mathrm{e} = \exp 1 = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828\cdots$.

**Úloha 5.3.6** *Dokažte, že číslo* e *je iracionální. Návod: rovnici* $\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!} = \frac{n}{m}$ *vynásobte číslem* $m!$.

• <u>*(Přirozený) logaritmus*</u> $\log\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Je to inverz exponenciály, $\log = \exp^{-1}$. Jeho vlastnosti tak dostaneme invertováním vlastností exponenciály.

**Úloha 5.3.7** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 5.3.8 (vlastnosti logaritmu)** *Platí následující.*

1. *Je* $\log 1 = 0$ *a pro každé* $x,\, y > 0$ *platí, že* $\log xy = \log x + \log y$ *a že* $x < y \Rightarrow \log x < \log y$.
2. *Platí, že* $\lim_{x\to 0}\log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$.
3. *Funkce* log *je bijekce z* $(0, +\infty)$ *do* $\mathbb{R}$.

• <u>*Reálná mocnina* $a^b$</u>. V ní $a$ je <u>základ</u> a $b$ je <u>exponent</u>. Uvedeme pro ni dvě vzájemně neporovnatelné definice. První používá exponenciálu a logaritmus a druhá opakované násobení, spolu s dělením.

**Definice 5.3.9 ($a^b$ analyticky)** *Definujeme tyto tři systémy funkcí tvaru* $a^b$.
1. $a^x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *s* $a > 0$ *je dána jako* $a^x = \exp(x\log a)$.
2. $x^b \in \mathcal{F}([0, +\infty))$ *s* $b > 0$ *je pro* $x > 0$ *dána jako* $x^b = \exp(b\log x)$ *a* $0^b = 0$.
3. $0^x \in \mathcal{F}((0, +\infty))$ *je dána jako* $0^x = 0$.

Zde tedy $0^0$ nedefinujeme a vždy $a^b \geq 0$. Liché odmocniny, to jest $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$, atd. se někdy definují pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak např. $\sqrt[3]{-8} = -2$. My pro ně ale záporné $x$ nepovolíme.

**Definice 5.3.10 ($a^b$ algebraicky)** *Definujeme funkce $x^m$, $m \in \mathbb{Z}$. Pro $m > 0$ je $x^m \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dána jako $x^m = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ s $m$ činiteli. Funkci $x^0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definujeme jako $x^0 = k_1(x) = 1$. Pro $m < 0$ je $x^m \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ dána jako $x^m = 1/x^{-m}$.*

Zde tedy definujeme $0^0 = 1$ a může být, že $a^b < 0$.

**Úloha 5.3.11** *Definice 5.3.9 a 5.3.10 mocniny $a^b$ na svém průniku souhlasí.*

**Úloha 5.3.12** *Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ se $\mathrm{e}^x = \exp x$. Zde je vlevo reálná mocnina se základem $\mathrm{e} = 2.71\ldots$ a exponentem $x$ a vpravo hodnota exponenciály.*

**Tvrzení 5.3.13 (tři základní mocninné identity)** *Pro reálná čísla $a, b > 0$ & $x, y$ platí identity*

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \& \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \ .$$

**Důkaz.** $(ab)^x$ je $\exp(x \log(ab)) = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x \log a) \exp(x \log b) = a^x b^x$. Podobně $a^x a^y$ je $\exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp((x+y) \log a) = a^{x+y}$. $(a^x)^y$ je $\exp(y \log(\exp(x \log a))) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$. □

Ale $\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \neq -1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}}$, kde jsme použili obě definice reálné mocniny. A. Tarski (viz oddíl C.1) přišel s domněnkou, že každá mocninná identita, jako je třeba $x^y \cdot (x^y)^y = x^{y+y^2}$, se dá odvodit z předchozích tří základních identit (a dalších základních vlastností operací sčítání, násobení a umocňování). V r. 1981 jeho domněnku vyvrátil A. Wilkie, když dokázal, že mocninné identity jako

$$\begin{aligned}&\left((1+x)^y + (1+x+x^2)^y\right)^x \cdot \left((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x\right)^y \\ &= \left((1+x)^x + (1+x+x^2)^x\right)^y \cdot \left((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y\right)^x\end{aligned}$$

nelze odvodit ze tří základních mocninných identit. Takovým identitám nyní říkáme Wilkieho identity. Pro podrobnosti viz oddíl 6.12.

**Úloha 5.3.14** *Dokažte, že pro reálná čísla $x, y > 0$ platí uvedená Wilkieho identita. Návod: $(1+x) \cdot (1+x^2+x^4) = (1+x^3) \cdot (1+x+x^2)$.*

**Úloha 5.3.15** *Ukažte, že $0^0$ je neurčitý výraz: pro každé nezáporné $A \in \mathbb{R}^*$ existují posloupnosti $(a_n) \subset (0, +\infty)$ a $(b_n) \subset \mathbb{R}$, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim (a_n)^{b_n} = A$. Proč to neplatí se záporným $A$?*

Definovat $0^0$ jako 1 se ale často hodí.

• *Kosinus a sinus.* Funkce $\cos, \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pocházejí z geometrie, ale lze je definovat i součty řad. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ se $\cos t$ rovná součtu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ (zde $0^0 = 1$) a $\sin t$ součtu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Tedy $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \cdots$ a $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \cdots$.

**Úloha 5.3.16** *Pro každé $t$ je $\cos t$ i $\sin t$ abskon řada, tedy i* AK *řada.*

Množina bodů v rovině $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$ je jednotková kružnice, s poloměrem 1 a středem $(0, 0)$.

**Věta 5.3.17 (o běžkyni)** *Nechť $t \in \mathbb{R}$. Běžkyně vyběhne z bodu $(1, 0)$ kruhové dráhy $S$ a běží po ní jednotkovou rychlostí, pro $t > 0$ proti a pro $t \leq 0$ po směru hodinových ručiček. Pak v čase $|t|$ se běžkyně nachází v bodě $(\cos t, \sin t)$ $(\in S)$.*

Přesné geometrické zavedení kosinu a sinu není jednoduchá věc, musí se začít definicí délky oblouku kružnice, a věnujeme mu oddíl 6.11. Tam také dokážeme tuto větu.

Číslo $\pi$ lze definovat dvěma způsoby. Jednak $\pi = 3.14159\ldots$ je dvojnásobek nejmenšího $x > 0$, že $\cos x = 0$. Dále $2\pi$ je obvod kružnice $S$: čas, kdy běžkyně opět proběhne startem. Druhá definice je neformální, protože délka kruhového oblouku je definována až v oddílu 6.11. Tam také dokážeme ekvivalenci obou definic. Základní vlastnosti sinu a kosinu zde proto uvádíme jen podmíněně, předpokládáme větu 5.3.17.

**Úloha 5.3.18** *Odvoďte z věty 5.3.17 následující tvrzení.*

**Tvrzení 5.3.19 (sinus a kosinus)** *Sinus a kosinus mají následující vlastnosti.*

1. *Jsou to $2\pi$-periodické funkce:* $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ *a* $\sin(t + 2\pi) = \sin t$.
2. *Na intervalu* $[0, \pi/2]$ *sinus roste z* 0 *do* 1.
3. $\forall\, t \in [0, \pi]\ \big(\sin(t) = \sin(\pi - t)\big)$ *a* $\forall\, t \in [0, 2\pi]\ \big(\sin(t) = -\sin(2\pi - t)\big)$.
4. *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ se* $\cos t = \sin(t + \pi/2)$ *a* $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
5. *Platí součtové vzorce: pro každé $s, t \in \mathbb{R}$ se*

$$\begin{aligned} \sin(s \pm t) &= \sin s \cdot \cos t \pm \cos s \cdot \sin t \ \text{ a} \\ \cos(s \pm t) &= \cos s \cdot \cos t \mp \sin s \cdot \sin t\ . \end{aligned}$$

**Úloha 5.3.20 (Eulerův vzorec)** $\forall\, t\ \big(\exp(it) = \cos t + i \sin t\big)$, $i = \sqrt{-1}$.

• *Funkce tangens a kotangens* jsou definovány jako $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ a $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

**Úloha 5.3.21** $M(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2m-1)\pi}{2} :\ m \in \mathbb{Z}\}$, $M(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{m\pi :\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Arkus sinus (inverzní sinus) a arkus kosinus (inverzní kosinus) je inverz restrikce sinu, resp. kosinu, na interval $[-\pi/2, \pi/2]$, resp. $[0, \pi]$. Jsou to bijekce

$$\arcsin\colon [-1,\, 1] \to [-\pi/2,\, \pi/2] \;\text{ a }\; \arccos\colon [-1,\, 1] \to [0,\, \pi]\ .$$

Funkce arkus tangens (inverzní tangens) a arkus kotangens (inverzní kotangens) je inverz restrikce funkce tangens, resp. kotangens, na interval $(-\pi/2, \pi/2)$, resp. $(0, \pi)$. Jsou to bijekce

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2,\, \pi/2) \;\text{ a }\; \operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\, \pi)\ .$$

## 5.4 Elementární funkce

• *Operace s funkcemi.* Začneme čtyřmi (binárními) operacemi na množině $\mathcal{R}$ (viz definice 5.2.6). Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Součet $f + g\colon M(f) \cap M(g) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Součin $fg\colon M(f) \cap M(g) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x)g(x)$. Podíl $f/g\colon M(f) \cap M(g) \setminus Z(g) \to \mathbb{R}$, kde $Z(g) = \{x \in M(g) :\ g(x) = 0\}$, má hodnoty $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Konečně, jak víme z první přednášky, složenina $f(g)\colon M(f(g)) \to \mathbb{R}$, kde je $M(f(g)) = \{x \in M(g) :\ g(x) \in M(f)\}$ $(\subset M(g))$, má hodnoty $(f(g))(x) = f(g(x))$. Na rozdíl od podílu dvou čísel je podíl dvou funkcí v $\mathcal{R}$ vždy definovaný!

**Úloha 5.4.1** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 5.4.2 (monoidy funkcí)** *Nechť $\mathcal{R}$ je jako v definici 5.2.6, $0_{\mathcal{R}} = k_0\colon \mathbb{R} \to \{0\}$ a $1_{\mathcal{R}} = k_1\colon \mathbb{R} \to \{1\}$. Algebraické struktury*

$$\mathcal{R}_{\text{amo}} = (\mathcal{R},\, 0_{\mathcal{R}},\, +) \;\text{ a }\; \mathcal{R}_{\text{mmo}} = (\mathcal{R},\, 1_{\mathcal{R}},\, \cdot)$$

*jsou komutativní monoidy, takže výše definované operace $+$ a $\cdot$ jsou komutativní a asociativní a mají neutrální prvky $0_{\mathcal{R}}$ a $1_{\mathcal{R}}$. Nejsou to grupy, protože obecně neexistují inverzní prvky (nicméně viz úloha 5.4.8). Operace $\cdot$ je distributivní vzhledem k $+$, takže*

$$f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)\ .$$

Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Rozdíl obou funkcí je funkce $f - g\colon M(f - g) \to \mathbb{R}$ s hodnotami $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, kde $M(f - g) = M(f) \cap M(g)$.

**Úloha 5.4.3** *Dokažte, že pro každé dvě funkce $f, g \in \mathcal{R}$ se $f - g = f + (k_{-1} \cdot g)$.*

• *Elementární funkce.* Definujeme třídu Elementárních funkcí EF. Často je za ni vydávána předchozí třída ZEF.

**Definice 5.4.4 (EF 1)** *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je elementární $\iff$ v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, s $f_n = f$, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $f_i \in$ ZEF nebo pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \le j, k < i$ je $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j \cdot f_k$ nebo $f_i = f_j/f_k$ nebo $f_i = f_j(f_k)$.*

Přibližně řečeno, EF získáme ze ZEF opakovaným sčítáním, násobením, dělením a skládáním. Rozdíl dvou elementárních funkcí je elementární (úloha 5.4.3). Identická funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je elementární, protože $\log(\exp) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Místo $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ často píšeme jen $x$. V opačném pořadí skládání se $\exp(\log) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \mid (0, +\infty)$.

**Úloha 5.4.5** *Ukažte, že absolutní hodnota $|x| \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ je elementární funkce.*

**Úloha 5.4.6** *Čemu se rovná podíl konstantních funkcí $k_1/k_0$ ?*

**Úloha 5.4.7** *Je prázdná funkce $\emptyset$ elementární?*

**Úloha 5.4.8** *Pro každou $f \in \mathrm{EF}$ existuje jediná $g \in \mathrm{EF}$, že $M(g) = M(f)$ a $f + g = k_0 \mid M(f)$.*

Připomeňme si podle tvrzení 4.3.7 typy reálných intervalů:

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \mathbb{R}, (a,b), (-\infty, a), (a, +\infty), (a,b], [a,b), [a,b], (-\infty, a], [a, +\infty)\},$$

pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$.

**Tvrzení 5.4.9 (restrikce na intervaly)** *Pro každou $f \in \mathrm{EF}$ a každý interval $I \in \mathcal{I}$ je $f \mid I \in \mathrm{EF}$.*

**Důkaz.** Stačí ukázat, že pro každý $I \in \mathcal{I}$ je $g = k_0 \mid I \in \mathrm{EF}$. Pak $f + g$ dává požadovanou elementární restrikci funkce $f$. Pro $I = \emptyset$ vezmeme $g = k_1/k_0$. Pro $I = \{a\}$ vezmeme $g = \sqrt{a - x} + \sqrt{x - a}$. Pro $I = (-\infty, b]$ vezmeme $g = \sqrt{b - x} - \sqrt{b - x}$. Pro $I = \mathbb{R}$ vezmeme $g = k_0$. Pro $I = (a, b)$ vezmeme $g = \log(x - a) + \log(b - x) - \log(x - a) - \log(b - x)$. Samozřejmě $x$ je $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $a$ je $k_a$ a $b$ je $k_b$. Pro další intervaly v $\mathcal{I}$ kombinujeme tyto odmocniny a logaritmy podobnými způsoby. □

**Úloha 5.4.10** *Popište elementární funkce $f$ a $g$ s definičními obory $M(f) = \mathbb{Z}$ a $M(g) = \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$.*

V ZEF je řada funkcí, které lze vyjádřit z ostatních a které tak jsou pro generování EF nadbytečné: $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$, $\arctan x = \arcsin\left(x/\sqrt{1 + x^2}\right)$ a $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Pro reálné mocniny máme následující redukci.

**Úloha 5.4.11** *Ukažte, že z funkcí v definicích 5.3.9 a 5.3.10 si stačí ponechat funkce $x^b$ ($\in \mathcal{F}([0, +\infty))$) s $b > 0$ a $b \notin \mathbb{N}$.*

Tyto redundantní funkce ze ZEF vyřadíme a dostaneme následující funkce.

**Definice 5.4.12 (OZEF)** *Opravdu základní elementární funkce jsou právě tyto funkce: $k_c(x)$ s $c \in \mathbb{R}$, $\exp x$, $\log x$, $x^b$ ($\in \mathcal{F}([0, +\infty))$) s $b > 0$ a $b \notin \mathbb{N}$, $\sin x$ a $\arcsin x$.*

Nevyjádřitelnost funkcí $x^b$, $b \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, z ostatních OZEF dokážeme ve větě 6.9.1. Elementární funkce tedy můžeme definovat kompaktněji.

**Definice 5.4.13 (EF 2)** *V definici 5.4.4 lze třídu funkcí* ZEF *nahradit užší třídou* OZEF.

Například funkce $\sqrt{x} = x^{1/2}$, definovaná na $[0, +\infty)$, je OZEF a ZEF. Všimněte si, že $\exp(\frac{1}{2}\log x) \neq \sqrt{x}$, protože $M(\exp(\frac{1}{2}\log x)) = (0, +\infty)$. K EF se vrátíme v oddílech 6.9 a 6.10. V kapitole 16 dokážeme neelementárnost některých antiderivací.

Elementární funkce $\frac{|x|}{x} \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{-1, 1\}$ má hodnotu $-1$ pro $x < 0$ a 1 pro $x > 0$. Podobá se funkci signum (znaménko) $\operatorname{sgn} \colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ dané jako $\operatorname{sgn} x = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$ a $\operatorname{sgn} x = 1$ pro $x > 0$.

**Tvrzení 5.4.14 (**sgn **není elementární)** *Ovšem* $\operatorname{sgn} \notin \mathrm{EF}$.

**Důkaz.** Každá elementární funkce je spojitá, viz definice 8.1.1 a věta 8.6.14. Funkce znaménka ale není spojitá. □

Neměly by se tedy EF definovat šířeji, aby funkce znaménka byla elementární? Touto otázkou se budeme zabývat jinde. Otázkou existence spojitých neelementárních funkcí se zabýváme v oddílu 6.9.

**Úloha 5.4.15** *Uveďte příklady funkcí v* EF*, které v některých bodech svého definičního oboru nemají vlastní derivaci.*

## 5.5 Polynomy a racionální funkce

Podobně jako v oddílu 4.5 i nyní se výrazně odchýlíme od standardního pojetí. Polynomy a racionální funkce zavedeme jako podmnožiny v $\mathcal{R}$ pomocí omezení na generování v definici 5.4.4.

- *Polynomy.* Předkládáme následující pojetí polynomů.

**Definice 5.5.1 (POL)** *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je polynom $\iff$ v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, s $f_n = f$, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $f_i$ identita* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ *nebo konstanta $k_c$, $c \in \mathbb{R}$, nebo pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \leq j, k < i$ je $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j \cdot f_k$. Množinu polynomů označíme jako* POL.

Patrně každá funkce $f_i$, $i \in [n]$, je polynom. Polynomy v našem pojetí tedy vzniknou z konstant a identity opakovaným sčítáním a násobením. Z tvaru polynomu $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, který je ve standardním pojetí definiční, je v našem pojetí tvar kanonický, jehož existenci a jednoznačnost teď dokážeme. Pro $f \in \mathcal{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ mocninu $f^n$ definujeme pro $n = 0$ jako $f - f + k_1$ $(= k_1 \mid M(f))$ a pro $n > 0$ jako $f \cdot f \cdot \ldots \cdot f$ s $n$ činiteli.

**Tvrzení 5.5.2 (kanonický tvar polynomu)** *Každý polynom $p$ má $M(p) = \mathbb{R}$ a buď $p = k_0$ je tzv. nulový polynom, anebo $p$ má jednoznačný kanonický tvar*

$$p = \sum_{j=0}^{n} k_{a_j} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{j} \quad (= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)\,,$$

*kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_j \in \mathbb{R}$ & $a_n \neq 0$.*

**Důkaz.** Z definice polynomu je jasné, že má definiční obor $\mathbb{R}$. Nechť $p$ je polynom. Pak $p = f_n$ má generující posloupnost $f_1, \ldots, f_n$ podle definice 5.5.1. Užijeme indukci podle $n$. Když $n = 1$, pak $p$ je buď nulový polynom, anebo má kanonický tvar $p = k_c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^0$ s $c \neq 0$ či $p = k_0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^0 + k_1 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^1$. Nechť $n > 1$. Pokud $p = f_n$ je konstanta nebo identita, jsme v předchozím případu. Nechť $p = f_j + f_k$ nebo $p = f_j \cdot f_k$ pro $1 \leq j, k < n$. Polynom $f_j$ je buď nulový, anebo má podle indukce kanonický tvar. Totéž platí pro $f_k$. Pokud $f_j$ nebo $f_k$ je nulový, snadno vidíme, že $p$ je též nulový nebo má kanonický tvar. Pokud $f_j$ i $f_k$ má kanonický tvar, s pomocí tvrzení 5.4.2 snadno vidíme, že $p$ je nulový nebo má kanonický tvar.

Jednoznačnost kanonického tvaru plyne z následující úlohy (která vyplývá z existence kanonického tvaru). Nechť polynom $p$ má dva různé kanonické tvary. S pomocí tvrzení 5.4.2 není těžké vidět, že pak rozdíl $p - p$ má také kanonický tvar. Podle úlohy 5.5.3 polynom $p - p$ má jen konečně mnoho nulových bodů. To je ale spor, protože $p - p = k_0$. □

Stupeň $\deg p$ nenulového polynomu $p$ je index $n \in \mathbb{N}_0$ v jeho kanonickém tvaru. Stupeň nulového polynomu se někdy definuje jako $-\infty$.

**Úloha 5.5.3** *Dokažte, že každý polynom $p$ s kanonickým tvarem má konečnou množinu nulových bodů $Z(p) = \{b \in \mathbb{R} : \ p(b) = 0\}$.*

Obor integrity je okruh, v němž součin dvou nenulových prvků je vždy nenulový.

**Úloha 5.5.4** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 5.5.5 (POL je OI)** *Algebraická struktura $\mathbb{R}[x] = (\mathrm{POL}, k_0, k_1, +, \cdot)$ tvoří obor integrity.*

• *Racionální funkce.* Definujeme je podobně jako polynomy, jen navíc zapojíme operaci dělení. Uvidíme ale, že ve srovnání s polynomy se tím dostaneme do znatelně složitější situace.

**Definice 5.5.6 (RAC)** *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je racionální $\iff$ v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, s $f_n = f$, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $f_i$ identita $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ nebo konstanta $k_c$, $c \in \mathbb{R}$, nebo pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \leq j, k < i$ je $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j \cdot f_k$ nebo $f_i = f_j / f_k$. Množinu racionálních funkcí označíme jako RAC.*

Opět každá funkce $f_i$, $i \in [n]$, je racionální. V našem pojetí tedy racionální funkce vygenerujeme z konstant a identity opakovaným sčítáním, násobením a dělením. Například funkce $\frac{1}{x}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je racionální. Každý polynom je racionální funkce, POL $\subset$ RAC. Prázdná funkce $\emptyset$, která není polynom, je racionální, protože třeba $\emptyset = k_1/k_0$.

**Tvrzení 5.5.7 (kanonické tvary v RAC)** *Každá racionální funkce $r \neq \emptyset$ má $M(r) = \mathbb{R} \setminus Z$, kde $Z \subset \mathbb{R}$ je konečná množina, a existují pro ni dva polynomy $p$ a $q$, že $q \neq k_0$, $Z = Z(q)$ a $r = p/q$.*

**Důkaz.** Nechť $r \in$ RAC. Pak $r = f_n$ má generující posloupnost $f_1, \ldots, f_n$ podle definice 5.5.6. Opět indukce podle $n$. Když $n = 1$, pak $r$ je konstanta nebo identita a $r$ má kanonický tvar $\frac{c}{1}$, resp. $\frac{x}{1}$. Nechť $n > 1$. Když $r = f_n$ je konstanta nebo identita, jsme v předešlém případu. Nechť tedy pro nějaké $1 \leq j, k < n$ je $r = f_j + f_k$ nebo $r = f_j \cdot f_k$ nebo $r = f_j/f_k$. Pak $f_j = \emptyset$ nebo $f_j$ má podle indukce kanonický tvar. Totéž platí pro $f_k$. Je-li $f_j$ nebo $f_k$ prázdná, je i $r = \emptyset$. Nechť tedy máme kanonické tvary $f_j = p/q$, $f_k = p'/q'$, $M(f_j) = \mathbb{R} \setminus Z(q)$ a $M(f_k) = \mathbb{R} \setminus Z(q')$. Probereme tři uvedené případy pro $r$. V prvním případu se

$$r = f_j + f_k = \tfrac{pq'+p'q}{qq'}\,.$$

V čitateli i ve jmenovateli jsou polynomy a $qq' \neq k_0$, protože polynomy tvoří obor integrity. Dále $M(r) = M(f_j) \cap M(f_k) = \mathbb{R} \setminus (Z(q) \cup Z(q')) = \mathbb{R} \setminus Z(qq')$. Máme tedy kanonický tvar pro $r$. Ve druhém případu se

$$r = f_j f_k = \tfrac{pp'}{qq'}\,.$$

Jako v prvním případu vidíme, že to je kanonický tvar pro $r$. Konečně ve třetím případu se

$$r = f_j/f_k = \tfrac{p(q')^2}{qq'p'}\,.$$

V čitateli i ve jmenovateli jsou polynomy. Pokud $p' = k_0$, je $r = \emptyset$. Když $p' \neq k_0$, je $qq'p' \neq k_0$ a $M(r) = M(f_j) \cap M(f_k) \setminus Z(f_k)$ se rovná

$$(\mathbb{R} \setminus (Z(q) \cup Z(q'))) \setminus (Z(p') \setminus Z(q')) = \mathbb{R} \setminus (Z(q) \cup Z(q') \cup Z(p')) = \mathbb{R} \setminus Z(qq'p')\,.$$

Opět máme kanonický tvar pro $r$. $\square$

Kanonické tvary racionálních funkcí nejsou jednoznačné. Např. $\frac{0+1x}{0+1x}$ i $\frac{0+0x+1x^2}{0+0x+1x^2}$ je kanonický tvar racionální funkce $x/x$ $(= k_1 \,|\, \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Na množině RAC $\setminus \{\emptyset\}$ definujeme relaci <u>shodnosti $\sim$</u> jako

$$r \sim s \overset{\text{def}}{\iff} r \,|\, M(s) = s \,|\, M(r)\,.$$

**Úloha 5.5.8** *Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence.*

Například $k_1 \sim x/x \sim (x \cdot (x-1))/(x \cdot (x-1))$.

**Úloha 5.5.9** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 5.5.10 (těleso $\mathbb{R}(x)$)** *Algebraická struktura*

$$\mathbb{R}(x) = ((\mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\})/\sim,\ [k_0]_\sim,\ [k_1]_\sim,\ +,\ \cdot)$$

*je těleso, tzv. <u>těleso racionálních funkcí</u>.*

Na rozdíl od algebry jsou prvky našeho tělesa $\mathbb{R}(x)$ opravdu funkce, přesněji jejich ekvivalenční bloky.

**Úloha 5.5.11** *Proč jsme vyřadili prázdnou racionální funkci?*

# Kapitola 6

# Limity, řady, elementární funkce

V šesté kapitole

## 6.1 Limity AM posloupností

**Věta 6.1.1 (aritmetické posloupnosti)** *Každá definovaná aritmetická posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má limitu v* $\mathbb{R}^*$. *Tu lze vypočítat z normálního tvaru posloupnosti ve tvaru racionální funkce*

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)}, \quad p,\, q \in \mathbb{R}[x] \;\&\; q \neq 0\ ,$$

*postupem uvedeným v důkazu pomocí věty 4.1.2 o aritmetice limit a výchozích limit* ($c \in \mathbb{R}$ *je konstanta*)

$$\lim \frac{1}{n} = 0,\ \lim n = +\infty \;\&\; \lim c = c\ .$$

**Důkaz.**

□

**Věta 6.1.2 (AKM posloupnosti)** *Každá definovaná reálná* AKM *posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má limitu v* $\mathbb{R}^*$.

**Důkaz.**

□

## 6.2 Limity rekurentních posloupností

Počítání limit rekurentních posloupností teď vysvětlíme důkladněji. Začneme definicí rekurentní posloupnosti.

**Definice 6.2.1 (rekurentní posloupnosti)** *Nechť* $k \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset (\mathbb{R}^*)^k$ *a funkce*

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_k) \colon D \to \mathbb{R}^*$$

*splňuje, že* $F[D \cap \mathbb{R}^k] \subset \mathbb{R}$. *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *splňuje dvě podmínky.*

1. *Pro každé* $n > k$ *je* $(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1}) \in D$.
2. *Pro každé* $n > k$ *se* $a_n = F(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1})$.

*Potom řekneme, že* $(a_n)$ *je rekurentní posloupnost řádu* $k$, *daná vztahem* $a_n = F(a_{n-k}, \dots, a_{n-1})$ *a počátečními hodnotami* $a_1, \dots, a_k$.

Obecnějšími rekurentními posloupnostmi, kdy $a_n$ může záviset na předchozích členech posloupnosti $a_m$ s neomezenou vzdáleností $n - m \geq 0$ od členu $a_n$, se zde zabývat nebudeme. Pro zahrnutí vlastních i nevlastních limit rekurentních posloupností zde výjimečně povolujeme funkcím $F$ argumenty a hodnoty $\pm\infty$. Vždy je třeba ověřit podmínku 1, aby definice členu posloupnosti pomocí rekurence z $k$ předchozích byla korektní. Je-li podmínka korektnosti definice splněna, počáteční hodnoty $a_1, \dots, a_k$ a rekurentní vztah určují posloupnost $(a_n)$ jednoznačně.

**Definice 6.2.2 (posloupnost iterací)** *Často se objevuje případ* $k = 1$ *definice 6.2.1, kdy* $D \subset \mathbb{R}^*$. *Pak o rekurentní posloupnosti* $(a_n)$ *dané vztahem* $a_n = F(a_{n-1})$ *a počáteční hodnotou* $a_1$ *mluvíme jako o posloupnosti iterací (funkce* $F(x_1)$, *začínající v* $a_1$*).*

Zde se tedy

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, F(a_1), F(F(a_1)), \dots) .$$

Rekurentní posloupnosti se objevují v mnohých nevyřešených problémech. Uvedeme dva známé příklady, první se týká posloupnosti iterací jisté funkce.

**Problém 6.2.3 (problém $3x + 1$)** *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{N}$ *je rekurentní posloupnost, jež je pro* $n > 1$ *daná vztahem*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1+3a_{n-1}}{2} & \dots \quad a_{n-1} \text{ je liché číslo a} \\ \frac{a_{n-1}}{2} & \dots \quad a_{n-1} \text{ je sudé číslo .} \end{cases}$$

*Je pravda, že* $\forall\, a_1\ \exists\, n \left(a_n = 1\right)$*?*

Pro $a_1 = 1$ je tato posloupnost 2-periodická: $(1, 2, 1, 2, 1, \dots)$. Otázka je, zda dříve či později každá z těchto posloupností skončí v uvedeném dvojcyklu. Například pro $a_1 = 7$ dostáváme posloupnost

$$(a_n) = (7,\ 11,\ 17,\ 26,\ 13,\ 20,\ 10,\ 5,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \dots)\ .$$

Vyřešení druhého otevřeného problému by bylo ještě větším matematickým průlomem.

**Problém 6.2.4 (Skolemův problém)** *Uvažujme rekurentní posloupnosti*

$$(a_n) \subset \mathbb{Z}$$

*určené pro každé $n > k$, $k \in \mathbb{N}$, vztahem*

$$a_n = \sum_{j=1}^{k} c_j a_{n-j} = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}\ ,$$

*kde $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$ jsou dané konstanty. Existuje algoritmus (tj. Turingův stroj, počítačový program), který pro každou vstupní $2k$-tici celých čísel*

$$a_1,\ \dots,\ a_k,\ c_1,\ \dots,\ c_k \in \mathbb{Z}$$

*spočítá na výstupu odpověď*

ANO *nebo* NE *podle toho, zda* $\exists\, n \left(a_n = 0\right)$*?*

Rekurentní posloupnosti zde popsané jsou takzvané (celočíselné) *lineárně rekurentní posloupnosti*, krátce LRP. Problém je, zda lze algoritmicky rozhodnout přítomnost nuly v libovolné LRP. Byl nazván podle norského matematika T. Skolema, viz podpříloha C.1, který ho ale patrně takto ani nijak podobně nevyslovil.

Fibonacciova čísla jsou asi nejznámější LRP a i rekurentní posloupnost. Je to rekurentní posloupnost $(F_n) \subset \mathbb{N}$ daná počátečními hodnotami $F_1 = F_2 := 1$ a vztahem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Tedy

$$(F_n) = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \dots)\ .$$

**Věta 6.2.5 (Binetův vzorec)** *Nechť $(F_n) \subset \mathbb{N}$ jsou výše definovaná Fibonacciova čísla. Položíme $F_0 := 0$,*

$$\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots \quad a \quad \psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803\dots$$

*— tato čísla splňují vztah*

$$(x-\phi)(x-\psi) = x^2 - x - 1\ .$$

*Pak platí tzv. Binetův vzorec*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \left(F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}\right)\ .$$

**Důkaz.** Platí, že $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro každé $n > 1$. Stačí ověřit, že i výraz $G_n := \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ splňuje všechny tyto vztahy. Patrně $G_0 = 0$ a $G_1 = 1$. Pro každé $n > 1$ se skutečně $G_n - G_{n-1} - G_{n-2}$ rovná

$$\frac{\phi^{n-2}}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^2 - \phi - 1) - \frac{\psi^{n-2}}{\sqrt{5}} \cdot (\psi^2 - \psi - 1) = 0 - 0 = 0 \,,$$

protože $\phi$ i $\psi$ je kořenem polynomu $x^2 - x - 1$. □

Iracionální číslo

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

je tzv. *zlatý řez*. Explicitní vzorec pro $F_n$ je nazván podle francouzského matematika J. P. M. Bineta (viz podpříloha C.1), i když už byl znám před ním. Pro nás je důležité, že Binetův vzorec implikuje asymptotiku

$$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + o(1) \ (n \to \infty) \,,$$

s chybou $o(1)$ jdoucí k 0 s $n \to \infty$ dokonce exponenciálně rychle. Fibonacciova čísla se tady neobjevila jen jako ilustrace LRP, jejich asymptotiku budeme za chvíli potřebovat.

Vysvětlíme, proč jsou aritmetické operace s nekonečny definovány v definici 3.1.3 tak, jak jsou.

**Definice 6.2.6 (spojitost v nekonečnu)** *Nechť $k$, $D$ a $F$ jsou jako v definici 6.2.1. Pro $\overline{A} := (A_1, \ldots, A_k) \in D$ řekneme, že funkce $F$ je v $k$-tici $\overline{A}$ spojitá, pokud*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta \left( F[U(A_1,\, \delta) \times \cdots \times U(A_k,\, \delta)] \subset U(F(\overline{A}),\, \varepsilon) \right) .$$

**Věta 6.2.7 (spojitost v $\pm\infty$)** *Jediná maximální, to jest s maximálním definičním oborem, spojitá rozšíření tří aritmetický operací na reálných číslech*

$$+,\, \cdot \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \ a \ \ /\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$$

*na operace*

$$+\colon D_+ \to \mathbb{R}^*,\ \cdot\colon D_\cdot \to \mathbb{R}^* \ \ a \ \ /\colon D_/ \to \mathbb{R}^* \,,$$

*kde $\mathbb{R}^2 \subset D_+, D_\cdot \subset (\mathbb{R}^*)^2$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset D_/ \subset \mathbb{R}^* \times (\mathbb{R}^* \setminus \{0\})$, jsou ta popsaná definicí 3.1.3. Speciálně je, jak víme,*

$$\begin{aligned} D_+ &= (\mathbb{R}^*)^2 \setminus \{(\pm\infty,\, \mp\infty)\} \ \textit{(shodná znaménka)} \,, \\ D_\cdot &= (\mathbb{R}^*)^2 \setminus \{(\pm\infty,\, 0),\, (0,\, \pm\infty\} \ \textit{(nezávislá znaménka) a} \\ D_/ &= \mathbb{R}^* \times (\mathbb{R}^* \setminus \{0\}) \setminus \{(\pm\infty,\, \pm\infty)\} \ \textit{(nezávislá znaménka)} \,. \end{aligned}$$

**Důkaz.** Potřebujeme dokázat, že když výraz $A * B$, kde $*$ je $+$ nebo $\cdot$ nebo $/$ a $A$ nebo $B$ je $\pm\infty$, není neurčitý, je jediná možnost, jak ho spojitě dodefinovat, a že když je neurčitý, žádná taková možnost není. Už jsme to ale v podstatě dokázali ve větě 4.1.2 a v tvrzení 4.1.6. Abychom na ně redukovali současnou situaci, stačí jen dokázat Heineho ekvivalentní definici spojitosti $F$ v $\overline{A}$: jsou-li $k$, $D$, $F$ a $\overline{A}$ jako v definici 6.2.6, pak $F$ je v $\overline{A}$ spojitá, právě když

$$\forall\,(a_{n,\,1})\ \ldots\ \forall\,(a_{n,\,k})\,\big(\lim a_{n,\,1} = A_1 \wedge \cdots \wedge \lim a_{n,\,k} = A_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim F(a_{n,\,1},\,\ldots,\,a_{n,\,k}) = F(A_1,\,\ldots,\,A_k)\big)$$

□

Přejdeme k obecné metodě pro určení limity dané rekurentní posloupnosti. Zavedeme spojitost funkce $F$ v diagonálních prvcích definičního oboru $D$, aby odvození rovnice

$$\lim a_n = L \Rightarrow F(L,\,L,\,\ldots,\,L) = L$$

pro limitu $L$ rekurentní posloupnosti bylo rigorózní. Zavedeme také diagonální limitní body množiny $D$, abychom zachytili všechny možné limity.

**Definice 6.2.8 (spojitost rekur. vztahu)** *Nechť $k$, $D$ a $F$ jsou jako v definici 6.2.1 a nechť $A \in \mathbb{R}^*$ splňuje, že $\overline{A} := (A, A, \ldots, A) \in D$. Řekneme, že funkce $F$ je spojitá v diagonálním prvku $\overline{A}$, pokud je $F$ spojitá v $\overline{A}$ podle definice 6.2.6.*

**Definice 6.2.9 (diagonální lim. body množiny $D$)** *$k$ a $D$ buďte jako v definici 6.2.1. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je diagonální limitní bod množiny $D$, pokud*

$$\forall\,\varepsilon\ \exists\,x_1,\,\ldots,\,x_k\,\big((x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_k) \in D \cap P(A,\,\varepsilon)^k\big)\ .$$

Teď už můžeme formulovat a zdůvodnit MRLRP, *Metodu rovnice pro limity rekurentních posloupností.*

**Věta 6.2.10 (MRLRP)** *Nechť $k$, $D$ a $F$ jsou jako v definici 6.2.1, $F$ je spojitá v každém diagonálním prvku množiny $D$, $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je rekurentní posloupnost daná vztahem $a_n = F(a_{n-k}, \ldots, a_{n-1})$ a počátečními hodnotami $a_1, \ldots, a_k$ a $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Pak nastává právě jeden z následujících případů.*

1. *$(L, L, \ldots, L) \notin D$ a $L$ je diagonální limitní bod množiny $D$.*
2. *$(L, L, \ldots, L) \in D$ a platí rovnice*

$$F(L,\,L,\,\ldots,\,L) = L\ .$$

**Důkaz.** Nechť $k$, $D$, $F$, $(a_n)$ a $L$ jsou, jak uvedeno, a nejprve nechť

$$(L,\,L,\,\ldots,\,L) \notin D\ .$$

Pro libovolné $\varepsilon$ existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon)$. Vezmeme libovolné $n \geq n_0$. Pak tedy $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1} \in U(L, \varepsilon)$. Podle podmínky 1 v definici 6.2.1 je ale i

$$(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \in D \ ,$$

takže $(L, L, \ldots, L)$ je diagonální limitní bod množiny $D$.

Nechť

$$(L, L, \ldots, L) \in D \ ,$$

$F(L, L, \ldots, L) = K \in \mathbb{R}^*$ a je dáno $\varepsilon$. Pro toto $\varepsilon$ podle předpokladu existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ dosvědčující spojitost $F$ v diagonálním prvku $L$. Pro toto $\delta$ existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \delta)$. Nechť $n \geq n_0$ je libovolný (dostatečně velký) index. Pak na jednu stranu $a_{n+k} \in U(L, \delta) \subset U(L, \varepsilon)$, protože $a_n \to L$, ale na druhou stranu i

$$a_{n+k} = F(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \in U(K, \varepsilon) \ ,$$

díky spojitosti $F$ v diagonálním prvku $L$. Ukázali jsme tedy, že $\forall \varepsilon \big(U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) \neq \emptyset\big)$. Podle úlohy 3.1.12 se $K = L$ a

$$F(L, L, \ldots, L) = K = L \ .$$

□

V tvrzení **??** je $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ spojitá v každém (diagonálním) prvku množiny $D = \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ a 0 je (diagonální) limitní bod $D$. Limita rekurentní posloupnosti dané vztahem $x_n = F(x_{n-1})$ a počáteční hodnotou $a_1 = 1$, pokud existuje, se tedy rovná 0, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ nebo $+\infty$. První hodnota je limitní bod $D$ mimo $D$ a zbývající tři jsou řešení rovnice $F(L) = L$. Vyloučili jsme všechny kromě $\sqrt{2}$. Takže hledaná limita je $\sqrt{2}$.

• *Další příklady použití věty 6.2.10.* Nalezneme limity rekurentních posloupností dvou typů kdy $n$-tý člen je součtem dvou předchozích a kdy $n$-tý člen je součinem dvou předchozích.

**Věta 6.2.11 (rekurentní součty)** *Nechť* $\phi := (1 + \sqrt{5})/2$, $a_1 := a$, $a_2 := b$ *a*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n > 2 \ .$$

*Pak platí následující.*

1. *Pokud existuje* $\lim a_n =: L$, *potom* $L = -\infty$, $0$ *nebo* $+\infty$.
2. *Přesněji, nastává právě jeden ze tří následujících případů.*
   (a) $L = -\infty \iff b < -a/\phi$.
   (b) $L = 0 \iff b = -a/\phi$.
   (c) $L = +\infty \iff b > -a/\phi$.

**Důkaz.** 1. Zde $k = 2$, $D = D_+$ (věta 6.2.7) a $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Protože $\mathbb{R}^2 \subset D$, podmínka korektnosti definice je triviálně splněna (nemůže být nesplněna). Snadno se vidí, že funkce $F$ je spojitá v každém diagonálním prvku množiny $D$ a že neexistuje diagonální limitní bod množiny $D$ mimo $D$. Podle věty 6.2.10 tedy $\lim a_n = L \Rightarrow L + L = L$ a tato rovnice má v $\mathbb{R}^*$ právě tři uvedená řešení.

2. Dostáváme, že $a_1 = a$, $a_2 = b$,

$$a_3 = a + b,\ a_4 = a + 2b,\ a_5 = 2a + 3b,\ \ldots,\ a_n = F_{n-2}a + F_{n-1}b,\ \ldots\ ,$$

kde $(F_n)$ jsou Fibonacciova čísla. Podle jejich výše uvedené asymptotiky máme pro každé $n \geq 3$ vyjádření

$$a_n = \phi^{n-2}\,(a + \phi b)\,/\sqrt{5} + \delta(n)\ ,$$

kde $\delta(n) \to 0$. Protože $\lim \phi^{n-2} = +\infty$, dostáváme tři uvedené možnosti. □

Vyřešíme analogický problém s násobením místo sčítání. Potřebujeme pro to ale charakterizovat paritu Fibonacciových čísel.

**Úloha 6.2.12** *Dokažte, že existuje nekonečně mnoho sudých i nekonečně mnoho lichých Fibonacciových čísel. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho čísel $n \in \mathbb{N}$, že $F_n$ je liché a $F_{n+1}$ je sudé, a nekonečně mnoho čísel $n \in \mathbb{N}$, že $F_n$ i $F_{n+1}$ je liché.*

**Věta 6.2.13 (rekurentní součiny)** *Nechť $\phi := (1 + \sqrt{5})/2$, $a_1 := a$, $a_2 := b$ a*

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2},\ n > 2\ .$$

*Pak platí následující.*

1. *Pokud existuje $\lim a_n =: L$, potom $L = 0$, $1$ nebo $+\infty$.*
2. *Přesněji, nastává právě jeden ze čtyř následujících případů.*
   - *(a) $L = +\infty \iff a, b > 0 \wedge a > 1/b^{\phi}$.*
   - *(b) $L = 1 \iff a, b > 0 \wedge a = 1/b^{\phi}$.*
   - *(c) $L = 0 \iff ab = 0$ nebo $|a| < 1/|b|^{\phi}$.*
   - *(d) Pro ostatní hodnoty čísel $a$, $b$ limita $\lim a_n$ neexistuje.*

**Důkaz.** 1. Zde $k = 2$, $D = D_{\cdot}$ (věta 6.2.7) a $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Protože $\mathbb{R}^2 \subset D$, podmínka korektnosti definice je triviálně splněna (nemůže být nesplněna). Snadno se vidí, že $F$ je spojitá v každém diagonálním prvku množiny $D$ a že neexistuje diagonální limitní bod množiny $D$ mimo $D$. Podle věty 6.2.10 tedy $\lim a_n = L \Rightarrow L \cdot L = L$ a tato rovnice má v $\mathbb{R}^*$ právě tři uvedená řešení.

2. Dostáváme, že $a_1 = a$, $a_2 = b$,

$$a_3 = ab,\ a_4 = ab^2,\ a_5 = a^2b^3,\ \ldots,\ a_n = a^{F_{n-2}}b^{F_{n-1}},\ \ldots\ ,$$

kde $(F_n)$ jsou Fibonacciova čísla. Pokud $a, b > 0$, podle jejich výše uvedené asymptotiky máme pro každé $n \geq 3$ vyjádření

$$a_n = \mathrm{e}^{F_{n-1}\log b + F_{n-2}\log a} = \exp\left(\phi^{n-2}(\phi \log b + \log a)/\sqrt{5} + \delta(n)\right) ,$$

kde $\delta(n) \to 0$. Formuli zobecníme pro $ab \neq 0$: pro každé $n \geq 3$ se pak

$$a_n = s(a)^{F_{n-2}} s(b)^{F_{n-1}} \exp\left(\phi^{n-2}(\phi \log |b| + \log |a|)/\sqrt{5} + \delta(n)\right) ,$$

kde $s(a) := 1$ pro $a > 0$, $s(a) := -1$ pro $a < 0$ a podobně pro $s(b)$. Pokud $ab = 0$, je ovšem $a_n = 0$ pro každé $n \geq 3$.

Pro $ab \neq 0$ a $n \to \infty$ se tedy exponenciála výše chová takto:

$$\exp(\dots) \to \begin{cases} +\infty & \dots \quad \phi \log |b| + \log |a| > 0 \,, \\ 1 & \dots \quad \phi \log |b| + \log |a| = 0 \ \text{ a} \\ 0 & \dots \quad \phi \log |b| + \log |a| < 0 \,. \end{cases}$$

Pro $a, b > 0$ dostáváme pro $\lim a_n$ tyto tři výsledky. Je-li alespoň jedno z čísel $a$ a $b$ záporné, pak podle předešlé úlohy v prvních dvou případech $\lim a_n$ neexistuje. Ve třetím se ale stále $\lim a_n = 0$. Tedy $\lim a_n = +\infty \iff a, b > 0$ a $\phi \log b + \log a > 0$, což dává případ (a). Podobně $\lim a_n = 1 \iff a, b > 0$ a $\phi \log b + \log a = 0$, což dává případ (b). Konečně $\lim a_n = 0 \iff ab = 0$ nebo $\phi \log |b| + \log |a| < 0$, což dává případ (c). Jinak $\lim a_n$ neexistuje. □

V důkazu jsme použili exponenciální funkci a další pokročilejší nástroje, které v našich přednáškách zavedeme až později, ale bez nich bychom se nikam nedostali. Totéž platí i pro následující důkaz.

**Úloha 6.2.14** *Nechť $a_1 := a$, $a_2 := b$ a $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ pro $n > 2$. Podobně jako ve dvou předešlých větách najděte kandidáty pro $\lim a_n =: L$ a pak přesně určete existenci a hodnotu $L$ v závislosti na počátečních hodnotách $a, b$. Návod: vyřešte rekurenci pro $a_n$ a nebojte se, řešení této úlohy je mnohem lehčí než důkaz předešlé věty.*

**Úloha 6.2.15** *Totéž pro rekurenci $a_1 := a$, $a_2 := b$ a $a_n = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$ pro $n > 2$. Návod: trochu překvapivě obtížnější úloha, řešte jako v důkazu věty 6.2.13.*

• *Obrácení* MRLRP. Naskýtá se otázka, zda ve větě 6.2.10 můžeme naopak každé řešení $L \in \mathbb{R}^*$ rovnice $F(L, L, \dots, L) = L$ realizovat jako limitu nějaké rekurentní posloupnosti dané vhodnými počátečními hodnotami a vztahem $a_n = F(a_{n-k}, \dots, a_{n-1})$.

**Úloha 6.2.16** *Dokažte, že pro $L \in \mathbb{R}$ je tomu (triviálně) tak.*

Pro $L = \pm\infty$ je situace složitější. Třeba pro identickou funkci $F(x_1) = x_1$ jsou řešeními rovnice $F(L) = L$, to jest $L = L$, i obě nekonečna $\pm\infty$, ale každá rekurentní posloupnost daná vztahem $a_n = a_{n-1}$ je konstantní a nemá jako limitu nekonečno. Otázku, kdy lze iteracemi získat nevlastní limitu, zodpovíme pro reálné polynomy.

**Věta 6.2.17 (iterace polynomu jdou do nekonečna)** *Nechť*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k, \ c_m \neq 0 \ ,$$

*je (nenulový) reálný polynom v proměnné $x$ a se stupněm $m = \deg F \in \mathbb{N}_0$. Platí následující.*

1. *Existuje počáteční hodnota $a_1 \in \mathbb{R}$, pro kterou má posloupnost iterací polynomu $F(x)$ limitu $\lim a_n = +\infty \iff F(x)$ má právě jeden z těchto tvarů.*
   (a) *Stupeň $m > 1$ a $c_m > 0$.*
   (b) *Stupeň $m = 1$ a $c_1 > 1$.*
   (c) *Stupeň $m = 1$, $c_1 = 1$ a $c_0 > 0$.*
2. *Existuje počáteční hodnota $a_1 \in \mathbb{R}$, pro kterou má posloupnost iterací polynomu $F(x)$ limitu $\lim a_n = -\infty \iff F(x)$ má právě jeden z těchto tvarů.*
   (a) *Stupeň $m > 1$, $m$ je sudé číslo a $c_m < 0$.*
   (b) *Stupeň $m > 1$, $m$ je liché číslo a $c_m > 0$.*
   (c) *Stupeň $m = 1$ a $c_1 > 1$.*
   (d) *Stupeň $m = 1$, $c_1 = 1$ a $c_0 < 0$.*

**Důkaz.** V tomto důkazu $(a_n)$ označuje posloupnost iterací polynomu $F(x)$.

1. Nechť $F(x)$ má tvar (a). Lehce se vidí, že pak $\lim_{x\to+\infty} F(x)/x = +\infty$. Existuje tedy $x_0 > 0$, že $x \geq x_0 \Rightarrow F(x) \geq 2x$. Pro libovolné $a_1 \geq x_0 > 0$ pak platí nerovnost $a_n \geq 2^{n-1}a_1$, takže $\lim a_n = +\infty$. Má-li $F(x)$ tvar (b), je argument podobný, pouze konstantu 2 nahradíme konstantou $c_1 - \varepsilon > 1$. Má-li $F(x)$ tvar (c), pro každé $n$ platí rovnost $a_n = a_1 + (n-1)c_0$ a opět $\lim a_n = +\infty$.

Ukážeme, že když $F(x)$ není ani jednoho z tvarů (a), (b) a (c), pak pro žádnou počáteční hodnotu $a_1$ neplatí limita $\lim a_n = +\infty$. Nechť $m > 1$, ale $c_m < 0$. Pak $\lim_{x\to+\infty} F(x)/x = -\infty$. Existuje tedy $x_0 > 0$, že $x \geq x_0 \Rightarrow F(x) \leq -x$. Nechť $\lim a_n = +\infty$. Pak existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq x_0 > 0$. Na druhou stranu ale, podle definice konstanty $x_0$, je $a_{n_0+1} = F(a_{n_0}) \leq -a_{n_0} < 0$, což je spor. Nechť $m = 1$, ale $c_1 < 1$. Pak $\lim_{x\to+\infty} F(x)/x = c_1 < 1$. Vezmeme $\varepsilon$, že stále $c_1 + \varepsilon < 1$. Pak existuje $x_0 > 0$, že $x \geq x_0 \Rightarrow F(x) \leq (c_1 + \varepsilon)x$. Nechť $\lim a_n = +\infty$. Pak existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq x_0 > 0$. Na druhou stranu ale podle definice posloupnosti iterací a předešlé nerovnosti máme, že pro každé $l \geq n_0$ je $a_l \leq (c_1 + \varepsilon)^{l-n_0} a_{n_0} \to 0$ pro $l \to \infty$, což je spor. Nechť $m = c_1 = 1$, ale $c_0 \leq 0$. Pak pro každé $n$ je $a_n = a_1 + (n-1)c_0 \leq a_1$, takže $\lim a_n = +\infty$ neplatí. Konečně, když $m = 0$ a $F(x) = c_0$ je konstantní polynom, pak i $(a_n)$ je konstantně $a_n = c_0$ pro $n \geq 2$ a nejde do $+\infty$.

2. Zde je argumentace podobná jako v části 1, jenom je třeba si dát pozor na znaménka a na otočení nerovností při násobení záporným číslem. Podrobnosti pomineme. □

• *Rekurentní posloupnosti a nekonečné výrazy.* Počítání limit rekurentních posloupností je zajímavé samo o sobě. Tyto limity ale také umožňují dát smysl nekonečným aritmetickým a jiným výrazům. Na ukázku podrobně vyřešíme jeden příklad a další uvádíme v úlohách.

Pro účely následujícího tvrzení funkci odmocniny $\sqrt{x}\colon I \to I$, kde $I := [0, +\infty)$, rozšíříme na $\sqrt{x}\colon I^* \to I^*$, kde $I^* := I \cup \{+\infty\}$, hodnotou $\sqrt{+\infty} := +\infty$. Tato funkce je spojitá všude, i v $+\infty$.

**Tvrzení 6.2.18 (nekonečné odmocniny)** *Nechť $a \geq 0$. Pak pro $a > 0$ je*

$$\mathrm{Odm} = \mathrm{Odm}(a) := \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

*a* $\mathrm{Odm}(0) = 0$.

**Důkaz.** Uvážíme posloupnost $(a_n)$ iterací funkce $F(x) := \sqrt{a + x}$ začínající v $a_1 := 0$. Patrně (v rámci definice 6.2.1) je $k = 1$, $D = [-a, +\infty) \cup \{+\infty\}$ a $F(+\infty) := +\infty$, množina $D$ nemá (diagonální) limitní bod mimo $D$ a $F$ je v každém (diagonálním) prvku $D$ spojitá. Podmínka korektnosti definice (rekurentní posloupnosti) je splněná, protože $a_n \geq 0$ pro každé $n$. Hodnotu uvedeného nekonečného systému odmocnin $\mathrm{Odm}(a)$ interpretujeme jako limitu $\lim a_n =: L \in \mathbb{R}^*$, pokud existuje. Podle věty 6.2.10 $L$ splňuje rovnici $\sqrt{a + L} = L$. Ta má v $\mathbb{R}^*$ řešení $L = +\infty$ a, pro $a > 0$,

$$L_a := \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \text{ což je nezáporný kořen polynomu } L^2 - L - a\ .$$

Pro $a = 0$ jsou kromě $+\infty$ dvě další řešení, 0 a 1.

Pro $a = 0$ poslední tvrzení platí triviálně. Předpokládáme tedy, že $a > 0$. Existenci vlastní $\lim a_n$ odvodíme pomocí věty o robustně monotónní posloupnosti a pomocí omezenosti posloupnosti $(a_n)$. Dokážeme implikaci

$$0 \leq b < L_a \Rightarrow b < F(b) < L_a\ .$$

Nechť $b$ splňuje obě nerovnosti v předpokladu implikace. První požadovaná nerovnost, $b < \sqrt{a + b}$, je ekvivalentní nerovnosti $(b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < a$. Ta platí, protože na levé straně dostaneme pro $b := 0$ (resp. $b := L_a$) hodnotu 0 (resp. $a$) (úloha 6.2.19). Druhá požadovaná nerovnost, $\sqrt{a + b} < L_a$, zřejmě také platí, protože, jak víme, pro $b := L_a$ na levé straně dostaneme $L_a$ (úloha 6.2.19). Tedy

$$a_1 = 0 < a_2 = \sqrt{a} < a_3 < \dots < L_a$$

a $\lim a_n = L_a$. □

**Úloha 6.2.19** *Proč přesně platí implikace v důkazu?*

Vidíme, že například

$$\mathrm{Odm}(1) = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \ \text{ a } \ \mathrm{Odm}(2) = 2\ .$$

**Úloha 6.2.20**

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}} = ?$$

**Úloha 6.2.21**

$$1/2 + 1/2 \cdot \Big(1/2 + 1/2 \cdot \Big(1/2 + 1/2 \cdot (1/2 + \dots)\Big)\Big) = ?$$

**Úloha 6.2.22**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = ?$$

*I zde se pro neznámou limitu dá sestavit rovnice, která nezávisí na $n$.*

## 6.3 Uspořádání a limity 2

Lze jen porovnáváním velikostí členů reálné posloupnosti poznat, zda konverguje či zda má vůbec limitu? Touto otázkou se zabýval anglický matematik G. H. Hardy v zapomenutém článku [76]. Jeho hlavní výsledek uvádíme ve zmodernizované podobě níže. Dané posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$ přiřadíme *posloupnostní graf*

$$G = G(a_n) = (\mathbb{N},\, E) := (\mathbb{N},\, M \cup C),\ M \cap C = \emptyset \ \text{ a } \ M \cup C \subset \tbinom{\mathbb{N}}{2}\ ,$$

s vrcholy v přirozených číslech a s modrými ($M$) a červenými ($C$) hranami. Dvojice $\{m < n\} \subset \mathbb{N}$ je *modrá hrana*, pokud $a_m < a_n$, *červená hrana*, pokud $a_m > a_n$, a není vůbec hrana, pokud $a_m = a_n$. Je možné poznat existenci vlastní $\lim a_n$ jen z grafu $G$? Zřejmě ne, posloupnosti $(\frac{1}{n})$ a $(-n)$ mají týž graf $G$ jen s červenými hranami a žádnou nehranou, ale první posloupnost má limitu 0 a druhá $-\infty$. Zajímavější je příklad posloupností

$$(p_n) := ((-1)^{n+1}/n) \ \text{ a } \ (q_n) := ((-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}/n)\ .$$

Obě mají týž graf $G$, v němž dvojice $\{m < n\}$ je červená hrana pro liché $m$ a modrá hrana pro sudé $m$. První posloupnost má limitu 0 a druhá limitu vůbec nemá. Ani samotnou existenci limity, ať vlastní či nevlastní, tak z grafu $G$ nepoznáme. Jak za chvíli dokážeme, je to v podstatě jediný příklad dvojice posloupností se shodným posloupnostním grafem, z nichž jedna limitu má, ale druhá ne.

**Definice 6.3.1 (tříúrovňová posloupnost)** *Posloupnost*

$$(a_n) \subset \mathbb{R}$$

*je tříúrovňová, pokud nemá limitu (ani nevlastní), ale existují dvě reálná čísla* $a \leq 0$ & $b \geq 0$ *a konvergentní posloupnost* $(b_n) \subset \mathbb{R}$ *s* $\lim b_n = L \in \mathbb{R}$*, že*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \big(b_n < L \Rightarrow a_n = b_n + a) \wedge (b_n = L \Rightarrow a_n = b_n) \wedge$$
$$\wedge\, (b_n > L \Rightarrow a_n = b_n + b\big)\ .$$

Posloupnost $(a_n)$ tedy vznikne z posloupnosti $(b_n)$ posunem členů $b_n$ ležících nad $L = \lim b_n$ vzhůru o $b$, ponecháním členů $b_n = L$ na místě a posunem členů $b_n$ ležících pod $L$ dolů o $a$. Například posloupnost $(q_n)$ vznikla touto operací z posloupnosti $(p_n)$ pomocí posunů $a = -1$ a $b = 1$ (prostřední konstantní podposloupnost v $(p_n)$ je prázdná, $p_n \neq L = 0$ pro každé $n$). Lehce se vidí, že pro posloupnosti $(a_n)$ a $(b_n)$ v definici 6.3.1 se vždy $G(a_n) = G(b_n)$.

Nyní tedy vyneseme ze zapomnění zmíněný výsledek G. H. Hardyho a pochopitelně ho dokážeme.

**Věta 6.3.2 (G. H. Hardy, 1910).** *Když* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *jsou takové dvě posloupnosti, že* $\lim a_n$ *neexistuje,* $\lim b_n$ *existuje a*

$$G(a_n) = G(b_n)\ ,$$

*pak* $(a_n)$ *je tříúrovňová posloupnost a limita* $\lim b_n$ *je vlastní.*

**Důkaz.** Budte dány dvě posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ s uvedenými vlastnostmi a definujme

$$G := G(a_n) = G(b_n)\ .$$

Kdyby $\lim b_n$ byla nevlastní, podle úlohy **??** by $(b_n)$ byla kvazimonotónní a díky rovnosti grafů by i $(a_n)$ byla kvazimonotónní, kvazimonotonie je totiž posloupnostním grafem jednoznačně dána. Pak by ale podle tvrzení **??** posloupnost $(a_n)$ měla limitu, ve sporu s předpokladem. Tedy je $\lim b_n$ vlastní, řekněme

$$\beta := \lim b_n \in \mathbb{R}\ .$$

Položíme

$$K := \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = \beta\}\ .$$

Podle velikosti množiny $K$ rozlišíme dva případy.

(i) *$K$ je nekonečná.* Pak pro každé reálné číslo $\beta' \neq \beta$ se $b_n = \beta'$ jen pro konečně mnoho $n$ (jinak by $(b_n)$ neměla limitu) a $K$ je jediná nekonečná maximální nezávislá množina v $G$. Vezmeme číslo

$$\alpha := a_n,\ n \in K\ .$$

Pro každé reálné číslo $\alpha' \neq \alpha$ se $a_n = \alpha'$ jen pro konečně mnoho $n$. Položíme

$$H := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > \alpha\} \ \text{ a } \ D := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < \alpha\}\ .$$

Dostali jsme disjunktní sjednocení $\mathbb{N} = K \cup H \cup D$. Nechť dále

$$h := \inf(\{a_n \mid n \in H\}) \ \text{ a } \ d := \sup(\{a_n \mid n \in D\}) \ .$$

Je-li $H$, resp. $D$, prázdná, není odpovídající číslo $h$, resp. $d$, definované. Alespoň jedna z množin $H$ a $D$ je nekonečná (jinak by $(a_n)$ měla limitu $\alpha$). Máme tak tři možnosti.

*$H$ je nekonečná a $D$ konečná.* Podle posloupnosti $(b_n)$ s limitou $\beta$ vidíme, že v grafu $G$ s každým vrcholem $n \in \mathbb{N} \setminus K$ inciduje jen konečně mnoho červených hran nebo jen konečně mnoho modrých hran. Tedy pro každé $n \in H$ je $a_m > a_n$ jen pro konečně mnoho $m$ a podle poznámky za tvrzením **??** podposloupnost posloupnosti $(a_n)$ s indexy v $H$ konverguje k $h$. Dále je $h \geq \alpha$ a vlastně $h > \alpha$, protože pro $h = \alpha$ by $(a_n)$ měla limitu $\alpha$. Pro každé $n \in H$ je $a_n > h$, protože jistě nenastává $a_n = h$ pro nekonečně mnoho $n$ a ani $a_n = h$ pro konečně mnoho $n \in H$ nelze, s každým takovým vrcholem $n$ by v $G$ incidovalo nekonečně mnoho červených i nekonečně mnoho modrých hran. Definujeme posloupnost $(c_n) \subset \mathbb{R}$ jako $c_n := a_n$ pro $n \in K \cup D$ a $c_n := a_n + \alpha - h$ pro $n \in H$. Patrně $\lim c_n = \alpha$ a $(a_n)$ je tříúrovňová, protože vzniká z $(c_n)$ posunem členů v $(c_n)$ větších než limita $\alpha$ o $h - \alpha$ a posunem ostatních členů o 0. Případ, že *$H$ je konečná a $D$ nekonečná* je symetrický.

Třetí případ je, že *obě množiny $H$ a $D$ jsou nekonečné.* Pak máme $h \geq \alpha \geq d$ a opět podposloupnost posloupnosti $(a_n)$ s indexy v $H$ (resp. v $D$) konverguje k $h$ (resp. k $d$). Rovněž opět $h > \alpha$ implikuje, že pro každé $n \in H$ je $a_n > h$ a podobně $\alpha > d$ implikuje, že pro každé $n \in D$ je $d > a_n$. Definujeme posloupnost $(c_n) \subset \mathbb{R}$ jako $c_n := a_n + \alpha - h$ pro $n \in H$, jako $c_n := \alpha = a_n$ pro $n \in K$ a jako $c_n := a_n + \alpha - d$ pro $n \in D$. Patrně $\lim c_n = \alpha$ a $(a_n)$ je tříúrovňová, protože vzniká z $(c_n)$ posunem členů v $(c_n)$ větších než limita $\alpha$ o $h - \alpha$, posunem členů rovných $\alpha$ o 0 a posunem členů menších než $\alpha$ o $d - \alpha$.

(ii) *$K$ a každá nezávislá množina v $G$ je konečná.* Podle posloupnosti $(b_n)$ s limitou $\beta$ opět vidíme, že v grafu $G$ s každým vrcholem $n \in \mathbb{N} \setminus K$ inciduje jen konečně mnoho červených hran, nebo jen konečně mnoho modrých hran, a že vždy nastává právě jedna z obou možností. Tyto vrcholy nazveme $KC$ vrcholy, resp. $KM$ vrcholy. Definujeme disjunktní množiny

$$H := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je } KM \text{ vrchol}\} \ \text{ a } \ D := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je } KC \text{ vrchol}\}$$

a čísla

$$h := \inf(\{a_n \mid n \in H\}) \in \mathbb{R} \ \text{ a } \ d := \sup(\{a_n \mid n \in D\}) \in \mathbb{R} \ ,$$

kde pro prázdnou množinu $H$, resp. $D$, není číslo $h$, resp. $d$, definované (hned ale uvidíme, že obě čísla jsou definovaná). Tyto definice jsou korektní: kdyby například první množina hodnot $a_n$ byla neprázdná a zdola neomezená, byla by $D = \emptyset$ a $\lim a_n = -\infty$, ve sporu s předpokladem. Podle poznámky za tvrzením **??** tedy opět podposloupnost s indexy v $H$, resp. v $D$, jde k $h$, resp. k $d$, je-li odpovídající množina nekonečná. Jak víme, $K = \mathbb{N} \setminus (H \cup D)$ je konečná, a vidíme, že obě množiny $H$ a $D$ jsou nekonečné (jinak by $(a_n)$ měla limitu).

Speciálně jsou obě čísla $h$ a $d$ definovaná a $d < h$ (pro $d = h$ by $(a_n)$ měla limitu a pro $d > h$ bychom dostali spor s definicemi množin $H$ a $D$). Patrně

$$n \in K \Rightarrow d \leq a_n \leq h \ .$$

Jako dříve vidíme, že $a_n > h$, resp. $a_n < d$, pro každé $n \in H$, resp. pro každé $n \in D$. Pro $K \neq \emptyset$ definujeme číslo

$$\alpha := a_n, \ n \in K \ ,$$

a jinak vezmeme libovolně $\alpha \in [d, h]$. Posloupnost $(c_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme jako $c_n := a_n + \alpha - h$ pro $n \in H$, $c_n := \alpha = a_n$ pro $n \in K$ a $c_n := a_n + \alpha - d$ pro $n \in D$. Patrně $\lim c_n = \alpha$ a $(a_n)$ je tříúrovňová, protože vzniká z $(c_n)$ posunem členů v $(c_n)$ větších než limita $\alpha$ o $h - \alpha$, posunem členů rovných $\alpha$ o 0 a posunem členů menších než $\alpha$ o $d - \alpha$. □

**Věta 6.3.3 (RKM posloupnosti jsou nejobecnější)** *Nechť $\varphi \in \Phi$ je limitová sentence nad $\mathcal{L}$. Pak*

$$P(\varphi) \subset \mathrm{RKMP} \ .$$

**Důkaz.**

□

## 6.4 Teorie řad 2

Uvedeme dva příklady použití CKK.

**Důsledek 6.4.1 (konvergence $\zeta(s)$)** *Pro každé reálné $s > 1$ řada*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

*(absolutně) konverguje. Pro $s \leq 1$ diverguje.*

**Důkaz.** Pro $s \geq 0$ sčítance jistě nerostou a můžeme použít CKK. Pro $s < 0$ je ovšem $\zeta(s)$ triviálně divergentní. CKK ji transformuje v geometrickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(2^n\right)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-s)n} \ .$$

Ta podle věty **??** konverguje právě a jen pro $s > 1$. Tudíž $\zeta(s)$ konverguje pro $s > 1$ a diverguje pro $s \leq 1$. □

CKK je šité na míru následujícím řadám, jejichž sčítance obsahují iterované logaritmy. Nechť $\xi_0 := 0$ a $\xi_k := \exp(n_{k-1})$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nechť $\log^{(0)}(x) := x$ a $\log^{(k)}(x) := \log\left(\log^{(k-1)}(x)\right)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $x > \xi_k$. Pro každé $j, k \in \mathbb{N}_0$ s $j \leq k$ je funkce $\log^{(j)}(x) \colon (\xi_k, +\infty) \to \mathbb{R}$ kladná a rostoucí.

**Důsledek 6.4.2 (další použití CKK)** *Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ a reálné $s > 1$ řada*

$$\sum_{n>\xi_k} \frac{1}{\log^{(0)}(n) \dots \log^{(k-1)}(n) \big(\log^{(k)}(n)\big)^s}$$

*(absolutně) konverguje. Pro $s \leq 1$ diverguje.*

**Důkaz.** Pro $s \geq 0$ sčítance jistě nerostou a můžeme použít CKK. Pro $s < 0$ je ale každý sčítanec zdola odhadnut sčítancem s $s = 0$, takže divergence pro $s = 0$ implikuje divergenci pro každé $s < 0$.

V důkazu postupujeme indukcí podle $k \in \mathbb{N}_0$. Pro $k = 0$ jsme hotovi díky důsledku 6.4.1. Nechť $k > 0$. CKK transformuje danou řadu v řadu

$$\sum_{n>\xi_k} \frac{2^n}{\log^{(0)}(2^n) \dots \log^{(k-1)}(2^n) \big(\log^{(k)}(2^n)\big)^s} =$$
$$= \sum_{n>\xi_k} \frac{1}{\log^{(0)}(n \log 2) \dots \log^{(k-2)}(n \log 2) \big(\log^{(k-1)}(n \log 2)\big)^s} .$$

Pro každé $j = 0, 1, \dots, k-1$ se pro $n > \xi_k$ patrně $\log^{(j)}(n \log 2) = \Theta\big(\log^{(j)}(n)\big)$. Tvrzení o konvergenci a divergenci dané řady pro $k$ tak plyne z indukčního předpokladu pro $k - 1$. □

**Důsledek 6.4.3 (exponenciální identita)** *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ se*

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y} .$$

**Důkaz.** Skutečně, pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ se součin součtů

$$\begin{aligned} \exp x \cdot \exp y &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \overset{\text{věta ??}}{=} \sum_{(m,\,n)\in\mathbb{N}_0^2} \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!} \\ &= \end{aligned}$$

□

## 6.5 Basilejský problém

Je to problém sečíst nekonečnou řadu převrácených čtverců

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots ,$$

který předložil

## 6.6 $\zeta(3)$ je iracionální

## 6.7 Skládací řady dokazují identity

## 6.8 Proč se $1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$

## 6.9 Elementární funkce 2

Tento oddíl se zabývá prohloubením teorie elementárních funkcí, kterou jsme začali budovat v oddílech 5.3 a 5.4. Předvedeme spojité neelementární funkce. ...

Náš první úkol je dokázat, že existují spojité neelementární funkce. Ukážeme, že pro každou EF je množina nediferencovatelnosti řídká v definičním oboru: je-li $f\colon M \to \mathbb{R}$ EF a $(a, b) \subset M$, pak existují $c, d$ s $a < c < d < b$, že $f$ je na intervalu $(c, d)$ diferencovatelná (má tam vlastní první derivaci). Není těžké definovat spojitou funkci $g\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, která má v každém podintervalu $(a, b) \subset (0, 1)$ bod $c \in (a, b)$, kde vlastní derivace $f'(c)$ neexistuje. Taková funkce $g$ pak není elementární.

**Věta 6.9.1 ($\sqrt{x}$ je podstatná ZEF)** *Žádná z funkcí*

$$x^b\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ b \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}\ ,$$

*se nedá vyjádřit pomocí sčítání, násobení, dělení a zobecněného skládání pomocí ostatních skutečně* ZEF*, to jest pomocí konstantních funkcí $f_c(x)$, $\mathrm{e}^x$, $\log x$, $\sin x$ a $\arcsin x$.*

**Důkaz.**

□

**Tvrzení 6.9.2 (elementární funkce 3)** *Nechť*

$$F := \{\exp x,\ \log x,\ \sin x,\ \arcsin x\} \cup \{x^b \mid b \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}\}\ .$$

*Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, je elementární (podle definic 5.4.4 a 5.4.13), právě když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a taková věž polí funkcí*

$$\mathbb{R}(x) = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n\ ,$$

*že $f \in K_n$ a pro každé $j \in [n]$ se*

$$K_j = K_{j-1}(g_j(h_j))$$

*pro nějaké funkce $g_j \in F$ a $h_j \in K_{j-1}$.*

**Důkaz.**

□

**Věta 6.9.3 (existence algebraické funkce)** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$ a*

$$f_i \colon (a, b) \to \mathbb{R},\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \ \text{ a } \ f_n \neq 0\ ,$$

*jsou analytické funkce. Pak existují reálná čísla $c$, $d$ s $a < c < d < b$ a analytická funkce $f \colon (c, d) \to \mathbb{R}$, že pro každé $x \in (c, d)$ se*

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x) f(x)^i = 0\ .$$

## 6.10 Elementární funkce 3

## 6.11 Kosinus a sinus

Začneme dvěma ohlasy trigonometrie, v popkultuře a ve vyšší kultuře.

*Promovaní inženýři,*
*sínus, kosínus, deskriptíva,*
*Promovaní inženýři,*
*kdo je tu inženýr, ať s námi zpívá*

je sloka z „Inženýrské“ [85], písně country bandu *Plavci (Rangers)*. Inu, osmdesátá léta 20. století, doba k popukání. Jedna, ne už tak známá, báseň má následující sloku.

*I Baba Jaga má svého dědka,*
*střed kruhu dáme doprostředka,*
*obvod je potom $2\pi r \ldots$*
*Je krásný letní podvečer.*

I. Blatný, [32, str. 378]

Pusťme se do rigorózního zavedení geometrických trigonometrických funkcí. V definici **??** jsme zavedli kosinus a sinus pomocí absolutně konvergentních řad: pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ \text{ a } \ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ .$$

V následující větě zformalizujeme větu 5.3.17 a dokážeme, že se obě funkce rovnají svým geometrickým verzím. Ty ovšem nejprve definujeme.

**Definice 6.11.1 (geometrický kosinus a sinus)** *Nechť*

$$S := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

*je kružnice v rovině se středem* $(0,0)$ *a poloměrem* $1$ *a s obvodem označeným jako* $2\pi$*, které krátce říkáme jednotková kružnice. Nechť* $P_0 := (1,0) \in S$*. Pro libovolný bod* $P \in S$ *nechť*

$$\ell(P) \in [0,\, 2\pi)$$

*je délka oblouku kružnice* $S$ *jdoucího proti směru hodinových ručiček z* $P_0$ *do* $P$*, což dává bijekci* $\ell\colon S \to [0, 2\pi)$*. Funkce*

$$\cos_{\mathrm{g}},\, \sin_{\mathrm{g}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

*— geometrický kosinus a geometrický sinus — definujeme na intervalu* $[0, 2\pi)$ *jako první a druhou složku inverzu funkce* $\ell$*, takže pro* $t \in [0, 2\pi)$ *položíme*

$$(\cos_{\mathrm{g}} t,\, \sin_{\mathrm{g}} t) := \ell^{-1}(t)\ .$$

*Obě funkce pak* $2\pi$*-periodicky rozšíříme na celé* $\mathbb{R}$*.*

Přesné definice oblouku kružnice $S$ a jeho délky a obvodu $S$ uvedeme za chvíli.

**Věta 6.11.2 (poloha běžkyně 2)** *Pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *se*

$$\cos_{\mathrm{g}} t = \cos t \ \ \text{a} \ \ \sin_{\mathrm{g}} t = \sin t\ .$$

Ve zbytku oddílu dokážeme větu 6.11.2. Důkaz je založen na identitách

$$\cos_{\mathrm{g}}' t = -\sin_{\mathrm{g}} t \ \text{ a } \ \sin_{\mathrm{g}}' t = \cos_{\mathrm{g}} t\ ,$$

platných pro každé $t \in \mathbb{R}$. Z nich už snadno plyne, že trigonometrické funkce $\cos x$ a $\sin x$ a jejich geometrické verze mají stejné (konvergentní) Taylorovy rozvoje a proto se rovnají jako funkce. Odvození identit bude ale chvíli trvat.

Nejdříve definujeme oblouk jednotkové kružnice a jeho délku a pak odvodíme základní vlastnosti délky. *Oblouk* $T$ *(kružnice* $S$*)* je každý průnik

$$T = S \cap H$$

jednotkové kružnice s nějakou uzavřenou polorovinou $H$. Oblouk je tedy prázdná množina nebo bod $\{p\} \subset S$ nebo *řádný* oblouk $T \subset S$, různý od $\emptyset$, $\{p\}$ i od $S$, nebo to je celá kružnice $S$. *Konce* oblouku $T$ jsou průniky hraniční přímky $\ell$ poloroviny $H$ s $S$. Pokud $\ell \cap S = \{p\} = \{p, p\}$, bereme $p$ jako dvojitý bod. Každý oblouk $T$ má tedy buď dva konce, anebo žádný, a v posledním případu se $T = \emptyset$ nebo se $T = S$. Všimněme si ale, že $T = S$ může mít konce $\{p, p\}$ pro každý bod $p \in S$. Existuje tedy oblouk $T = S$ bez konců, pro každý bod $p \in S$ ale také existuje oblouk $T = S =: S_p$ s konci $\{p, p\}$. Vidíme, že pro každou dvojici $\{p, q\} \subset S$ (případně shodných) bodů v $S$ existují přesně dva oblouky $T$ a $T'$ s těmito konci. Například pro dvojici $\{p, p\}$ to jsou oblouky $T = S_p$ a $T' = \{p\}$. Řádný oblouk má dva různé konce. Pro oblouk $T$ používáme též značení $[p, q]$, kde $T$ jde od svého konce $p$ do konce $q$ proti směru hodinových ručiček.

Pro dva body v rovině $p, q \in \mathbb{R}^2$, kde $p = (p_x, p_y)$ a $q = (q_x, q_y)$, označíme jejich euklidovskou vzdálenost jako

$$|pq| := \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}\ .$$

*Úsečku* mezi body $p$ a $q$ označíme jako $pq$, takže má délku $|pq|$. Je-li $T$ oblouk s konci $[p, q]$, jeho *dělením* rozumíme $(k+1)$-tici

$$P = (p = p_0,\, p_1,\, \ldots,\, p_{k-1},\, p_k = q),\ \ k \in \mathbb{N}\ ,$$

složenou z $k+1$ (ne nutně různých) bodů $p_i \in T$, které jdou proti směru hodinových ručiček. Pak

$$|P| := \sum_{i=1}^{k} |p_{i-1}p_i|$$

je *délka dělení* $P$.

**Definice 6.11.3 (délka oblouku)** *Oblouk $T = [p, q]$ má délku*

$$|T| = \sup(D_T) := \sup(\{|P| \mid P \textit{ je dělení oblouku } T\})\ .$$

Z kontextu by vždy mělo být jasné, zda $|\cdot|$ znamená délku úsečky, dělení či oblouku nebo zda to je mohutnost konečné množiny nebo absolutní hodnota. Každá z množin $D_T \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená (proč?), takže délka oblouku $|T|$ je korektně definovaná. Položíme $|\emptyset| := 0$. Zřejmě $|\{p\}| = 0$ pro každý bod $p \in S$. Následující důsledek plyne z invariance euklidovské délky při posunech a otočeních.

**Důsledek 6.11.4 (zobrazení zachovávající délku oblouku)** *Nechť zobrazení*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

*je otočení kolem počátku nebo souměrnost podle osy $x$ nebo souměrnost podle osy $y$. Nechť $T$ a $T'$ jsou takové dva oblouky s konci, že $f[T] = T'$. Pak*

$$|T| = |T'|\ .$$

Z tohoto důsledku plyne, že délka oblouku $|S_p|$ je táž pro všechny body $p \in S$.

**Definice 6.11.5 (číslo $\pi$)** *Reálné číslo $\pi > 0$ definujeme jako polovinu délky (obvodu) jednotkové kružnice, takže*

$$2\pi := |S_p|$$

*pro libovolný bod $p \in S$.*

Je to formalizovaná definice **??**.

**Tvrzení 6.11.6 (aditivita délky oblouku)** *Nechť $[p,q]$ je oblouk a $q' \in [q,p]$. Pak $[p,q] \cup [q,q']$ je oblouk $[p,q']$ a*

$$|[p,q']| = |[p,q]| + |[q,q']| \ .$$

**Důkaz.** Položíme $T := [p,q]$ a $T' := [q,q']$. Body $p$, $q$ a $q'$ jdou proti směru hodinových ručiček. Nechť $\ell$ je přímka jdoucí body $p$ a $q'$. Když $p = q = q'$, je to tečna k $S$ v bodě $p$. Nechť $H$ je polorovina s hraniční přímkou $\ell$, která obsahuje $T$ a $T'$ a pro $p = q = q'$ splňuje, že $H \cap S = \{p\}$. Pak $H \cap S = T \cup T'$ a $T \cup T'$ je oblouk. Zřejmě

$$|T \cup T'| \geq |T| + |T'| \ ,$$

dělení oblouku $T$ a dělení oblouku $T'$ vždy spojíme do dělení oblouku $T \cup T'$.

Dokážeme opačnou nerovnost. Uvážíme libovolné dělení $P = (p_0, p_1, \ldots, p_k)$ oblouku $T \cup T'$. Pak existuje jednoznačné $i \in [k]$, že bod $q$ leží mezi $p_{i-1}$ a $p_i$. Bod $q$ se může shodovat s $p_{i-1}$ nebo s $p_i$ nebo i s oběma body. Pak $Q := (p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}, q)$ je dělení oblouku $T$, $Q' := (q, p_i, \ldots, p_k)$ je dělení oblouku $T'$ a $|P| \leq |Q| + |Q'|$, protože $|p_{i-1}p_i| \leq |p_{i-1}q| + |qp_i|$. Tedy

$$|T \cup T'| \leq |T| + |T'| \ .$$

□

*Sklon* nesvislé úsečky $u := pp'$ definujeme jako

$$s(u) := \frac{p'_y - p_y}{p'_x - p_x} \ .$$

**Lemma 6.11.7** *Jsou dána reálná čísla $\delta \in (0,1)$ a $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, s $k \in \mathbb{N}$, úsečky $u_i$, $i \in [k]$, že $u_i$ má konce na sousedních svislých přímkách $(x = x_{i-1})$ a $(x = x_i)$, a úsečka $u$ s konci na svislých přímkách $(x = x_0)$ a $(x = x_k)$. Když pro každé $i \in [k]$ je $|s(u) - s(u_i)| < \delta$, pak*

$$\left| |u| - \sum_{i=1}^{k} |u_i| \right| < 3\delta \cdot |u| \ .$$

**Důkaz.** Rozlišením případů $|s(u)| \leq \delta$ a $|s(u)| \geq \delta$ dostaneme, že

$$\left| \sqrt{1 + s(u)^2} - \sqrt{1 + s(u_i)^2} \right| \leq \frac{\delta \cdot (2|s(u)| + \delta)}{\sqrt{1 + s(u)^2}} \leq 3\delta \ .$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} \left| |u| - \sum_{i=1}^{k} |u_i| \right| &= \left| (x_k - x_0)\sqrt{1 + s(u)^2} - \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + s(u_i)^2} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \left( \sqrt{1 + s(u)^2} - \sqrt{1 + s(u_i)^2} \right) \right| \\ &\leq 3\delta \cdot (x_k - x_0) \leq 3\delta \cdot |u| \ . \end{aligned}$$

□

$T$ buď řádný oblouk s konci

$$\{p = (x,\, y),\, p' = (x',\, y')\},\ \text{kde } 0 < x' < x < 1 \text{ a } y,\, y' > 0\ .$$

*Svislá nadtečna* oblouku $T$ je úsečka $pp''$, kde $p''$ je průsečík tečny k $S$ v bodu $p$ se svislou přímkou jdoucí bodem $p'$, její délku označíme jako $d_v(T) := |pp''|$. *Vodorovná nadtečna* oblouku $T$ je definována podobně za pomoci vodorovné přímky jsoucí bodem $p'$ a má délku $d_h(T)$. Položíme $d(T) := |pp'|$.

**Tvrzení 6.11.8 (odhady délek oblouků).** *Je-li $T$ oblouk výše, pak pro pevný konec $p$ a $x' \to x$ je*

$$|T| = (1 + o(1)) \cdot d(T) = (1 + o(1)) \cdot d_v(T) = (1 + o(1)) \cdot d_h(T)\ .$$

*Táž asymptotika platí pro pevný konec $p'$ a $x \to x'$.*

**Důkaz.** Nechť $T$ je, jak uvedeno. Uvážíme úsečku $u := pp'$, svislou nadtečnu $u' := pp''$ oblouku $T$ a dělení $P = (p = p_0, p_1, \ldots, p_k = p')$ oblouku $T$.

Buď dáno $\varepsilon$. Sklon tečny k $S$ v nějakém bodu $(x_0, y_0) \in S$ s $0 < x_0 < 1$ a $y_0 > 0$ se mění spojitě s bodem, tj. $x \mapsto \sqrt{1 - x^2} \colon (0,1) \to (0,1)$ je $C^1$ funkce. Podle věty 11.1.4, když $s$ je sklon úsečky s konci v $T$, bod $p$ je pevný a $x' \to x$, potom $s \to s(u')$. Tedy $s - s(u) \to 0$ a $s - s(u') \to 0$ a existuje $\delta \in (0,1)$, že $x' \in P^-(x, \delta) \Rightarrow s \in U(s(u), \varepsilon)$ a $s \in U(s(u'), \varepsilon)$. Let $x' \in P^-(x, \delta)$. Vezmeme takové dělení $P$, že $|\,|P| - |T|\,| < \varepsilon \cdot d(T)$. Použijeme lemma 6.11.7 s $\delta := \varepsilon$, reálná čísla

$$x' = p_k(x) < p_{k-1}(x) < \cdots < p_0(x) = x\ ,$$

úsečky $p_k\, p_{k-1}, \ldots, p_1\, p_0$ a úsečku $u = pp'$ a dostaneme, že

$$|\,|T| - d(T)\,| \le |\,|T| - |P|\,| + |\,|P| - |pp'|\,| \le (\varepsilon + 3\varepsilon) \cdot d(T) = 4\varepsilon \cdot d(T)\ .$$

Podobná úvaha s takovým dělením $P$, že $|\,|P| - |T|\,| < \varepsilon \cdot d_v(T)$, ukazuje, že také $|\,|T| - d_v(T)\,| \le 4\varepsilon \cdot d_v(T)$. Tedy

$$|T| = (1 + o(1)) \cdot d(T) \ \text{ a } \ |T| = (1 + o(1)) \cdot d_v(T)\ ,$$

pro pevné $p$ a $x' \to x$. Když uvážíme vodorovnou nadtečnu oblouku $T$ a $y$-ové souřadnice bodů v $P$, týž argument ukazuje, že

$$|T| = (1 + o(1)) \cdot d_h(T)\ .$$

Pro pevné $p'$ a $x \to x'$ argumentujeme podobně. Jediná změna je, že teď podle věty 11.1.4 je $s \to s'$ a $s(u') \to s'$, kde $s'$ je sklon tečny k $S$ v bodu $p'$. □

## 6.12 Wilkieho identity

**Tvrzení 6.12.1** ($\neg\exists$PP **k** $a^x a^y = a^{x+y}$) *Pro reálná čísla $a$, $x$ & $y$ neexistuje protipříklad k identitě $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.*

**Důkaz.** Pro $a > 0$ identita platí díky tvrzení 5.3.13. Nechť $a = 0$. Pak pravá strana má hodnotu 0 nebo 1 nebo není definovaná (a pak jsme hotovi). V prvním případu je $x + y > 0$, takže $x > 0$ nebo $y > 0$, tedy $a^x = 0$ nebo $a^y = 0$ a nedostáváme protipříklad. Ve druhém případu, kdy $a^{x+y} = 1$, je $x + y = 0$. Když $x = y = 0$, dostáváme platnou rovnost $1 \cdot 1 = 1$. Jinak $x < 0$ nebo $y < 0$, levá strana není definovaná a jsme hotovi.

Nechť $a < 0$. Pak všechny tři mocniny v identitě jsou definované, jen když $x, y \in \mathbb{Z}$. Nechť tedy $x, y \in \mathbb{Z}$. Mocniny se záporným exponentem převedeme na druhou stranu a můžeme předpokládat, že $x, y \in \mathbb{N}_0$. Pak identita platí díky asociativitě násobení. □

**Tvrzení 6.12.2** ($\neg\exists$PP **k** $a^x b^x = (ab)^x$) *Pro reálná čísla $a$, $b$ & $x$ neexistuje protipříklad k identitě $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.*

**Důkaz.** Pro $a, b > 0$ identita platí díky tvrzení 5.3.13. Nechť $a = 0$. Pokud $x > 0$, máme $a^x = (ab)^x = 0$ a nedostáváme protipříklad. Pokud $x = 0$, dostáváme platnou rovnost $1 \cdot 1 = 1$. Podobně pro $b = 0$. Nechť $a < 0$ nebo $b < 0$. Pak můžeme předpokládat, že $x \in \mathbb{Z}$. Mocniny se záporným exponentem převedeme na druhou stranu a můžeme předpokládat, že $x \in \mathbb{N}_0$. Pak identita platí díky asociativitě a komutativitě násobení. □

# Kapitola 7

# Přednáška 5. Limity funkcí

Kapitolu inspirovanou pátou přednáškou

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred5.pdf`

přednesenou 21. 3. 2024 začneme oddílem 7.1 o jednostranných limitách funkcí. Tvrzení 7.1.7 a 7.1.13 popisují vztahy obyčejných a jednostranných limit. Potom v oddílu 7.2 zavedeme spojitost funkce v bodě. V tvrzení 7.2.4 ji charakterizujeme pomocí limit a v úloze 7.2.5 Heineho definicí.

Oddíl 7.3 obsahuje větu 7.3.1 o limitě monotónní funkce, větu 7.3.3 o aritmetice limit funkcí, větu 7.3.7 o limitě funkce a uspořádání a větu 7.3.11 o dvou funkčních strážnících. V oddílu 7.4 uvádíme větu 7.4.1 o limitě složené funkce. Na rozdíl od formulací této věty v literatuře, které jsou implikacemi, naše formulace je ekvivalence. V závěrečném oddílu 7.5 vysvětlíme význam asymptotických symbolů $O$, $\ll$, $\gg$, $\Omega$, $\Theta$, $\asymp$, $o$, $\omega$ a $\sim$.

## 7.1 Jednostranné limity

Všimněme si, že doplněk bodu $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ se skládá ze dvou oddělených intervalů — na rozdíl od roviny $\mathbb{R}^2$ se v $\mathbb{R}$ bod $a$ nedá „obejít“. Proto se zavádějí limity funkcí zleva a zprava. Začneme definicí jednostranných okolí.

• *Jednostranná okolí a jednostranné limitní body.* Levé, resp. pravé, $\varepsilon$-okolí bodu $b \in \mathbb{R}$ je

$$U^-(b,\, \varepsilon) = (b - \varepsilon,\, b], \text{ resp. } U^+(b,\, \varepsilon) = [b,\, b + \varepsilon)\,.$$

Levé, resp. pravé, prstencové $\varepsilon$-okolí bodu $b$ je

$$P^-(b,\, \varepsilon) = (b - \varepsilon,\, b), \text{ resp. } P^+(b,\, \varepsilon) = (b,\, b + \varepsilon)\,.$$

Bod $b \in \mathbb{R}$ je levým, resp. pravým, limitním bodem množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud

$$\forall\, \varepsilon \left(P^-(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\right), \text{ resp. } \forall\, \varepsilon \left(P^+(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\right).$$

Množiny těchto bodů označíme jako $L^-(M)$, resp. $L^+(M)$ ($\subset \mathbb{R}$). Bod $b \in \mathbb{R}$ je oboustranný limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, krátce OLB, pokud

$$\forall\, \varepsilon \left( P^-(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \,\wedge\, P^+(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \right).$$

Množinu těchto bodů označíme jako $L^{\pm}(M)$ ($\subset \mathbb{R}$). OLB jsou klíčové v kritériu lokálního extrému založeném na anulování derivace. Pro nekonečna jednostranná okolí a jednostranné limitní body nedefinujeme.

**Úloha 7.1.1** *$b \in L^-(M)$, resp. $b \in L^+(M) \iff \exists\, (a_n) \subset (-\infty, b) \cap M$, resp. $(a_n) \subset (b, +\infty) \cap M$, že $\lim a_n = b$.*

**Úloha 7.1.2** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$. Dokažte následující.*
1. *$b \in L^-(M) \Rightarrow b \in L(M)$,*
2. *$b \in L^+(M) \Rightarrow b \in L(M)$,*
3. *$b \in L(M) \Rightarrow b \in L^-(M)$ nebo $b \in L^+(M)$ a*
4. *je možné, že $b \in L(M)$, ale $b \notin L^-(M)$ nebo $b \notin L^+(M)$.*

Podle úlohy 5.2.3 žádná konečná reálná množina nemá limitní bod. Tím méně má nějaký jednostranný limitní bod. Podle úlohy 5.2.4 každá nekonečná reálná množina má limitní bod. Pro jednostranné limitní body to neplatí.

**Úloha 7.1.3** *Uveďte příklad nekonečné podmnožiny $\mathbb{R}$, která nemá ani levý ani pravý limitní bod.*

**Úloha 7.1.4** *Dokažte, že každá nekonečná a omezená reálná množina má levý limitní bod nebo pravý limitní bod.*

• *Jednostranné limity funkcí.* Limitu funkce zjemníme jednostrannými limitami.

**Definice 7.1.5 (jednostranné limity)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in L^-(M)$ a $L$ je v $\mathbb{R}^*$. Pokud pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že $f[P^-(b, \delta)] \subset U(L, \varepsilon)$, potom píšeme $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$ a řekneme, že funkce $f$ má v bodě $b$ limitu zleva rovnou $L$. Náhrada znaménka $^-$ znaménkem $^+$ dává limitu v $b$ zprava $\lim_{x \to b^+} f(x) = L$.*

Jako $\lim_{x \to A} f(x)$ pro $A \notin L(M(f))$ ani $\lim_{x \to b^-} f(x)$ pro $b \notin L^-(M(f))$ není definovaná. Totéž platí pro limitu zprava. Když $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existuje, jako dřív to implicitně znamená, že $b \in L^-(M(f))$. Totéž platí pro limitu zprava.

**Úloha 7.1.6** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 7.1.7 (o jednostranných limitách)** *Platí následující.*
1. *$\lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L$ nebo $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$,*
2. *$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$ &*
3. *$\lim_{x \to a^-} f(x) = K$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ & $K \neq L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ neexistuje.*

Tedy $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje, protože $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ a $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$.

**Úloha 7.1.8** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 7.1.9 (jednoznačnost $\lim_{x\to b^\pm} f(x)$)** *Když platí, že $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = K$ i že $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = L$, pak $K = L$ (shodná znaménka).*

**Úloha 7.1.10** *Dokažte následující tvrzení.*

Pro $b \in \mathbb{R}$ jako $I^-(b)$, resp. $I^+(b)$, označíme interval $(-\infty, b)$, resp. $(b, +\infty)$.

**Tvrzení 7.1.11 (Heineho definice $\lim_{x\to b^\pm} f(x)$)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $b$ je v $L^\pm(M)$. Pak $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = L \iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \cap I^\pm(b)$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = L$ (shodná znaménka).*

Poznamenáme, že někdy se obyčejné limity funkcí píšou zbytečně složitě jako jednostranné. Například se píše $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$. Podle našich definic limit celou situaci vystihuje jednodušší $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$. Zde

$$\lim_{x\to 0} \log x = \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty\,,$$

ale limita $\lim_{x\to 0^-} \log x$ není definovaná, protože $0 \notin L^-(M(\log x))$. Závěrem ještě jeden vztah mezi obyčejnými a jednostrannými limitami, který použijeme v důkazu důsledku 7.4.5.

**Úloha 7.1.12** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 7.1.13 (použití zúžení)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $b \in L^\pm(M)$. Pak platí ekvivalence, že $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = L \iff \lim_{x\to b}(f \mid I^\pm(b))(x) = L$ (shodná znaménka).*

## 7.2 Spojitost funkce v bodu

• *Spojitost funkce v bodu.* Následující definice je důležitá.

**Definice 7.2.1 (spojitost funkce v bodu)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$. Funkce $f$ je spojitá v bodu $b \in M$, když pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že $f[U(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Jinak řekneme, že $f$ je v $b$ nespojitá.*

**Úloha 7.2.2** *Kdy je tedy funkce $f$ v bodu $b \in M(f)$ nespojitá?*

Například $\operatorname{sgn} x$ je nespojitá v $x = 0$, ale všude jinde je spojitá. Když $b \notin M(f)$, funkce $f$ není v $b$ ani spojitá ani nespojitá. Při srovnání s limitou $\lim_{x\to b} f(x) = L$ vidíme, že $L$ se nahradilo hodnotou $f(b)$ a prstencové okolí $P(b,\delta)$ obyčejným okolím $U(b,\delta)$.

**Úloha 7.2.3** *Funkce $f$ je spojitá v $b \in M(f)$, právě když pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že $x \in M(f) \wedge |x-b| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| \le \varepsilon$.*

Spojitost $f$ v $b$ <u>není</u> ekvivalentní tomu, že $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$. To platí jen v limitních bodech množiny $M$.

**Tvrzení 7.2.4 (o spojitosti v bodě)** *Pro funkci $f \in \mathcal{F}(M)$ & bod $b \in M \cap L(M)$ jsou 1, 2 a 3 vzájemně ekvivalentní. 1. Funkce $f$ je v $b$ spojitá. 2. Limita $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$. 3. Pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = f(b)$.*

**Důkaz.** Implikace $1 \Rightarrow 2$. Nechť $f$ je spojitá v $b$ podle definice 7.2.1 a je dáno $\varepsilon$. Tedy existuje $\delta$, že $f[U(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Pak $b \in L(M(f))$ a i $f[P(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$ a $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.

Implikace $2 \Rightarrow 3$. Nechť $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$, $(a_n) \subset M$ má limitu $\lim a_n = b$ a je dáno $\varepsilon$. Tedy existuje $\delta$, že

$$f[P(b,\,\delta)] \subset U(f(b),\,\varepsilon)\ . \qquad (*)$$

Vezmeme $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(b,\delta)$. Pak též $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(f(b),\varepsilon)$: pro $a_n \neq b$ použijeme inkluzi $(*)$ a pro $a_n = b$ je $f(a_n) = f(b) \in U(f(b),\varepsilon)$. Tedy $\lim f(a_n) = f(b)$.

Implikace $3 \Rightarrow 1$, to jest $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$. Nechť $f$ není spojitá v $b$. Pak existuje takové $\varepsilon$, že pro $\forall\,\delta\,\exists\,a = a(\delta) \in U(b,\delta) \cap M$, že $f(a) \notin U(f(b),\varepsilon)$. Pro každé $n$ *vybereme* nějaké takové $a_n = a(1/n)$ a dostaneme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = b$, ale $f(a_n) \notin U(f(b),\varepsilon)$ pro každé $n$. Tedy $(f(a_n))$ nemá limitu $f(b)$ a část 3 neplatí. □

Poslední implikaci jsme opět dokázali s pomocí *axiomu výběru*. Část 3 popisuje <u>Heineho definici spojitosti funkce v bodu</u>. Následující úloha ji upřesňuje.

**Úloha 7.2.5** *V tvrzení 7.2.4 v ekvivalenci* (1) $\iff$ (3) *je možné předpoklad $b \in L(M)$ vynechat. Takže funkce $f$ je spojitá v bodu $b \in M(f) \iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = f(b)$.*

Pravá strana této ekvivalence se někdy bere jako definice spojitosti funkce v bodu.

• *Izolované body.* Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina $M \setminus L(M)$ je tvořena takzvanými <u>izolovanými body</u> množiny $M$.

**Úloha 7.2.6** *Bod $b \in M$ je izolovaný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, právě když pro nějaké $\varepsilon$ je $U(b,\varepsilon) \cap M = \{b\}$.*

**Úloha 7.2.7** *Nechť $b \in M \subset \mathbb{R}$. Pak $b$ je buď limitní bod množiny $M$, anebo izolovaný bod množiny $M$.*

**Tvrzení 7.2.8 (spojitost v izolovaném bodu)** *Každá funkce $f \in \mathcal{R}$ je spojitá v každém izolovaném bodu množiny $M(f)$.*

**Důkaz.** Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $b \in M$ je izolovaný bod. Podle úlohy 7.2.6 existuje $\delta$, že $U(b,\delta) \cap M = \{b\}$. Pro toto $\delta$ inkluze $f[U(b,\delta)] = f[\{b\}] = \{f(b)\} \subset U(f(b),\varepsilon)$ platí pro každé $\varepsilon$. Takže $f$ je spojitá v $b$ podle definice 7.2.1. $\square$

Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, tedy funkce $a \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, je tak spojitá v každém bodu $n$ svého definičního oboru $\mathbb{N}$.

**Úloha 7.2.9** *Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ není spojitá v $b \in M \iff \exists$ posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = b$ a $\lim f(a_n) = A \neq f(b)$.*

• *Jednostranná spojitost.* Funkce $f$ je <u>zleva spojitá</u> v bodě $b \in M(f)$, když pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že $f[U^-(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$ Náhradou znaménka $^-$ znaménkem $^+$ dostaneme <u>spojitost zprava</u>.

**Úloha 7.2.10** *Funkce je v daném bodu spojitá $\iff$ je v něm zleva i zprava spojitá.*

• *<u>Riemannova funkce</u>.* Je to funkce $r \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ s hodnotami $r(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a $r(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$ pro zlomek $\frac{m}{n}$ v základním tvaru.

**Tvrzení 7.2.11 (o Riemannově funkci)** *Tato funkce je spojitá právě v iracionálních číslech.*

**Důkaz.** Nechť $x = \frac{m}{n}$ je zlomek v základním tvaru a $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. Pro $\forall\,\delta\,\exists$ iracionální $\alpha \in U(x,\delta)$. Ale $r(\alpha) = 0 \notin U(r(x),\varepsilon) = U(\frac{1}{n},\varepsilon)$, takže funkce $r$ není spojitá v bodě $x$. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a je dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Definujeme

$$M = \{|x - \tfrac{m}{n}| : \ \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap U(x,\,1) \wedge \tfrac{1}{n} \geq \varepsilon\} \ \text{ a } \ \delta = \min(M)\ .$$

Toto $\delta$ existuje a $\delta > 0$, protože podle úlohy 7.2.12 je $M$ neprázdná konečná množina kladných čísel. Pro toto $\delta$ je $y \in U(x,\delta) \Rightarrow r(y) \in U(r(x),\varepsilon) = U(0,\varepsilon)$ — pro každé $y \in U(x,\delta)$ je $r(y) = 0$ nebo $r(y) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Proto je funkce $r$ spojitá v bodu $x$. $\square$

**Úloha 7.2.12** *Proč je $M$ neprázdná konečná množina kladných čísel?*

## 7.3 Limity a uspořádání, aritmetika limit

Některé výsledky o existenci limit posloupností, o jejich aritmetice a o jejich vztahu k uspořádání teď rozšíříme na limity funkcí.

• *Limity monotónních funkcí.* Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $X$ je libovolná množina. Funkce $f$ <u>neklesá</u>, resp. <u>neroste</u>, na $X$, pokud pro každé $x \leq y$ v $X \cap M$ je $f(x) \leq f(y)$, resp. $f(x) \geq f(y)$. Když $f$ na $X$ neklesá či neroste, je na $X$ <u>monotónní</u>. Ano, $X$ nemusí být podmnožinou $M$.

**Věta 7.3.1 (limita monotónní funkce)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$. Platí následující.*
1. *Když $b \in L^-(M)$ a existuje $\theta$, že $f$ na $P^-(b,\theta)$ neklesá, pak*

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup(f[P^-(b,\,\theta)])\,.$$

2. *Když $+\infty \in L(M)$ a existuje $\theta$, že $f$ na $U(+\infty,\theta)$ neklesá, pak*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \sup(f[U(+\infty,\,\theta)])\,.$$

*Suprema zde bereme v* LU $(\mathbb{R}^*, <)$.

**Důkaz.** 1. Nechť $f$, $M$, $b$ a $\theta$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. Označíme si $A = \sup(f[P^-(b,\theta)])$ a vezmeme libovolné $a \in U(A,\varepsilon)$ s $a < A$. Podle definice suprema existuje $c \in P^-(b,\theta) \cap M$, že $a < f(c) \le A$. Položíme $\delta = b - c$. Pro každé $d \in M$ s $c < d < b$ je $a < f(c) \le f(d) \le A$, tedy (podle úlohy 3.1.12) $f(d) \in U(A,\varepsilon)$. Takže $f[P^-(b,\delta)] \subset U(A,\varepsilon)$ a $\lim_{x\to b^-} f(x) = A$.

2. Nechť $f$, $M$ a $\theta$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. $A := \sup(f[U(+\infty,\theta)])$ a vezmeme libovolné $a \in U(A,\varepsilon)$ s $a < A$. Podle definice suprema existuje $c \in U(+\infty,\theta) \cap M$, že $a < f(c) \le A$. Položíme $\delta = 1/c$. Pro každé $d \in M$ s $c < d$ je $a < f(c) \le f(d) \le A$, tedy (podle úlohy 3.1.12) $f(d) \in U(A,\varepsilon)$. Takže $f[U(+\infty,\delta)] \subset U(A,\varepsilon)$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. □

Pro obyčejné limity věta neplatí: funkce $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ na $\mathbb{R}$ neklesá, ale $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje. Nalezení obyčejné limity monotónní funkce převedeme pomocí tvrzení 7.1.7 na nalezení jejích jednostranných limit. Ty nalezneme pomocí předešlé věty a následující úlohy.

**Úloha 7.3.2** *Popište další varianty věty: pro lokálně nerostoucí funkci a/nebo limitu v $b$ zprava, popř. v $-\infty$.*

• *Aritmetika limit funkcí.* Aritmetiku limit (AL) rozšíříme z posloupností na funkce. V důkazu využijeme Heineho definici limity funkce.

**Věta 7.3.3 (aritmetika limit funkcí)** *Buď $f, g \in \mathcal{R}$, $A \in L(M(f) \cap M(g))$, $\lim_{x\to A} f(x) = K$ a $\lim_{x\to A} g(x) = L$. Pak se $\lim_{x\to A}(f+g)(x) = K + L$, $\lim_{x\to A}(fg)(x) = KL$ a $\lim_{x\to A}(f/g)(x) = K/L$, pokud výraz napravo není neurčitý.*

**Důkaz.** Probereme jen podíl, důkazy pro součet a součin jsou podobné a jednodušší. Nechť výraz $K/L$ není neurčitý. Pak $L \neq 0$ a $A \in M(f/g)$ (úloha 7.3.4). Nechť $(a_n) \subset M(f/g) \setminus \{A\}$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = A$. Podle Heineho definice limity funkce (implikace $\Rightarrow$) se $\lim f(a_n) = K$ a $\lim g(a_n) = L$. Díky větě 4.1.2 dostáváme, že $\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{K}{L}$. Protože pro každou posloupnost $(a_n)$ jako výše má posloupnost $\left(\frac{f(a_n)}{g(a_n)}\right) = ((f/g)(a_n))$ tuto limitu, implikace $\Leftarrow$ Heineho definice limity funkce dává, že i limita $\lim_{x\to A}(f/g)(x) = K/L$. □

**Úloha 7.3.4** *Proč pro $L \neq 0$ je $A$ limitním bodem množiny $M(f/g)$?*

Variantu předchozí věty s jednostrannými limitami snadno dostane pomocí tvrzení 7.1.13.

**Úloha 7.3.5** *Z věty odvoďte následující důsledek.*

**Důsledek 7.3.6 (limita 1/g 1)** *Když $g \in \mathcal{R}$ a $\lim_{x\to A} g(x) = B \neq 0$, pak $\lim_{x\to A} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.*

• *Limity funkcí a* LU $(\mathbb{R}^*, <)$. Připomínáme, že pro množiny $M, N \subset \mathbb{R}$ porovnání $M < N$ znamená, že $a \in M, b \in N \Rightarrow a < b$. Také víme, že pro každou funkci $f$ a libovolnou množinu $X$ se

$$f[X] = f[X \cap M(f)] = \{f(x) : \ x \in X \cap M(f)\}\,.$$

**Věta 7.3.7 (limita funkce a uspořádání 1)** *Mějme limity $\lim_{x\to A} f(x) = K$ a $\lim_{x\to B} g(x) = L$ (je možné, že $A \neq B$). Pak platí následující.*
*1. Když $K < L$, pak existuje $\delta$, že $f[P(A,\delta)] < g[P(B,\delta)]$.*
*2. Když pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(A,\delta) \cap M(f)$ a $y \in P(B,\delta) \cap M(g)$, že $f(x) \geq g(y)$, pak $K \geq L$.*

**Důkaz.** 1. Protože $K < L$, podle úlohy 3.1.13 existuje $\varepsilon$, že $U(K,\varepsilon) < U(L,\varepsilon)$. Pak podle předpokladu existuje $\delta$, že $f[P(A,\delta)] \subset U(K,\varepsilon)$ a $g[P(B,\delta)] \subset U(L,\varepsilon)$. Tedy $f[P(A,\delta)] < g[P(B,\delta)]$.

2. Část 2 je jen obměna implikace v části 1. □

Větu lze zesílit podobně jako tvrzení 4.3.6 zesiluje větu 4.3.2.

**Úloha 7.3.8** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 7.3.9 (limita funkce a uspořádání 2)** *Nechť jsou dány dvě limity $\lim_{x\to A} f(x) = K$ a $\lim_{x\to B} g(x) = L$ ($A \neq B$ lze). Pak platí následující.*
*1. Když $K < L$, pak existuje $\delta$ a dvě čísla $a, b$, že $f[P(A,\delta)] < \{a\} < \{b\} < g[P(B,\delta)]$.*
*2. Když pro každé $\delta$ a každá dvě čísla $a < b$ existuje $x \in P(A,\delta) \cap M(f)$ a $y \in P(B,\delta) \cap M(g)$, že $f(x) \geq a$ nebo $g(y) \leq b$, pak $K \geq L$.*

**Úloha 7.3.10** *Zformulujte verze věty 7.3.7 a tvrzení 7.3.9 pro jednostranné limity a dokažte je.*

Víme, že symbol $I(a,b)$ označuje uzavřený reálný interval s konci $a$ a $b$.

**Věta 7.3.11 (dva funkční strážníci)** *Nechť je $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$, platí limity $\lim_{x\to K} f(x) = \lim_{x\to K} g(x) = L$ a existuje $\theta$, že pro každé $x \in P(K,\theta) \cap M$ je $h(x) \in I\big(f(x), g(x)\big)$. Potom $\lim_{x\to K} h(x) = L$.*

**Důkaz.** Nechť $f$, $g$, $h$, $M$, $K$, $L$ a $\theta$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. Vezmeme $\delta \le \theta$, že pro každé $x \in P(K,\delta) \cap M$ hodnoty $f(x)$ a $g(x)$ leží v $U(L,\varepsilon)$. Pro tato $x$ je $h(x) \in I\big(f(x), g(x)\big) \subset U(L,\varepsilon)$, protože $U(L,\varepsilon)$ je konvexní množina. Tedy $h[P(K,\delta)] \subset U(L,\varepsilon)$ a $\lim_{x\to K} h(x) = L$. □

## 7.4 Limita složené funkce

• *Věta o limitě složené funkce.* Operace skládání funkcí nemá u posloupností obdobu. Následující věta o limitě složené funkce je proto novinkou. Její formulace v literatuře jsou implikace. Naše formulace je ekvivalence.

**Věta 7.4.1 (limita složené funkce)** *Buď* $\lim_{x\to A} g(x) = K$, $\lim_{x\to K} f(x) = L$ *a* $A \in L(M(f(g)))$. *<u>Pak</u>* $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L \iff$ *je splněna alespoň jedna ze dvou následujících podmínek.*
1. *Platí implikace, že* $K \in M(f) \Rightarrow f(K) = L$.
2. *Existuje* $\theta$, *že* $K \notin g[P(A,\theta)]$.
*Když ani jedna podmínka není splněna, pak limita* $\lim_{x\to A} f(g)(x)$ *buď neexistuje, anebo se rovná* $f(K)$, *ale to není* $L$.

**Důkaz.** Nechť $A$, $g$, $K$, $f$ a $L$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. Podle předpokladů existuje $\delta'$, že (a) $f[P(K,\delta')] \subset U(L,\varepsilon)$, a existuje $\delta$, že (b) $g[P(A,\delta)] \subset U(K,\delta')$. Nechť platí podmínka 1. Inkluze (a) pak zesílí na inkluzi $f[U(K,\delta')] \subset U(L,\varepsilon)$ a

$$f(g)[P(A,\,\delta)] = f[\,g[P(A,\,\delta)]\,] \subset f[U(K,\,\delta')] \subset U(L,\,\varepsilon)\,,$$

takže $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$.

Nechť platí podmínka 2. Předešlé $\delta$ můžeme vzít tak, že navíc $\delta \le \theta$, kde $\theta$ je z podmínky 2. Inkluze (b) pak zesílí na inkluzi $g[P(A,\delta)] \subset P(K,\delta')$ a

$$f(g)[P(A,\,\delta)] = f[\,g[P(A,\,\delta)]\,] \subset f[P(K,\,\delta')] \subset U(L,\,\varepsilon)\,,$$

takže opět $\lim_{x\to A} f(g(x)) = L$.

Nechť ani podmínka 1 ani podmínka 2 neplatí. Neplatnost podmínky 1 znamená, že $K \in M(f)$, ale $f(K) \ne L$. Neplatnost podmínky 2 znamená, že pro každé $n$ existuje $a_n \in P(A,1/n) \cap M(g)$, že $g(a_n) = K$. Pak $(a_n) \subset M(f(g)) \setminus \{A\}$, $\lim a_n = A$ a

$$\lim f(g)(a_n) = \lim f(g(a_n)) = \lim f(K) = f(K) \quad (\ne L)\,.$$

Podle Heineho definice limity funkce tedy $\lim_{x\to A} f(g(x))$ buď neexistuje, anebo se rovná $f(K)$, což však není $L$. □

Podmínka 1 je splněna vždy, když $K \notin M(f)$, např. pro $K = \pm\infty$. Podobně podmínka 2 je splněna vždy, když funkce $g$ je prostá. Pak lze větu vždy použít a dostáváme tento důsledek.

**Důsledek 7.4.2 (kdy věta funguje)** *Buď* $\lim_{x\to A} g(x) = K$, $\lim_{x\to K} f(x) = L$ *a* $A \in L(M(f(g)))$. *Předpokládejme, že* $K = \pm\infty$ *nebo že* $g$ *je injekce. Pak* $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$.

**Úloha 7.4.3** *Dokažte tuto větu pomocí Heineho definice limity funkce.*

• *Použití věty 7.4.1.* Uvedeme několik použití věty o limitě složené funkce či přesněji jejího důsledku 7.4.2. Dvě ekvivalence limit funkcí níže se často používají.

**Důsledek 7.4.4 (posun argumentu do nuly)** *Nechť* $f \in \mathcal{F}(M)$ *a* $b \in \mathbb{R}$. *Pak* $\lim_{x\to b} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0} f(x+b)(x) = L$.

**Důkaz.** Nechť $f$ a $b$ jsou, jak uvedeno. Implikace $\Rightarrow$: nechť $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Tedy $b \in L(M)$. Vezmeme vnější funkci $f$, prostou vnitřní funkci $g(x) = x + b$, $A = 0$ a $K = b$. Je $M(f(g)) = X := \{x - b : \ x \in M\}$ a $0 \in L(X)$. Dále $\lim_{x\to 0} g(x) = b$ a $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Důsledek 7.4.2 dává, že $\lim_{x\to 0} f(x+b)(x) = \lim_{x\to 0} f(g)(x) = L$.

Implikace $\Leftarrow$: nechť $\lim_{x\to 0} f(x + b)(x) = L$. Tedy $0 \in L(X)$. Vezmeme vnější funkci $g(x) = f(x + b)$, prostou vnitřní funkci $h(x) = x - b$, $A = b$ a $K = 0$. Je $M(g(h)) = M(f) = M$ a $b \in L(M)$. Patrně $\lim_{x\to b} h(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = L$ a $g(h) = f((x - b) + b) = f$. Z důsledku 7.4.2 dostáváme, že $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(h)(x) = L$. □

**Důsledek 7.4.5 ($\to 0^{\pm} \iff \to \pm\infty$)** *Nechť* $f \in \mathcal{R}$. *Pak* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0^{\pm}} f(1/x)(x) = L$ *(shodná znaménka).*

**Důkaz.** Omezíme se na znaménko $+$, případ s $-$ je podobný. Implikace $\Rightarrow$: nechť $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, takže $+\infty \in L(M(f))$. Vezmeme vnější funkci $f$, prostou vnitřní funkci $g = \frac{1}{x} \,|\, (0, +\infty)$, $A = 0$ a $K = +\infty$. Patrně $0 \in L(M(f(g)))$ a $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Podle důsledku 7.4.2 máme, že $L = \lim_{x\to 0} f(g)(x) = \lim_{x\to 0^+} f(1/x)(x)$.

Implikace $\Leftarrow$: nechť $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)(x) = L$. Pro $g$ jako výše vezmeme vnější funkci $F = f(g)$, prostou vnitřní funkci $g$, $A = +\infty$ a $K = 0$. Pak $A \in L(M(F(g)))$ a $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0^+} f(1/x)(x) = L$. Patrně $g(g) = x \,|\, (0, +\infty)$. Důsledek 7.4.2 nám dává $L = \lim_{x\to+\infty} F(g)(x)$, což se rovná limitě $\lim_{x\to+\infty} f(g(g))(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ (úloha 1.3.12). □

Výpočetní obraty, že $\lim_{x\to b} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0} f(x + b)(x) = L$ a že $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0^{\pm}} f(1/x)(x) = L$ používáme ve výpočetní praxi bez přemýšlení. Výše je jejich přesná podoba a formální zdůvodnění.

**Úloha 7.4.6** *Pomocí věty 7.4.1 dokažte důsledek 7.3.6. Pro pohodlí čtenáře ho tu zopakujeme.*

**Důsledek 7.4.7 (limita 1/g 2)** *Když* $g \in \mathcal{R}$ *a* $\lim_{x\to A} g(x) = B \neq 0$, *pak* $\lim_{x\to A} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.

## 7.5 Asymptotické značení

Kuriózním průnikem knih o výpočetní složitosti a algoritmech s učebnicemi analýzy je značení pro asymptotické chování funkcí, viz například úlohu 7.5.2. Informaticky vzdělaný čtenář se s ním už jistě setkal. Pojďme se podívat, jak se asymptotické symboly definují v analýze, respektive v této učebnici.

• *Asymptotické symboly $O$, $\ll$ a další.* Tyto nemají limitní povahu.

**Definice 7.5.1 ($O$ a $\ll$)** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$ a $N \subset M(f) \cap M(g)$. Potom píšeme $\underline{f(x) = O(g(x)) \text{ (na } N)}$ a řekneme, že na množině $N$ je funkce $f$ velké $O$ z funkce $g$, když existuje $c > 0$, že pro každé $x \in N$ je $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$. Značení $\underline{f(x) \ll g(x) \text{ (na } N)}$ znamená totéž.*

Například $20x^2 + 100x - 1 = O(x^2)$ (na $[1, +\infty)$). Lze se setkat se značením $f = g + O(h)$ (na $N$). Znamená, že $f - g = O(h)$ (na $N$). Značení jako $\log x = O_\varepsilon(x^\varepsilon)$ (na $[1, +\infty)$) znamená, že implicitní konstanta $c > 0$ je funkcí parametru $\varepsilon$. Značení $f \gg g$ (na $N$) a $f = \Omega(g)$ (na $N$) znamenají, že $g \ll f$ (na $N$). Značení $f = \Theta(g)$ (na $N$) a $f \asymp g$ (na $N$) znamenají, že $f \ll g$ i $g \ll f$ (na $N$).

**Úloha 7.5.2** *V [99, str. 19] je tato definice $O$: „In particular, for $f, g \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g = O(f)$ means that $g(n) \leq cf(n) + c$ for some constant $c \geq 1$ and all $n$“. Objasněte vztah tohoto $O$ k našemu $O$.*

**Úloha 7.5.3** *Zde je pár otázek na asymptotický vztah $O$.*
1. *Je $x^2 = O(x^3)$ (na $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$)?*
2. *Je $x^2 = O(x^3)$ (na $\mathbb{R}$)?*
3. *Je $x^3 = O(x^2)$ (na $\mathbb{R}$)?*
4. *Je $x^3 = O(x^2)$ (na $(-20, 20)$)?*
5. *Je $\log x = O(x^{1/3})$ (na $(0, +\infty)$)?*
6. *Je $\log x = O(x^{1/3})$ (na $(1, +\infty)$)?*

• *Asymptotické symboly $o$, $\omega$ a $\sim$.* Ty už definujeme pomocí limit.

**Definice 7.5.4 ($o$, $\omega$ a $\sim$)** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$ a $A \in L(M(f/g))$. Potom píšeme $\underline{f(x) = o(g(x)) \ (x \to A)}$ a řekneme, že pro $x \to A$ je funkce $f$ malé $o$ z funkce $g$, jestliže $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Značení $\underline{f(x) = \omega(g(x)) \ (x \to A)}$ znamená totéž. Píšeme $\underline{f(x) \sim g(x) \ (x \to A)}$ a řekneme, že pro $x \to A$ je funkce $f$ asymptoticky rovna funkci $g$, jestliže $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Značení $f = g + o(h)$ $(x \to A)$, znamená, že $f - g = o(h)$ $(x \to A)$.

**Úloha 7.5.5** *Zde je pár otázek na asymptotické vztahy $o$ a $\sim$.*
1. *Je $x^2 = o(x^3)$ $(x \to +\infty)$?*
2. *Je $x^3 = o(x^2)$ $(x \to 0)$?*
3. *Je $x^2 = o(x^3)$ $(x \to 0)$?*

4. *Je* $(x+1)^3 \sim x^3$ *(*$x \to 1$*)?*
5. *Je* $(x+1)^3 \sim x^3$ *(*$x \to +\infty$*)?*
6. *Je* $\mathrm{e}^{-1/x^2} = o(x^{20})$ *(*$x \to 0$*)?*

Symboly $o$, $O$ a $\sim$ zavedli P. Bachman a E. Landau. Symboly $\ll$, $\gg$ a $\asymp$ pocházejí od I. M. Vinogradova. O těchto matematicích píšeme v oddílu C.1.

• *Slavné asymptotiky.* Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť $\pi(x)$ je počet prvočísel nepřesahujících $x$. V r. 1896 J. Hadamard a, nezávisle na něm, Ch. J. de la Vallée Poussin (viz oddíl C.1) dokázali známou Prvočíselnou větu, že

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to +\infty)\,.$$

Pro $k, n \in \mathbb{N}$ nechť $r_k(n)$ je velikost největší množiny $X \subset [n]$, která neobsahuje aritmetickou posloupnost délky $k$. V r. 1975 E. Szemerédi dokázal známou větu, o níž jsme se už zmínili v závěru druhé přednášky, že pro každé $k$ je

$$r_k(n) = o(n) \quad (n \to +\infty)\,.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme $D(x) = |\{(m,\, n) \in \mathbb{N}^2 :\ mn \le x\}|$.

**Úloha 7.5.6** *Ukažte, že* $D(x) = \sum_{n \le x} \tau(n)$*, kde* $\tau(n)$ *je počet dělitelů čísla* $n$ *(např.* $\tau(28) = |\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}| = 6$*).*

Úloze odhadnout $D(x)$ se říká (Dirichletův) problém dělitelů. V r. 1849 P. L. Dirichlet (viz oddíl C.1) dokázal, že

$$D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \qquad (x \ge 2)\,,$$

kde $\gamma$ je Eulerova konstanta. V r. 1903 to G. F. Voronoj (viz oddíl C.1) zlepšil na

$$D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\big(x^{1/3} \log x\big) \qquad (x \ge 2)\,.$$

Ve 20. století přišla řada dalších zlepšení odhadu chyby v problému dělitelů. Současný rekord drží M. N. Huxley, který v r. 2003 dokázal, že pro každé $\varepsilon$ je

$$D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O_\varepsilon\big(x^{131/416+\varepsilon}\big) \qquad (x \ge 2)\,.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ a nějaký algoritmus (Turingův stroj) $T$ pro násobení celých čísel definujeme $T(n)$ jako nejmenší $k \in \mathbb{N}$, že $T$ vynásobí dvě $n$-ciferná čísla v nejvýše $k$ krocích. Školský algoritmus $T_{\check{s}}$ má rychlost $T_{\check{s}}(n) = O(n^2)$ $(n \in \mathbb{N})$. V r. 1960 A. A. Karacuba (viz oddíl C.1) vymyslel algoritmus $T_K$, který násobí s rychlostí $T_K(n) = O\big(n^{\log_2 3}\big) = O\big(n^{1.585\ldots}\big)$ $(n \in \mathbb{N})$. V r. 2021 D. Harvey a J. van der Hoeven nalezli algoritmus $T_{HH}$ pro násobení celých čísel s rychlostí

$$T_{HH}(n) = O(n \log n) \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})\,.$$

**Úloha 7.5.7** *Proč tu nepíšeme* $n \in \mathbb{N}$*?*

# Kapitola 8

# Přednáška 6. Spojité funkce

Budeme se zabývat spojitými funkcemi. Šestou přednášku

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred6.pdf`

jsem přednesl 28. 3. 2024. V oddílu 8.1 zavedeme husté a řídké množiny a uvedeme Blumbergovu větu 8.1.10, podle níž každá všude definovaná reálná funkce má spojité zúžení na nějakou hustou podmnožinu. Větu dokážeme v oddílu 9.6. V oddílu 8.2 ve větě 8.2.3 dokážeme, že množina všude definovaných spojitých reálných funkcí je v bijekci s množinou $\mathbb{R}$. Hlavním výsledkem oddílu 8.3 je věta 8.3.1 o nabývání mezihodnot spojitými funkcemi.

V oddílu 8.4 definujeme kompaktní množiny a ve větě 8.4.1 dokážeme, že spojitá funkce s kompaktním definičním oborem má minimum i maximum. Definujeme otevřené a uzavřené množiny reálných čísel, uvedeme jejich základní vlastnosti a ve větě 8.4.10 kompaktní množiny charakterizujeme. Podle tvrzení 8.5.2 je spojitá funkce na kompaktní množině stejnoměrně spojitá. Podle tvrzení 8.5.4 má stejnoměrně spojitá funkce spojité rozšíření do každého vlastního limitního bodu definičního oboru. Oddíl 8.6 se zabývá zachováváním spojitosti při operacích s funkcemi, například věta 8.6.1 se týká aritmetických operací a věta 8.6.3 funkcí definovaných součtem mocninné řady. Věta 8.6.8 je věnována složeným funkcím a věta 8.6.9 inverzním funkcím. Věta 8.6.14 dokazuje spojitost elementárních funkcí.

## 8.1 Blumbergova věta

• *Spojité funkce.* Podle definice 7.2.1 funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je spojitá v bodu $a \in M$, pokud pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že $f[U(a,\delta)] \subset U(f(a),\varepsilon)$. Několikrát použijeme ekvivalenci, že

$$f \text{ je spojitá v } a \iff \forall\,(a_n) \subset M \left(\lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)\right). \qquad \text{(H)}$$

Tato Heineho definice spojitosti funkce v bodě byla dokázána v úloze 7.2.5.

**Definice 8.1.1 (spojité funkce)** *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je spojitá (na $M(f)$), je-li spojitá v každém bodu $b \in M(f)$. Množinu spojitých funkcí $f \in \mathcal{F}(M)$ označíme jako $\mathcal{C}(M)$. Položíme $\mathcal{C} = \bigcup_{M \subset \mathbb{R}} \mathcal{C}(M)$.*

**Úloha 8.1.2** *Každá funkce v $\mathcal{R}$ s konečným definičním oborem je spojitá.*

**Úloha 8.1.3** *Každá konstantní funkce $k_a \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, je spojitá.*

**Úloha 8.1.4** *Identická funkce $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ je spojitá.*

**Tvrzení 8.1.5 (spojitost a zúžení)** *Když $f \in \mathcal{C}$ a $X$ je libovolná množina, pak i $f \,|\, X \in \mathcal{C}$.*

**Důkaz.** Nechť $f$ a $X$ jsou, jak uvedeno, a jsou dány $b \in M(f \,|\, X)$ a $\varepsilon$. Tedy $b \in M(f)$ a protože $f \in \mathcal{C}$, existuje $\delta$, že $f[U(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Ovšem $U(b,\delta) \cap M(f) \cap X \subset U(b,\delta) \cap M(f)$, takže

$$(f \,|\, X)[U(b,\, \delta)] \subset f[U(b,\, \delta)] \subset U(f(b),\, \varepsilon)$$

a restrikce $f \,|\, X$ je spojitá v $b$. Platí to pro každý bod $b \in M(f \,|\, X)$, takže $f \,|\, X \in \mathcal{C}$. □

• *Husté a řídké množiny.* Tyto množiny definujeme, když $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Množina $N$ je hustá v $M$, když pro každé $a \in M$ a $\delta$ je $U(a,\delta) \cap N \neq \emptyset$.

**Úloha 8.1.6** *$N$ je hustá v $M$ $\iff$ pro každý bod $a \in M$ existuje taková posloupnost $(b_n) \subset N$, že $\lim b_n = a$.*

**Úloha 8.1.7** *Ukažte, že obě množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$.*

Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Množina $N$ je řídká v $M$, když

$$\forall\, (a,\, b) \subset M\, \exists\, c,\, d\, \big(a \le c < d \le b \wedge N \cap (c,\, d) = \emptyset\big)$$

— každý netriviální interval v $M$ obsahuje netriviální podinterval disjunktní s $N$.

**Úloha 8.1.8** *Dokažte, že $N = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ je řídká v $M = [0,1]$.*

**Tvrzení 8.1.9 (hustota a spojitost)** *Nechť $f, g \in \mathcal{C}(M)$, $N$ je hustá v $M$ a $f \,|\, N = g \,|\, N$. Pak $f = g$.*

**Důkaz.** Nechť $b \in M$ a $(a_n) \subset N$ má $\lim a_n = b$. (H): $f(b) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(\lim a_n) = g(b)$. □

Následující věta byla dokázána v roce 1922.

**Věta 8.1.10 (Blumbergova)** *Každá funkce $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ má spojité zúžení na nějakou množinu $M \subset \mathbb{R}$ hustou v $\mathbb{R}$.*

O H. Blumbergovi píšeme více v oddílu C.1. Větu dokážeme v oddílu 9.6.

## 8.2 Počet spojitých funkcí

Ukážeme, že existuje bijekce mezi množinami $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

• *Cantor–Bernsteinova věta.* O ni se při důkazu existence takové bijekce opřeme.

**Věta 8.2.1 (Cantor–Bernsteinova)** *Nechť $X$ a $Y$ jsou množiny. Když existují injekce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$, potom existuje bijekce $h\colon X \to Y$.*

Věta je dokázána v oddílu 2.1 jako věta 2.1.2. Například $(m, n) \mapsto 2^m 3^n$ je injekce z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a $n \mapsto (1, n)$ je injekce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, takže podle C.–B. věty existuje bijekce z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Takovou bijekci ale v následující úloze dokážeme definovat bez pomoci jakékoli věty.

**Úloha 8.2.2** *Dokažte, že funkce $s\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $s(m, n) = (2m - 1) \cdot 2^{n-1}$, je bijekce.*

• *Kolik je tedy spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?* Tolik jako reálných čísel.

**Věta 8.2.3 (počet spojitých funkcí)** *Existuje bijekce $h\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

**Důkaz.** Díky větě 8.2.1 stačí mít dvě injekce $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a $g\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Injekce $f$ je popsaná v úloze 8.2.4. Definujeme injekci $g$. Libovolnou funkci $j \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ zakódujeme do jediného čísla $g(j) \in \mathbb{R}$. Čísla v $\mathbb{R}$ bereme jako rozvoje s vynechanými znaménky $+$, např. $-\pi = -3.1415\ldots$ nebo $2022.0000\ldots$. Vezmeme dvě bijekce

$$r\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \text{ a } s\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,.$$

V úloze 8.2.2 je $s$ dána vzorcem. Deset cifer 0, 1, …, 9, desetinnou tečku . a znaménko minus $-$ kódujeme bijekcí

$$c\colon \{0, 1, \ldots, 9, ., -\} =: X \to Y := \{00, 01, \ldots, 09, 10, 11\}$$

pomocí dvojic cifer, třeba jako

$$c(0) = 00,\ c(1) = 01,\ \ldots,\ c(9) = 09,\ c(.) = 10 \ \text{ a } \ c(-) = 11\,.$$

Hodnotou $g(j) \in \mathbb{R}$ pro $j \in C(\mathbb{R})$ je rozvoj

$$g(j) = 0.\, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_{2n-1}\, a_{2n}\, \cdots \in [0, 1)\,,$$

jehož dvoučlenné bloky cifer $a_{2n-1}a_{2n} \in Y$ kódují hodnoty $j(\alpha)$ funkce $j$ na zlomcích $\alpha \in \mathbb{Q}$. Podle úlohy 8.1.7 a tvrzení 8.1.9 je funkce $j$ těmito hodnotami jednoznačně určena. Nechť tedy $\alpha \in \mathbb{Q}$, $r(\alpha) =: k \in \mathbb{N}$ a

$$j(\alpha) = b(k, 1)\, b(k, 2)\, \ldots\, b(k, l)\, \ldots\,,$$

kde $l \in \mathbb{N}$ a $b(k, l) \in X$. Položíme $n = s(k, l)$ a

$$a_{2n-1}\, a_{2n} = c(b(k, l))\,.$$

Dá se vidět, že $g$ je prostá, protože z rozvoje $g(j) \in \mathbb{R}$ funkci $j$ jednoznačně zrekonstruujeme. Je jasné, že náležení $g(j)$ do $[0,1)$ a do $\mathbb{R}$ je vlastně zkratka za injekci $g(j) \mapsto F(g(j)) \in [0,1), \mathbb{R}$, kde funkce $F$ je definována za definicí 1.7.13. Podle části 2 věty 1.7.16 jde skutečně o injekci. □

**Úloha 8.2.4** *Dokažte, že zobrazení $a \mapsto k_a$ je injekce z $\mathbb{R}$ do $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

**Úloha 8.2.5** *Pro $\forall$ neprázdnou reálnou množinu $M$ $\exists$ bijekce $h\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(M)$.*

## 8.3 Nabývání mezihodnot

Dokážeme, že spojité funkce zobrazují intervaly na intervaly. V oddílu 14.3 uvidíme, že tuto vlastnost mají i všechny funkce, které jsou derivacemi.

• *Spojitá funkce nabývá všechny mezihodnoty.* Obraz funkce signum $\operatorname{sgn} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ je množina $\operatorname{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$, takže i když $\frac{1}{2} \in (0,1)$, neexistuje $b$ se $\operatorname{sgn}(b) = \frac{1}{2}$. Pro spojité funkce se toto nestane.

**Věta 8.3.1 (nabývání mezihodnot)** *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ & $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$. <u>Pak</u> pro nějaké $d \in (a,b)$ se $f(d) = c$.*

**Důkaz.** Nechť $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Položíme $X = \{x \in [a,b] : \ f(x) < c\}$ a $d = \sup(X)$, patrně $d \in [a, b]$. Ze spojitosti $f$ v $a$ a v $b$ plyne, že $d \in (a,b)$. Uvidíme, že $f(d) < c$ a $f(d) > c$ vedou ke sporu, tedy $f(d) = c$. Nechť $f(d) < c$. Ze spojitosti $f$ v $d$ plyne existence $\delta$, že pro každé $x \in U(d,\delta) \cap [a,b]$ je $f(x) < c$. Pak ale $X$ obsahuje čísla větší než $d$, což je spor. Nechť $f(d) > c$. Ze spojitosti $f$ v $d$ plyne existence $\delta$, že pro každé $x \in U(d,\delta) \cap [a,b]$ je $f(x) > c$. Pak ale každé $x < d$ a blízké $d$ leží mimo $X$, což je také spor. □

**Úloha 8.3.2** *Pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ a každou funkci $f \in \mathcal{C}(I)$ je $f[I]$ interval.*

**Důsledek 8.3.3 (obraz funkce** exp**)** *Platí, že* $\exp[\mathbb{R}] = (0, +\infty)$. *Tedy* exp *je bijekce z $\mathbb{R}$ do $(0, +\infty)$.*

**Důkaz.** Protože $\exp > 0$ na $\mathbb{R}$, je $\exp[\mathbb{R}] \subset (0, +\infty)$. Z limit $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$ (část 3 tvrzení 5.3.5), ze spojitosti exponenciály (důsledek 8.6.6) a z věty 8.3.1 plyne, že $(0, +\infty) \subset \exp[\mathbb{R}]$. Tedy $\exp[\mathbb{R}] = (0, +\infty)$. Exponenciála roste a je proto bijekce. □

**Úloha 8.3.4** *Dokažte následující důsledek.*

**Důsledek 8.3.5 (alpinistický)** *Horolezec začne o půlnoci výstup, po 24 hodinách dosáhne vrcholu a pak zase 24 hodin sestupuje do základního tábora. Ukažte, že existuje čas $t_0 \in [0, 24]$, kdy se v obou dnech nachází ve stejné nadmořské výšce.*

Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ roste, resp. klesá, na (libovolné) množině $X$, pokud pro každé $x < y$ v $M \cap X$ je $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$.

**Důsledek 8.3.6 (spojitost a prostota)** *Když $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f \in \mathcal{C}(I)$ je prostá, pak $f$ buď roste, anebo klesá.*

**Důkaz.** Kdyby $f$ ani nerostla ani neklesala, v $I$ by se našla tři čísla $a < b < c$, že $f(a) < f(b) > f(c)$ nebo $f(a) > f(b) < f(c)$. V prvním případu pro každé $d$ s $f(a), f(c) < d < f(b)$ podle věty 8.3.1 existují $x \in (a, b)$ a $y \in (b, c)$, že $d = f(x) = f(y)$, ve sporu s prostotou funkce $f$. Druhý případ vede na podobný spor. □

Teď je snadné dokázat větu 1.6.16, kterou zde zopakujeme jako důsledek.

**Důsledek 8.3.7 (Bolzano–Cauchyova věta)** *Nechť $I$ je interval, $f \in \mathcal{C}(I)$ & pro nějaké $a, b \in I$ je $f(a)f(b) \leq 0$. Pak existuje $c \in I$, že $f(c) = 0$.*

**Důkaz.** Pokud $f(a)f(b) = 0$, je $f(a) = 0$ nebo $f(b) = 0$. Pokud $f(a)f(b) < 0$, pak $a \neq b$ & $f(a) < 0 < f(b)$ nebo $f(b) < 0 < f(a)$. Použijeme větu 8.3.1. □

## 8.4 Kompaktnost

Kompaktní množiny jsou základním nástrojem analýzy. Budeme se ale zabývat jen reálnými a prozkoumáme jejich vztahy ke spojitým funkcím. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, když každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má podposloupnost $(a_{m_n})$ s limitou $\lim a_{m_n}$ v $M$. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty a věty o limitě a uspořádání každý interval $[a, b]$ je kompaktní. Později všechny kompaktní množiny popíšeme.

• *Minima a maxima.* Ukážeme, že spojitá funkce s kompaktním definičním oborem vždy nabývá nejmenší a největší hodnotu.

**Věta 8.4.1 (minima a maxima)** *Nechť $f \in \mathcal{C}(M)$, kde $M \neq \emptyset$ je kompaktní množina. Pak existují body $a, b \in M$, že pro každé $x \in M$ je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Bod $a$, resp. $b$, je bod minima, resp. bod maxima, funkce $f$.*

**Důkaz.** Dokážeme existenci bodu maxima, minimum se řeší podobně. Nechť $A = \sup(f[M])$, bráno v LU $(\mathbb{R}^*, <)$. Patrně $f[M] \neq \emptyset$ a lze vzít $(a_n) \subset M$ s $\lim f(a_n) = A$. Nějaká podposloupnost $(a_{m_n})$ má $\lim a_{m_n} = b \in M$. Podle (H) se $f(b) = \lim f(a_{m_n}) = \lim f(a_n) = A$, speciálně $A \in \mathbb{R}$. Pro každé $x \in M$ tak $f(x) \leq A = f(b)$. □

**Úloha 8.4.2** *Spojité funkce $f, g\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a $g(x) = x$, nemají body maxima.*

Zavedeme globální a lokální extrémy funkcí. Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ má v bodu $b \in M$ globální maximum, resp. globální minimum, když pro $\forall x \in M$ je $f(x) \leq f(b)$, resp. $f(x) \geq f(b)$. Řekneme, že funkce $f$ má v $b \in M$ lokální maximum, resp. lokální minimum, když pro nějaké $\delta$ pro každé $x \in U(b, \delta) \cap M$ je $f(x) \leq f(b)$, resp. $f(x) \geq f(b)$. Platí-li pro každé $x \neq b$ tyto nerovnosti jako ostré (jako $<$, resp. $>$), mluvíme o ostrém globálním maximu, atd.

• *Spojitý obraz kompaktu je kompakt.* To je jeden z nejdůležitějších výsledků o kompaktních množinách, zejména ve své obecné podobě v topologii.

**Věta 8.4.3 (obraz kompaktu)** *Když $f \in \mathcal{C}(M)$ pro kompaktní množinu $M$, pak $f[M]$ je kompaktní množina.*

**Důkaz.** Nechť $f$ a $M$ jsou, jak uvedeno, a $(b_n) \subset f[M]$. Vezmeme $(a_n) \subset M$, že $f(a_n) = b_n$ (použili jsme axiom výběru), a podposloupnost $(a_{m_n})$ s $\lim a_{m_n} = a \in M$. (H): $\lim f(a_{m_n}) = f(a) = b$, takže $(b_{m_n}) = (f(a_{m_n}))$ má limitu $\lim b_{m_n} = b \in f[M]$. Tedy $f[M]$ je kompaktní. □

**Úloha 8.4.4** *Jak spolu souvisí věty 8.4.3 a 8.4.1?*

• *Otevřené a uzavřené množiny.* Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, když pro každý bod $b \in M$ existuje $\delta$, že $U(b, \delta) \subset M$. Množina $M$ je uzavřená, když její doplněk $\mathbb{R} \setminus M$ je otevřená množina.

**Úloha 8.4.5** *Platí následující.*
1. *Obě množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ jsou otevřené i uzavřené.*
2. *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*
3. *Průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina.*
4. *Sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*
5. *Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

**Tvrzení 8.4.6 (o uzavřených množinách)** *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená, $\iff$ pro každou konvergentní posloupnost $(a_n) \subset M$ její limita leží v $M$.*

**Důkaz.** $\Rightarrow$. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená a $(a_n) \subset M$ má $\lim a_n = a$. Když $a \in \mathbb{R} \setminus M$, pak pro nějaké $\delta$ je $U(a, \delta) \cap M = \emptyset$. To ale vzhledem k $a_n \to a$ není možné, tedy $a \in M$.

$\neg \Rightarrow \neg$. Když $M \subset \mathbb{R}$ není uzavřená, existuje $a \in \mathbb{R} \setminus M$, že pro každé $n$ máme nějaké $a_n \in U(a, 1/n) \cap M$. Tedy $(a_n) \subset M$ & $\lim a_n = a \notin M$ (opět užíváme axiom výběru). □

**Tvrzení 8.4.7 (obraz otevřené množiny)** *$f \in \mathcal{C}(M)$ buď prostá funkce a $M$ buď otevřená množina. Pak i $f[M]$ je otevřená množina.*

**Důkaz.** Nechť $M$ a $f$ jsou, jak uvedeno, a nechť $b \in f[M]$. Položíme $a = f^{-1}(b) \in M$. Díky otevřenosti $M$ vezmeme nějaký interval $[a - \delta, a + \delta] \subset M$. Pak $f(a-\delta) < b < f(a+\delta)$ nebo $f(a-\delta) > b > f(a+\delta)$ (jak $f(a-\delta), f(a+\delta) <$

$b = f(a)$, tak $f(a-\delta), f(a+\delta) > b = f(a)$ vede podle věty 8.3.1 ke sporu s prostotou $f$). Vezmeme $\varepsilon$, že $\varepsilon < \min(\{|f(a+\delta)-b|, |f(a-\delta)-b|\})$. Pak věta 8.3.1 dává, že $U(b,\varepsilon) \subset f[(a-\delta, a+\delta)] \subset f[M]$. Tedy $f[M]$ je otevřená množina. □

Otevřené množiny si díky následujícímu popisu jejich struktury lze docela dobře představit. Otevřené intervaly jsou intervaly tvaru $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ a $(a, b)$ s $a < b$.

**Tvrzení 8.4.8 (o otevřených množinách)** *$M \subset \mathbb{R}$ je otevřená $\iff$ existuje nejvýše spočetný systém disjunktních otevřených intervalů $\{I_j : j \in J\}$ s $\bigcup_{j\in J} I_j = M$.*

**Důkaz.** $M \subset \mathbb{R}$ buď neprázdná otevřená množina (pro $M = \emptyset$ tvrzení platí triviálně s $J = \emptyset$) a pro $a \in M$ definujeme $I_a$ jako vzhledem k inkluzi maximální otevřený interval $I$ splňující, že $a \in I \subset M$. Patrně $I_a = (\inf A, \sup B)$, infimum a supremum bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$, kde $A \subset \mathbb{R}$ jsou ty $b < a$, že $(b, a) \subset M$ a podobně $B$ jsou ty $b > a$, že $(a, b) \subset M$. Pro $a, b \in M$ patrně vždy buď $I_a = I_b$, anebo $I_a \cap I_b = \emptyset$. Hledaný systém intervalů je tedy $\{I_a : a \in \mathbb{Q} \cap M\}$. □

• *Cantorovo diskontinuum.* Uzavřená množina $\mathbb{R} \setminus M$ pak je sjednocením „mezer“ mezi těmito intervaly $I_j$. Když $|J| = n$, je mezer nejvýše $n+1$. Obtížně představitelné je, že pro spočetnou $J$ množina mezer může být nespočetná. Takové uzavřené množiny se dosti špatně představují — příkladem je takzvané Cantorovo diskontinuum, což je množina

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \ (\subset [0,\,1] = C_0),\ C_n = \tfrac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\tfrac{1}{3}C_{n-1} + \tfrac{2}{3}\right).$$

Méně formálně řečeno, $C$ je to, co z intervalu $[0, 1]$ zbude, když z něj vynecháme otevřenou prostřední třetinu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ze zbytku $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ vynecháme otevřené prostřední třetiny $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, atd.

**Úloha 8.4.9** *$C$ je nespočetná uzavřená množina s „délkou“ rovnou 0.*

• *Charakterizace kompaktních množin.* Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, existuje-li $c > 0$, že pro každé $a \in M$ je $|a| \le c$ (takže $M \subset [-c, c]$). Následující věta popisuje všechny kompaktní množiny v $\mathbb{R}$.

**Věta 8.4.10 (kompaktní reálné množiny)** *$M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní $\iff$ $M$ je omezená a uzavřená.*

**Důkaz.** Nechť $M$ je omezená a uzavřená a $(a_n) \subset M$. Podle B.–W. věty máme konvergentní podposloupnost $(a_{m_n})$ s $\lim a_{m_n} = a \in \mathbb{R}$. $M$ je uzavřená a podle tvrzení 8.4.6 je $a \in M$. Tedy $M$ je kompaktní.

Nechť $M$ není omezená. Sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $|a_m - a_n| \ge 1$ jakmile $m \ne n$. To se dědí na podposloupnosti, které tedy nekonvergují a $M$ není kompaktní. První člen $a_1$ je libovolný. Nechť jsou definovány $a_1, a_2, \ldots, a_n$

a splňují, že $|a_i - a_j| \geq 1$ jakmile $i \neq j$. Protože $M$ není omezená, existuje $a_{n+1} \in M$, že $|a_{n+1}| \geq 1 + \max(\{|a_1|, \ldots, |a_n|\})$. Pak je $|a_{n+1} - a_i| \geq 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Takto dostaneme $(a_n)$.

Nechť $M$ není uzavřená. Podle tvrzení 8.4.6 existuje posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \setminus M$. Stejnou limitu $a$ má i každá podposloupnost, která tedy v $M$ nekonverguje. $M$ není kompaktní. □

**Úloha 8.4.11** *Každá množina $[a, b] \setminus P(c, \delta)$ je kompaktní.*

## 8.5 Stejnoměrná spojitost

je důležité zesílení spojitosti funkce. Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je stejnoměrně spojitá, když pro každé $\varepsilon$ existuje $\delta$, že vždy

$$a,\, b \in M \wedge |a - b| \leq \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon\,.$$

Množinu stejnoměrně spojitých funkcí $f \in \mathcal{F}(M)$ označíme jako $\mathcal{UC}(M)$ ($\mathcal{U}$ jako „uniformně“). Položíme $\mathcal{UC} = \bigcup_{M \subset \mathbb{R}} \mathcal{UC}(M)$.

**Úloha 8.5.1** *Stejnoměrně spojitá funkce je spojitá, $\mathcal{UC} \subset \mathcal{C}$.*

Naopak každá funkce spojitá na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.

**Tvrzení 8.5.2 (kompaktnost a $\mathcal{UC}$)** *$M$ je kompaktní $\Rightarrow \mathcal{C}(M) \subset \mathcal{UC}(M)$.*

**Důkaz.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní a $f \in \mathcal{F}(M)$ není stejnoměrně spojitá. Odvodíme, že $f$ není spojitá. Negace hořejší definice je, že

$$\exists\, \varepsilon\, \forall\, \delta\, \exists\, a, b \in M\ \big(|a - b| \leq \delta \wedge |f(a) - f(b)| > \varepsilon\big)\,.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $\delta = 1/n$ a odpovídající body $a$ a $b$ označíme $a_n$ a $b_n$ (užíváme axiom výběru). Protože $M$ je kompaktní, $(a_n)$ a $(b_n)$ mají podposloupnosti s touž limitou $c \in M$ (protože $|a_n - b_n| \leq 1/n$). Pro jednoduchost značení předpokládáme, že již $\lim a_n = \lim b_n = c$. Protože $|f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon$ pro každé $n$, obě posloupnosti $(f(a_n))$ a $(f(b_n))$ nemohou současně konvergovat k $f(c)$. Podle ekvivalence (H) tedy $f$ není spojitá v bodu $c \in M$ . □

**Úloha 8.5.3** *Spojité funkce $f, g\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ a $g(x) = \sin(1/x)$, nejsou stejnoměrně spojité.*

Následující tvrzení je mnohem důležitější, než by se mohlo zdát.

**Tvrzení 8.5.4 (rozšiřování $\mathcal{UC}$ funkcí)** *Nechť $f \in \mathcal{UC}(M)$ a $b \in L(M)$. Pak existuje $c$, že pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = c$. Funkci $f$ tak lze spojitě rozšířit do bodu $b$ hodnotou $f(b) = c$.*

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$ a $b$ jsou, jak uvedeno, $(a_n), (a'_n) \subset M$ mají limitu $\lim a_n = \lim a'_n = b$ a je dáno $\varepsilon$. Vezmeme $\delta$ zaručené stejnoměrnou spojitostí funkce $f$. Pak pro velké $m$ a $n$ je $|a_m - a'_n| \leq \delta$, takže pro tatáž $m$ a $n$ je $|f(a_m) - f(a'_n)| \leq \varepsilon$. Volba $(a_n) = (a'_n)$ dává, že posloupnost $(f(a_n))$ je cauchyovská. Má tedy, podle věty 3.3.20, limitu $\lim f(a_n) = c$. Při volbě $(a_n) \neq (a'_n)$ vidíme, že $c$ nezávisí na posloupnosti $(a_n)$. □

Jak je předvedeno v [94], pomocí tohoto rozšiřování lze ve velké části reálné analýzy eliminovat nespočetné množiny a vybudovat ji jen za pomoci dědičně nejvýše spočetných množin. Stejnoměrná spojitost funkce přebírá roli kompaktnosti definičního oboru.

## 8.6 Operace na funkcích a spojitost

Prozkoumáme, při kterých operacích s funkcemi se zachová spojitost.

• *Aritmetika spojitosti.* Připomeňte si aritmetiku funkcí ze čtvrté přednášky.

**Věta 8.6.1 (aritmetika spojitosti)** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Platí následující.*
1. *Jsou-li funkce $f$ a $g$ spojité v bodu $b \in M(f) \cap M(g)$, jsou spojité v $b$ i funkce $f + g$ a $fg$. Jsou-li $f$ a $g$ spojité v bodu $b \in M(f/g)$, je spojitá v $b$ i $f/g$.*
2. *Když $f, g \in \mathcal{C}$, pak i $f + g, fg, f/g \in \mathcal{C}$.*

**Důkaz.** 1. Probereme jen podíl $f/g$, součet a součin se řeší podobně. Nechť $f$, $g$ a $b$ jsou, jak uvedeno, & $(a_n) \subset M(f/g)$ má limitu $b$. Podle ekvivalence (H) se $\lim f(a_n) = f(b)$ a $\lim g(a_n) = g(b)$. Díky větě 4.1.2 se

$$\lim (f/g)(a_n) = \lim \tfrac{f(a_n)}{g(a_n)} = \tfrac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \tfrac{f(b)}{g(b)} = (f/g)(b)\,.$$

Podle ekvivalence (H) je tedy $f/g$ spojitá v $b$.

2. Plyne to z první části. □

**Úloha 8.6.2** *Dokažte, že* $\mathrm{POL}, \mathrm{RAC} \subset \mathcal{C}$. *Polynomy a racionální funkce jsou tedy spojité.*

• *Spojitost mocninných řad.* Postupně dokážeme spojitost elementárních funkcí zavedených v oddílech 5.3 a 5.4. Ty, co jsou definované skládáním a invertováním, si necháme na později, nejdřív se musí dokázat zachování spojitosti v těchto operacích. Spojitost exponenciály, kosinu a sinu, které jsou součty mocninných řad, ale plyne hned z věty níže.

**Věta 8.6.3 (spojitost MŘ)** *Nechť pro $(a_n) \subset \mathbb{R}$ máme $\lim |a_n|^{1/n} = 0$. <u>Pak</u> pro každé $x \in \mathbb{R}$ řada $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je abskon a $S(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

**Důkaz.** Nechť $a_n$ jsou, jak je uvedeno, a $x \in \mathbb{R}$. Pak $0 \le |a_n|^{1/n}|x| \le \frac{1}{2}$ pro $n \ge n_0$, takže $|a_n x^n| \le (\frac{1}{2})^n$ pro $n \ge n_0$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je tedy abskon a konverguje. Dále

$$\begin{aligned} |S(x+c) - S(x)| &= |c| \cdot \left| \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c^{i-1} x^{n-i} \right| \\ &\le |c| \cdot \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot (|x| + |c| + 1)^n \to 0, \text{ když } c \to 0\,. \end{aligned}$$

Funkce $S$ je tedy spojitá v bodu $x$. □

**Úloha 8.6.4** *Vysvětlete, proč v předešlém důkazu platí vysazená rovnost a jak se dostane následující nerovnost.*

**Úloha 8.6.5** *Dokažte, že* $\lim (n!)^{1/n} = +\infty$.

**Důsledek 8.6.6 (spojitost** $\exp x$**,** $\cos x$ **a** $\sin x$**)** *Tyto tři funkce jsou spojité na celém* $\mathbb{R}$.

**Důkaz.** Plyne to z definic $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ a $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ a z věty 8.6.3 a úlohy 8.6.5. □

**Důsledek 8.6.7 (spojitost** $\tan x$ **a** $\cot x$**)** *Obě funkce jsou spojité na svých definičních oborech.*

**Důkaz.** Jak víme, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Spojitost těchto funkcí tedy plyne z důsledku 8.6.6 a z věty 8.6.1. □

• *Složené funkce a inverzy.* Připomeňme si skládání funkcí z oddílu 1.3. Pro funkce $f, g \in \mathcal{R}$ jejich složenina $f(g)\colon M(f(g)) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $f(g)(x) = f(g(x))$ a definiční obor $M(f(g)) = \{x \in M(g) : \ g(x) \in M(f)\}$.

**Věta 8.6.8 (spojitost a skládání)** *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}$. *<u>Pak</u> platí následující.*
1. *Je-li $g$ spojitá v $b \in M(f(g))$ a $f$ v $g(b)$, je $f(g)$ spojitá v $b$.*
2. *Když $f, g \in \mathcal{C}$, pak i $f(g) \in \mathcal{C}$.*

**Důkaz.** 1. Nechť $f$, $g$ a $b$ jsou, jak uvedeno, a $(b_n) \subset M(f(g))$ je posloupnost s $\lim b_n = b$. Pak $\lim g(b_n) = g(b)$ podle ekvivalence (H). Tedy, opět podle ekvivalence (H), $\lim f(g)(b_n) = \lim f(g(b_n)) = f(g(b)) = f(g)(b)$. Podle ekvivalence (H) je tedy funkce $f(g)$ spojitá v bodu $b$.

2. Plyne to z první části. □

Operace inverzu spojitost <u>obecně nezachovává</u>. Například funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f(0) = 0$ a $f(n) = \frac{1}{n}$ pro $n > 0$ je spojitá, ale její inverz $0 \mapsto 0$ a $\frac{1}{n} \mapsto n$ není spojitý v 0. Následující věta tak nabývá na důležitosti.

**Věta 8.6.9 (spojitost inverzu)** *Nechť $f \in \mathcal{C}(M)$ je prostá funkce. V každé z následujících pěti situací je její inverz $f^{-1} \in \mathcal{F}(f[M])$ spojitý.*
1. *$M$ je kompaktní množina.*
2. *$M$ je interval.*
3. *$M$ je otevřená množina.*
4. *$M$ je uzavřená množina a funkce $f$ je monotónní.*
5. *$M \subset (a, b)$ je hustá v intervalu $(a, b)$, $f$ je monotónní a stejnoměrně spojitá.*

**Důkaz.** 1. Nechť $M$ je kompaktní, $b \in f[M]$ a $(b_n) \subset f[M]$ má $\lim b_n = b$. Nechť $a = f^{-1}(b)$ a $a_n = f^{-1}(b_n)$ $(\in M)$. Dokážeme, že $\lim a_n = a$, což díky (H) dá spojitost funkce $f^{-1}$ v $b$. Dokážeme, že každá podposloupnost posloupnosti $(a_n)$ má podposloupnost s limitou $a$. Podle části 3 věty 3.2.5 pak je $\lim a_n = a$. Nechť $(a'_n)$ je podposloupnost posloupnosti $(a_n)$. Použijeme kompaktnost $M$ a vezmeme podposloupnost $(a_{m_n})$ v $(a'_n)$ s $\lim a_{m_n} = c \in M$. Podle ekvivalence (H) je $\lim f(a_{m_n}) = f(c) = b$, protože $(f(a_{m_n}))$ je podposloupnost posloupnosti $(b_n)$. Vzhledem k prostotě $f$ se $c = a$.

2. Nechť $M$ je interval. Podle důsledku 8.3.6 $f$ roste nebo klesá. Nechť $f$ klesá, případ rostoucí $f$ je podobný. Podle věty 8.3.1 je $f[M]$ interval. Nechť $b \in f[M]$ a je dáno $\varepsilon$. Ukážeme, že $f^{-1}$ je zprava spojitá v $b$. Je tomu tak, když $b$ je pravý konec intervalu $f[M]$, pak $U^+(b, \delta) \cap f[M] = \{b\}$. Nechť $b$ není pravý konec intervalu $f[M]$. Protože $f^{-1}$ klesá, $a = f^{-1}(b) \in M$ není levý konec intervalu $M$ a búno $\varepsilon$ je tak malé, že $[a - \varepsilon, a] \subset M$. Položíme

$$\delta = f(a - \varepsilon) - f(a) = f(a - \varepsilon) - b > 0 \ .$$

Podle věty 8.3.1 funkce $f$ je (klesající) bijekce z $[a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta]$ a tedy také z $(a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta)$. Tedy $[b, b+\delta) \subset f[M]$ a $U^+(b, \delta) \cap f[M] = U^+(b, \delta) = [b, b+\delta)$. Takže

$$f^{-1}[U^+(b, \delta)] = U^-(a, \varepsilon) \subset U(a, \varepsilon) = U(f^{-1}(b), \varepsilon)$$

a $f^{-1}$ je zprava spojitá v $b$. Spojitost funkce $f^{-1}$ v $b$ zleva se dokáže podobně. Podle úlohy 7.2.10 je $f^{-1}$ v $b$ spojitá.

3. Nechť $M$ je otevřená množina. Nechť $b \in f(M)$, $a = f^{-1}(b)$ $(\in M)$ a je dáno $\varepsilon$. Pro dostatečně malé $\varepsilon$ je $U(a, \varepsilon) \subset M$. Podle tvrzení 8.4.7 je množina $f[U(a, \varepsilon)] \ni b$ otevřená a pro nějaké $\delta$ je $U(b, \delta) \subset f[U(a, \varepsilon)]$. Tedy

$$f^{-1}[U(b, \delta)] \subset U(a, \varepsilon) = U(f^{-1}(b), \varepsilon)$$

a funkce $f^{-1}$ je spojitá v bodu $b$ (podle definice 7.2.1).

4. Nechť $M$ je uzavřená množina a nechť $f$ roste, pro klesající $f$ se argumentuje podobně. Pro spor nechť pro nějaké $b \in f[M]$ s $a = f^{-1}(b)$ $(\in M)$ existuje taková posloupnost $(b_n) \subset f[M]$, že $\lim b_n = b$, ale $\lim f^{-1}(b_n)$ neexistuje nebo se liší od $a$. Podle části 2 věty 3.2.5 a podle tvrzení 3.3.12 má $(b_n)$ takovou klesající nebo rostoucí podposloupnost $(c_n)$, že $\lim f^{-1}(c_n) = B$ $(\in \mathbb{R}^*)$ a $B \neq a$. Předpokládáme, že $(c_n)$ klesá, případ rostoucí $(c_n)$ je podobný. Pak $b < \cdots < c_2 < c_1$, tedy $a < \cdots < f^{-1}(c_2) < f^{-1}(c_1)$ ($f$ i $f^{-1}$ roste).

Podle části 2 věty 4.3.2 je $B \in [a, f^{-1}(c_1))$ a tak, klíčově, $B \in \mathbb{R}$ (zde argument selhává, není-li $f$ monotónní). Dokonce $B \in M$, protože $M$ je uzavřená. Díky spojitosti $f$ v $B$ máme, že $f(B) = \lim f(f^{-1}(c_n)) = \lim c_n = b = f(a)$. To je ale ve sporu s prostotou $f$, protože $B \neq a$.

5. Užijeme tvrzení 8.5.4 a funkci $f$ spojitě rozšíříme do funkce $\overline{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Díky tvrzení 4.3.6 a díky hustotě $M$ v $(a,b)$ je funkce $\overline{f}$ ryze monotónní a tedy je prostá. Podle části 1 nebo části 2 je funkce $(\overline{f})^{-1}$ spojitá. Podle tvrzení 8.1.5 je spojitá i funkce $(\overline{f})^{-1} \mid f[M] = f^{-1}$. □

V tvrzení 9.1.6 předešlou větu dokážeme znovu a část 5 dokonce zobecníme.

**Úloha 8.6.10** *Ukažte na příkladech, že v části 4 předešlé věty nelze ani jeden z obou předpokladů (uzavřenost $M$, monotonie $f$) vynechat.*

• *Elementární funkce.* Dokončíme důkazy jejich spojitosti.

**Úloha 8.6.11** *Dokažte pomocí předešlé věty následující tvrzení.*

**Tvrzení 8.6.12 (spojitost $\log x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ a $\operatorname{arccot} x$)** *Tyto funkce jsou spojité na svých definičních oborech.*

**Tvrzení 8.6.13 (spojitost funkce $x^b$)** *Pro každé pevné $b \in (0, +\infty)$ je funkce $x^b\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ spojitá.*

**Důkaz.** Spojitost v každém bodu $x > 0$ dostáváme z vyjádření $x^b = \exp(b \log x)$, ze spojitosti exponenciály (důsledek 8.6.6) a logaritmu (tvrzení 8.6.12), ze spojitosti konstantní funkce $k_b$ (úloha 8.1.3) a ze spojitosti součinu funkcí (věta 8.6.1) a složené funkce (věta 8.6.8). Spojitost v bodu $x = 0$ plyne pomocí tvrzení 7.2.4 z limity

$$\lim_{x\to 0} x^b = \lim_{x\to 0} \exp(b \log x) = \lim_{y\to -\infty} \exp y = 0 = 0^b\ .$$

Druhá rovnost zde plyne z věty 7.4.1 a z části 2 tvrzení 5.3.8. Třetí plyne z části 3 tvrzení 5.3.5. □

Rekapitulujme spojitost elementárních funkcí.

**Věta 8.6.14 (spojitost EF)** EF $\subset \mathcal{C}$, *každá elementární funkce je spojitá.*

**Důkaz.** Indukce podle generující posloupnosti dané elementární funkce $f$ (definice 5.4.13). Je-li $f$ konstantní funkce, exponenciála, logaritmus, $x^b$ s necelým exponentem $b > 0$, sinus nebo arkus sinus, je spojitá díky, po řadě, úloze 8.1.3, důsledkům 8.6.6 a 8.6.12, tvrzení 8.6.13 a důsledkům 8.6.6 a 8.6.12. Je-li $f$ součet, součin, podíl nebo složenina dvou jednodušších elementárních funkcí, je spojitá díky indukci a větám 8.6.1 a 8.6.8. □

# Kapitola 9

# Limity funkcí, spojitost, kompaktnost

Oddíly 9.1 a **??** se věnují tématům, která literatura o elementární reálné analýze poněkud zanedbává, limitám a spojitosti inverzních a implicitních funkcí. Ve větě 9.1.2 zesílíme definici limity funkce tak, aby limita inverzní funkce vždy existovala. Ve větě 9.1.4

V oddílu 9.3 navážeme na oddíl 7.5 o asymptotickém značení a odvodíme tři asymptotické rozvoje, první dva se škálou $O(n^{-k})$ pro pevné $k \in \mathbb{N}$ a třetí se škálou $O(2^{-kn})$ pro pevné $k \in \mathbb{N}$. Asymptotický rozvoj funkce $\log(n!)$ ve větě 9.3.1 zpřesňuje Stirlingův vzorec a asymptotický rozvoj harmonických čísel $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ ve větě 9.3.2 zpřesňuje jejich klasickou asymptotiku $H_n = \log n + \gamma + O(1/n)$. Tyto dva rozvoje jsou klasické, ale třetí asymptotický rozvoj ve větě 9.3.3

V oddílu 9.4 rozšíříme spojitost funkcí a kompaktnost množin z reálné osy na metrické prostory. Dokážeme Heine–Borelovu větu 9.4.4 o ekvivalenci dvou definic kompaktnosti a odvodíme různé vlastnosti kompaktních množin. V oddílu 9.5 pomocí teorie předchozího oddílu dokážeme ve větě 9.5.1 spojitost závislosti kořenů komplexního polynomu na jeho koeficientech.

## 9.1 Limity a spojitost inverzních funkcí

Na rozdíl od aritmetických operací a skládání, operace invertování nezachovává ani limity ani spojitost funkcí. Limitní chování inverzu je ale jistým způsobem omezeno.

**Tvrzení 9.1.1 (limita inverzu)** *Nechť $f \in \mathcal{R}(M)$ je prostá funkce a existuje limita $\lim_{x\to K} f(x) = L$. Pak platí následující.*

1. *$L$ je limitní bod množiny $f[M]$ a inverz $f^{-1}\colon f[M] \to \mathbb{R}$ má buď limitu $\lim_{y\to L} f^{-1}(y) = K$, anebo tato limita neexistuje.*

*2. Existuje množina $M' \subset M$, že $\lim_{y\to L}(f \mid M')^{-1}(y) = K$.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ je prostá posloupnost s $\lim a_n = K$, $M' := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a nechť $b_n := f(a_n)$. Podle věty 5.2.12 se $\lim b_n = L$. Díky prostotě $f$ je vždy $b_n \in f[M] \setminus \{L\}$, s možnou výjimkou jednoho indexu $n$. Takže $L$ je limitní bod množiny $f[M'] \subset f[M]$. Podle definice čísel $a_n$ a $b_n$ je $\lim f^{-1}(b_n) = K$. Proto podle věty 5.2.12 se $\lim_{y\to L} f^{-1}(y) = K$, anebo tato limita neexistuje. Dokázali jsme tak 1 a 2. □

Předkládáme dvě věty o limitě inverzní funkce. V definici (V) níže zesílíme definici limity $\lim_{x\to K} f(x) = L$ a v první větě dokážeme, že to vynutí existenci inverzní limity $\lim_{y\to L} f^{-1}(y) = K$. (V) požaduje, aby existoval obraz relativního prstencového okolí prvku $K$ obsažený v daném okolí prvku $L$, který současně obsahuje celé relativní prstencové okolí prvku $L$. Nechť tedy $f$ je v $\mathcal{R}(M)$, $K$ je limitní bod množiny $M$ a nechť pro každé $\varepsilon$ existují $\delta$ a $\theta$, že

$$P(L, \theta) \cap f[M] \subset f[P(K, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)\ . \tag{V}$$

Pak píšeme $\lim^{\mathrm{V}}_{x\to K} f(x) = L$ a řekneme, že V-*limita funkce $f$ v $K$ je $L$*. Druhá inkluze ve (V) je jako ve standardní definici limity funkce a první ji zesiluje.

**Věta 9.1.2 (limita inverzu 1)** *Nechť $f \in \mathcal{R}(M)$ je prostá funkce a nechť $\lim^{\mathrm{V}}_{x\to K} f(x) = L$. Pak*

$$\lim_{y\to L} f^{-1}(y) = K\ .$$

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$, $K$ a $L$ jsou, jak uvedeno. Podle předešlého tvrzení je $L$ limitní bod množiny $f[M]$. Ukážeme, že existuje taková funkce $\delta\colon \mathbb{N} \to (0, +\infty)$, že $\lim \delta(n) = 0$ a pro každé $n$ existuje $\theta$, že

$$P(L, \theta) \cap f[M] \subset f[P(K, \delta(n)) \cap M]\ .$$

Pak budeme hotovi: pro dané $\varepsilon$ vezmeme dostatečně velké $n$, že $\delta(n) < \varepsilon$, pro toto $n$ pak vezmeme odpovídající $\theta$ a z inkluzí

$$P(L, \theta) \cap f[M] \subset f[P(K, \delta(n)) \cap M] \subset f[U(K, \varepsilon) \cap M]$$

aplikací injekce $f^{-1}$ dostaneme, že

$$f^{-1}[P(L, \theta) \cap f[M]] \subset U(K, \varepsilon) \cap M \subset U(K, \varepsilon)\ .$$

Tedy $\lim_{y\to L} f^{-1}(y) = K$.

Definujeme funkci $\delta(n)$. Předpokládáme, že platí (V). Vezmeme libovolnou prostou posloupnost $(x_n) \subset M \setminus \{K\}$ s $\lim x_n = K$ a položíme $y_n := f(x_n)$. Podle věty 5.2.12 se $\lim y_n = L$. Protože $f$ je injektivní, můžeme předpokládat, že $(y_n) \subset f[M] \setminus \{L\}$. Pro dané $n \in \mathbb{N}$ vezmeme takové $\varepsilon$, že

$$y_n \notin U(L, \varepsilon)\ .$$

Pro toto $\varepsilon$ existují $\theta$ a $\delta =: \delta(n)$, že platí (V). Pak

$$P(L,\, \theta) \cap f[M] \subset f[P(K,\, \delta(n)) \cap M]$$

a, díky druhé inkluzi ve (V), $x_n \notin P(K, \delta(n))$. Ukážeme, že $\lim \delta(n) = 0$. Buď dáno $\varepsilon$. Vezmeme poslední index $N \in \mathbb{N}$, že $x_N \notin P(K, \varepsilon)$. Protože $n > N \Rightarrow x_n \in P(K, \varepsilon)$, ale $x_n \notin P(K, \delta(n))$ pro každé $n$, platí, že $n > N \Rightarrow \delta(n) < \varepsilon$. Takže $\lim \delta(n) = 0$. □

Přejdeme k naší druhé větě o limitě inverzu. Pro množinu $M \subset \mathbb{R}$ jako

$$\mathcal{L}(M) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \text{ je limitní bod množiny } M\}$$

označíme množinu jejích limitních bodů. Pro relaci $R \subset X \times Y$ mezi množinami $X$ a $Y$ nazveme prvek $x \in X$, resp. $y \in Y$, *izolovaným (vzhledem k $R$)*, pokud neexistuje dvojice $(x, y) \in R$. Nazveme ho *jednoznačným (vzhledem k $R$)*, pokud existuje právě jedna dvojice $(x, y) \in R$.

**Tvrzení 9.1.3 (o relaci $L(f)$)** *Nechť $f \in \mathcal{R}(M)$ je injekce. Relaci $L(f)$ mezi $\mathcal{L}(M)$ a $\mathcal{L}(f[M])$ definujeme tak, že*

$$(A,\, B) \in L(f) \overset{\text{def}}{\iff} \exists \text{ prostá } (a_n) \subset M, \text{ že } \lim a_n = A \text{ a } \lim f(a_n) = B\ .$$

*Pak platí následující.*

1. *Ani jeden prvek v $\mathcal{L}(M)$ a $\mathcal{L}(f[M])$ není vzhledem k $L(f)$ izolovaný.*
2. *Prvek $A \in \mathcal{L}(M)$, resp. $B \in \mathcal{L}(f[M])$, je vzhledem k $L(f)$ jednoznačný, právě když existuje limita*

$$\lim_{x \to A} f(x), \text{ resp. } \lim_{y \to B} f^{-1}(y)\ .$$

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$ a $L(f)$ jsou, jak uvedeno.

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(M)$. Podle tvrzení 5.2.2 vezmeme prostou posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = A$. Z ní vybereme podle části 1 věty 3.2.5 takovou podposloupnost $(a_{m_n})$, že prostá posloupnost $(f(a_{m_n}))$ má limitu $B \in \mathcal{L}(f[M])$. Tedy $(A, B) \in L(f)$ a prvek $A$ není izolovaný. Neizolovanost prvků v $\mathcal{L}(f[M])$ se dokáže úplně stejně, jenom funkci $f$ nahradíme funkcí $f^{-1}$.

2. Nechť prvek $A \in \mathcal{L}(M)$ je vzhledem k $L(f)$ jednoznačný a $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = A$. Kdyby $(f(a_n))$ měla dvě podposloupnosti se dvěma různými limitami, mohli bychom obě vybrat jako prosté a dostali bychom spor s jednoznačností prvku $A$. Podle části 2 věty 3.2.5 vidíme, že posloupnost $(f(a_n))$ má limitu $B \in \mathcal{L}(f[M])$. Rovněž vidíme, že $B$ nezávisí na volbě posloupnosti $(a_n)$. Podle věty 5.2.12 tak existuje limita

$$\lim_{x \to A} f(x) = B\ .$$

Nechť naopak existuje tato limita. Podle věty 5.2.12 se lehce vidí, že prvek $A$ je jednoznačný vzhledem k $L(f)$, protože $(A, B)$ je jediná dvojice $(A, \cdot) \in L(f)$.

Pro limitní bod $B \in \mathcal{L}(f[M])$ postupujeme úplně stejně, jenom funkci $f$ nahradíme funkcí $f^{-1}$. □

**Věta 9.1.4 (limita inverzu 2)** *Nechť $f$, $M$ a $L(f)$ jsou jako v předešlém tvrzení. Nechť pro každý prvek $A \in \mathcal{L}(M)$ existuje limita $\lim_{x\to A} f(x)$. Pak relace $L(f)$ je surjektivní funkce*

$$L(f)\colon \mathcal{L}(M) \to \mathcal{L}(f[M]) \ .$$

*Je-li tato funkce prostá, pak pro každý prvek $B \in \mathcal{L}(f[M])$ existuje limita*

$$\lim_{y\to B} f^{-1}(y) = L(f)^{-1}(B) \ .$$

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$ a $L(f)$ jsou, jak uvedeno. Protože pro každé $A \in \mathcal{L}(M)$ existuje limita $\lim_{x\to A} f(x)$, podle části 2 předešlého tvrzení je $L(f)$ funkce. Podle části 1 je na. Je-li $L(f)$ prostá, je každý prvek $B \in \mathcal{L}(f[M])$ jednoznačný vzhledem k $L(f)$ a opět použijeme část 2 předešlého tvrzení. □

Uvedeme a dokážeme analogii předešlé věty pro bodovou spojitost funkcí. Pomocí této analogie znovu dokážeme uniformním způsobem větu 8.6.9, jejíž pátou část zobecníme. Nejprve ale definujeme hraniční body a relaci $H(f)$, analogickou relaci $L(f)$. Prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je *hraničním bodem množiny* $M \subset \mathbb{R}$, pokud $\lim a_n = A$ pro nějakou posloupnost $(a_n) \subset M$. Pro

$$\mathcal{H}(M) := \{A \in R^* \mid A \text{ je hraniční bod množiny } M\}$$

se

$$\mathcal{H}(M) = \mathcal{L}(M) \cup \{\text{izolované body množiny } M\} \ ,$$

takže $M \subset \mathcal{H}(M)$. Nechť $f \in \mathcal{R}(M)$ je injekce. Relaci $H(f)$ mezi množinami $\mathcal{H}(M)$ a $\mathcal{H}(f[M])$ definujeme tak, že

$$(A,\, B) \in H(f) \overset{def}{\iff} \exists\ (a_n) \subset M, \text{ že } \lim a_n = A \text{ a } \lim f(a_n) = B \ .$$

**Věta 9.1.5 (spojitost inverzů 2)** *Nechť $f \in \mathcal{R}(M)$ je injekce a relace $H(f)$ je jako výše. Platí následující.*

1. *Ani jeden prvek v $\mathcal{H}(M)$ a $\mathcal{H}(f[M])$ není vzhledem k $H(f)$ izolovaný.*
2. *Prvek $A \in \mathcal{H}(M)$ je vzhledem k $H(f)$ jednoznačný, právě když $f$ je spojitá v $A \in M$ nebo má spojité rozšíření do $A \in \mathbb{R} \setminus M$ nebo, pro $A = \pm\infty$, existuje limita $\lim_{x\to A} f(x)$.*
3. *Prvek $B \in \mathcal{H}(f[M])$ je vzhledem k $H(f)$ jednoznačný, právě když $f^{-1}$ je spojitá v $B \in f[M]$ nebo má spojité rozšíření do $B \in \mathbb{R} \setminus f[M]$ nebo, pro $B = \pm\infty$, existuje limita $\lim_{y\to B} f^{-1}(y)$.*
4. *Nechť $f$ je spojitá funkce. Pak*

   $$H(f) \,|\, M := H(f) \cap (M \times \mathcal{H}(f[M])) = f \ .$$

   *Inverz $f^{-1}$ je potom spojitý, pokud platí podmínka, že*

   $$\text{pro žádné } b \in f[M] \text{ neexistuje } A \in \mathcal{H}(M) \setminus M \text{ s } (A, b) \in H(f). \qquad \text{(J)}$$

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$ a $H(f)$ jsou, jak uvedeno.

1. Nechť $A \in \mathcal{H}(M)$ a nechť $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = A$. Podle části 1 věty 3.2.5 z ní vybereme podposloupnost $(a_{m_n})$, pro níž má $(f(a_{m_n}))$ limitu $B \in \mathcal{H}(f[M])$. Pak $(A, B) \in H(f)$ a prvek $A$ není vzhledem k $H(f)$ izolovaný. Podobně argumentujeme pro $B \in \mathcal{H}(f[M])$, pouze funkci $f$ nahradíme jejím inverzem.

2. Nechť prvek $A \in \mathcal{H}(M)$ je jednoznačný vzhledem k $H(f)$. Pokud $A \in M$, znamená to, že pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = A$ má $(f(a_n))$ limitu $f(A)$ a $f$ je spojitá v $A$ (tvrzení 7.2.4). Pokud $A \in \mathbb{R} \setminus M$, funkce $f$ má spojité rozšíření do $A$. Pokud $A = \pm\infty$, pak existuje limita $\lim_{x \to A} f(x)$ (věta 5.2.12).

Nechť naopak se prvek $f$ v $A \in \mathcal{H}(M)$ limitně chová popsaným způsobem (spojitost nebo spojité rozšíření nebo existence limity). Podle tvrzení 7.2.4 a věty 5.2.12 je $A$ jednoznačný vzhledem k $H(f)$.

Pro prvek $B \in \mathcal{H}(f[M])$ argumentujeme stejně, pouze funkci $f$ nahradíme jejím inverzem a množinu $M$ nahradíme jejím obrazem v $f$.

3. Nechť $f \in \mathcal{C}$ a $b \in M$. Pak pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ má $(f(a_n))$ limitu $f(b)$ (tvrzení 7.2.4) a jediná dvojice $(b, \cdot) \in H(f)$ tedy je $(b, f(b))$. Závěrečná implikace (J) $\Rightarrow$ spojitost $f^{-1}$ je jasná díky části 2. $\square$

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je *bezděrová*, pokud pro každé $a < b$ v $M$ existuje $c \in M$ s $a < c < b$. Zde je slíbený nový důkaz věty 8.6.9 se zobecněnou pátou částí.

**Tvrzení 9.1.6 (spojitost inverzů uniformně)** *Nechť $f \in \mathcal{C}(M)$ je prostá funkce. V každé z pěti následujících situací je inverz $f^{-1}\colon f[M] \to \mathbb{R}$ spojitý.*

1. *$M$ je kompaktní množina.*
2. *$M$ je interval.*
3. *$M$ je otevřená množina.*
4. *$M$ je uzavřená množina a funkce $f$ je monotónní.*
5. *$M$ je bezděrová množina a funkce $f$ je monotónní.*

**Důkaz.** Nechť $f$ a $M$ jsou, jak uvedeno. Podle části 3 předešlé věty potřebujeme dokázat, že za každého předpokladu $i \in [5]$ platí v části 3 uvedená podmínka (J).

1. Pro kompaktní množinu $M$ je platnost (J) jasná díky části 3 předešlé věty a tomu, že $\mathcal{H}(M) = M$.

2. Nechť $M$ je interval. Kdyby (J) neplatila, pak bychom pro nějakou prostou posloupnost $(a_n) \subset M$ a číslo $a \in M$ měli, že

$$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^* \setminus M \wedge \lim f(a_n) = b = f(a)\ .$$

Nechť $a < A$, případ $a > A$ se řeší podobně. Není těžké vidět, že existují dva různé indexy $m$ a $n$, že $a < a_m < a_n$ a buď $f(a_m) < f(a_n) < b$, anebo $b <$

$f(a_n) < f(a_m)$. Nechť $c$ je libovolné číslo mezi $f(a_n)$ a $f(a_m)$. Podle věty 8.3.1 je $c$ hodnotou $f$ na intervalu $(a, a_m)$ i na intervalu $(a_m, a_n)$, ve sporu s prostotou.

3. Podobně jako ve 2 předpokládáme pro spor, že $M$ je otevřená množina a že existuje posloupnost $(a_n) \subset M$ a číslo $a \in M$ s

$$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^* \setminus M \wedge \lim f(a_n) = b = f(a) \ .$$

Opět búno $a < A$. Díky tvrzení 8.4.8 existuje číslo $a' < a$, že $a \in (a', A) =: I \subset M$, ať $A \in \mathbb{R}$ či $A = +\infty$. Funkci $f$ zúžíme na $I$ a spor dostaneme stejným způsobem jako v části 2.

4. Opět předpokládáme pro spor, že $M$ je uzavřená množina, že funkce $f$ je například klesající a že existuje posloupnost $(a_n) \subset M$ a číslo $a \in M$ s

$$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^* \setminus M \wedge \lim f(a_n) = b = f(a) \ .$$

Protože $M$ je uzavřená, je například $A = -\infty$ (další tři možnosti s rostoucí $f$ a/nebo $A = +\infty$ se řeší podobně). Vidíme, že $(f(a_n)$ jde k $b$ zdola. Tedy existuje index $n$ s $a_n < a$ a $f(a_n) < b = f(a)$. To ale je ve sporu s tím, že $f$ klesá.

5. Opět předpokládáme pro spor, že $M$ je bezděrová množina, že funkce $f$ je například klesající a že existuje posloupnost $(a_n) \subset M$ a číslo $a \in M$ s

$$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^* \setminus M \wedge \lim f(a_n) = b = f(a) \ .$$

Búno $A < a$ (další tři možnosti s rostoucí $f$ a/nebo $A > a$ se řeší podobně). Hned vidíme, že existuje index $n$ a číslo $a' \in M$, že $a_n < a' < a$ & $f(a_n) < f(a') > f(a) = b$. To ale je ve sporu s tím, že $f$ klesá. □

V části 5 věty 8.6.9 je $M \subset (a, b)$ a je hustá v intervalu $(a, b)$. Taková $M$ je bezděrová a jde tak o speciální případ zdejší páté části. Stejnoměrná spojitost $f$ tam je tzv. „red herring“.

## 9.2 Arnoldova limita

V [7, str. 21] V. I. Arnold (o němž je více v podpříloze C.1) píše:

> Zde je příklad úlohy, kterou by lidé jako Barrow, Newton či Huygens vyřešili za pár minut a kterou podle mého názoru současní matematici nejsou schopni rychle vyřešit (rozhodně jsem neviděl matematika, který by se s ní dokázal rychle vypořádat): vypočítejte
>
> $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)} \ . \qquad \text{(AL)}$$

Arnoldovo řešení [7, str. 85] je:

> Pokud se grafy dvou různých analytických funkcí $f$ a $g$ dotýkají přímky $y = x$ v nule (obr. 37), pak poměry $|AB|/|BC|$ a $|BC|/|ED|$ jdou k jedné, když $A$ jde k nule. Proto se hledaná limita poměru $|AB|/|D'E'|$ rovná jedné.

Zde je Arnoldův obrázek 37:

$\vdots$

Obrázku odpovídá následující věta.

**Věta 9.2.1 (obecná Arnoldova limita)** *Nechť*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ ,$$

*jsou dvě (různé) reálné mocninné řady, které konvergují v okolí nuly a pro nějaké indexy $m \geq n \geq 2$ mají koeficienty*

$$\begin{aligned} &a_0 = b_0 = 0,\ a_1 = b_1 = 1,\ a_2 = b_2 = 0,\ \ldots,\ a_{n-1} = b_{n-1} = 0, \\ &a_n > b_n \geq 0,\ b_n = \cdots = b_{m-1} = 0,\ b_m > 0\ . \end{aligned}$$

*Potom odpovídající funkce a jejich inverzy mají limitu*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{g^{-1}(x) - f^{-1}(x)} = 1\ .$$

**Důkaz.** Nechť $f$ a $g$ jsou, jak uvedeno,

$$f,\ g\colon U(0,\delta) \to \mathbb{R}$$

a $x \in (0,\delta)$. Potom $|AB| = f(x) - g(x) > 0$, $|BC| = x - f^{-1}(g(x))$ a $|DE| = |D'E'| = g^{-1}(x) - f^{-1}(x)$. □

## 9.3 Tři asymptotické rozvoje

**Věta 9.3.1 (jemný Stirlingův vzorec)** *Pro každé pevné $k \in \mathbb{N}$ platí pro $n$ v $\mathbb{N}$ asymptotika*

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{\log n}{2} + \frac{\log(2\pi)}{2} + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}}{(2j-1)2j \cdot n^{2j-1}} + O(n^{-2k-1})\ ,$$

*kde $B_{2j}$ jsou Bernoulliova čísla.*

**Věta 9.3.2 (jemná asymptotika pro $H_n$)** *Pro každé pevné $k \in \mathbb{N}$ platí pro $n \in \mathbb{N}$ asymptotika*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}}{2j \cdot n^{2j}} + O(n^{-2k-2})\ ,$$

*kde $B_{2j}$ jsou Bernoulliova čísla.*

**Věta 9.3.3 (pravděpodobnost souvislosti)** *Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pravděpodobnost, že označený graf $G = ([n], E)$ je souvislý, má pro $n \in \mathbb{N}$ asymptotiku*

$$\Pr(G \text{ je souvislý}) = 1 - \sum_{j=1}^{k} \mathrm{it}_j \binom{n}{j} \frac{2^{j(j+1)/2}}{2^{jn}} + O(2^{-(k+1)n}) \ ,$$

*kde $\mathrm{it}_j$ je počet ireducibilních turnajů na $[j]$.*

## 9.4 Topologická spojitost a kompaktnost

Reálná čísla $\mathbb{R}$ a vzdálenosti $|x - y|$ mezi nimi jsou zobecněny následující strukturou.

**Definice 9.4.1 (metrické prostory)** *Metrický prostor $M$, krátce* MP*, je každá uspořádaná dvojice $(M, d)$ neprázdné množiny $M$ a zobrazení $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ zvaného metrika (vzdálenost), která splňuje tři následující axiomy ($x, y, z \in M$).*

- $d(x, y) \geq 0$ *a* $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

*Poslední nerovnosti se říká trojúhelníková nerovnost.*

Nezápornost metriky v prvním axiomu se dá odvodit z ostatních axiomů.

Nechť $(M, d)$ je MP, $a \in M$ a $r > 0$ je reálné číslo. *(Otevřená) koule (se středem $a$ a poloměrem $r$)* je množina

$$B(a, r) := \{b \in M \mid d(a, b) < r\} \ .$$

Jako

$$\overline{B}(a, r) := \{b \in M \mid d(a, b) \leq r\}$$

označíme *uzavřenou kouli (se středem $a$ a poloměrem $r$).*

**Definice 9.4.2 (otevřené a uzavřené množiny)** *$(M, d)$ buď* MP*. Řekneme, že množina $A \subset M$ je otevřená, pokud*

$$\forall\, a \in A\ \exists\, r > 0 \left(B(a, r) \subset A\right) \ .$$

*Množina $A$ je uzavřená, je-li množina $M \setminus A$ otevřená.*

**Věta 9.4.3 (princip minima a maxima v MP)** *Nechť $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina v* MP*u $(M, d)$ a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existují takové body $a, b \in X$, že*

$$\forall\, x \in X \left(f(a) \leq f(x) \leq f(b)\right) \ .$$

*Řekneme, že $f$ nabývá na $X$ v $a$ minimum (svou nejmenší hodnotu) $f(a)$ a že $f$ nabývá na $X$ v $b$ maximum (svou největší hodnotu) $f(b)$.*

**Věta 9.4.4 (Heine–Borelova věta)** *Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $(M, d)$ je sekvenčně kompaktní, právě když její každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí.*

**Důkaz.**

□

**Důsledek 9.4.5 (Heine–Borelova věta v $\mathbb{R}$)** *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, právě když každý systém $\{U_i \mid i \in I\}$ otevřených množin $U_i \subset \mathbb{R}$ pokrývající množinu $M$, to jest*

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supset M \ ,$$

*má konečný podsystém $J \subset I$, který stále pokrývá $M$, to jest*

$$\bigcup_{i \in J} U_i \supset M \ .$$

**Důkaz.**

□

## 9.5 Spojitost kořenů polynomu

Budeme pracovat s komplexními *monickými* polynomy

$$p(z) = z^n + \sum_{j=1}^{n} a_j z^{n-j}, \ a_j \in \mathbb{C} \ ,$$

stupně $n \in \mathbb{N}_0$. Je-li $q(z) = z^n + \sum_{j=1}^{n} b_j z^{n-j}$ jiný takový polynom a $\delta > 0$, řekneme, že $q(z)$ je *$\delta$-blízký* $p(z)$, pokud

$$\forall\, j \in [n] \left( |a_j - b_j| < \delta \right) \ .$$

Tato relace na komplexních monických polynomech téhož stupně je reflexivní a symetrická.

**Věta 9.5.1 (spojitost kořenů)** *Pro každý komplexní monický polynom $p(z)$ se stupněm $n > 0$ a každé $\varepsilon$ existuje takové $\delta$, že kořeny každého komplexního monického polynomu se stupněm $n$, který je $\delta$-blízký polynomu $p(z)$, jsou permutačně $\varepsilon$-blízké kořenům polynomu $p(z)$.*

## 9.6 Zobecnění Blumbergovy věty

**Věta 9.6.1 (obecná Blumbergova věta)** *Metrický prostor je Blumbergův prostor, právě když je Baireovým prostorem.*

**Důkaz.**

□

## 9.7 Každá vyčíslitelná reálná funkce je spojitá

# Kapitola 10

# Přednáška 7. Derivace funkcí

V sedmé přednášce jsem uvedl na scénu derivace. Přednesl jsem ji 4. 4. 2024 jako

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred7.pdf`.

Zde je rozšířena. Jsou přidány důkazy vzorců pro derivaci složené funkce a derivaci inverzní funkce a odvození derivací základních elementárních funkcí.

V oddílu 10.1 definujeme obyčejné i jednostranné derivace pro zcela obecné funkce. V literatuře se často, i když ne vždy, předpokládá, že funkce je definovaná na nějakém okolí uvažovaného bodu nebo dokonce na nějakém netriviálním intervalu. Věta 10.1.7 je verze známé nutné podmínky pro existenci lokálního extrému v naší obecné situaci. Diferencovatelnost funkce implikuje její spojitost v daném bodu (tvrzení 10.1.10), ale i to, že funkční hodnota je limitním bodem oboru hodnot funkce (tvrzení 10.1.13 a úloha 10.1.15). Tvrzení 10.1.20 uvádí příklad nespojité derivace.

Oddíl 10.2 začneme standardní definicí 10.2.1 tečny a v definici 10.2.7 zavedeme limitní tečny. To je formalizace intuice tečny v bodu $B \in G_f$ jako limity posloupnosti sečen procházejících $B$ a dalšími body v grafu $G_f$. Věta 10.2.9 dokazuje ekvivalenci obou definic. Ve větě 10.2.11 ukážeme, že lze vzít sečny procházející dvojicemi bodů v $G_f$ s členy oddělenými bodem $B$. K tečnám se vrátíme v oddílu 13.1.

Oddíl 10.3 se zabývá aritmetikou derivací. Důsledek **??** popisuje derivaci lineární kombinace. Uvědomuje si čtenářka, že obecně $(f+g)' \neq f'+g'$ (úloha **??**)? Věta 10.3.3, resp. **??**, obsahuje ve dvou částech známý Leibnizův vzorec pro derivaci součinu, resp. vzorec pro derivaci podílu.

Oddíl 10.4 se zabývá derivacemi složených a inverzních funkcí. Vzorec pro bodovou derivaci složené funkce dokážeme ve větě **??** a pro bodovou derivaci inverzní funkce ve větě 10.4.4. Vždy se předpokládá jen to, že daný bod je limitní pro definiční obor. Ten je libovolný, neomezujeme se na intervaly, jak je

obvyklé. V oddílu 10.5 odvodíme vzorce pro derivace základních elementárních funkcí (viz definice **??**). Speciální i obecné derivační vzorce shrnují dvě závěrečné tabulky.

## 10.1 Derivace a lokální extrémy

• *Derivace funkce v bodu.* Následující definice je základní. Jak jsme prozradili už v úvodu, v literatuře není zdaleka stabilizovaná. To u tak základní definice docela překvapuje.

**Definice 10.1.1 (derivace v bodu)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a bod $b \in M \cap L(M)$. Derivace funkce $f$ v bodu $b$ je limita*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \quad (\in \mathbb{R}^*)\,,$$

*když existuje. Značíme ji jako $f'(b)$ nebo jako $\frac{df}{dx}(b)$.*

**Úloha 10.1.2** *Jak dokážete rovnost $(*)$?*

Když $f'(b) \in \mathbb{R}$, řekneme, že funkce $f$ je v bodu $b$ diferencovatelná. Pak má u $b$ lokální aproximaci lineární funkcí, zvanou tečna:

$$f(x) = \underbrace{f(b) + f'(b)\cdot(x-b)}_{\text{tečna}} + \underbrace{o(x-b)}_{\text{chyba}} \quad (x \to b)\,.$$

**Tvrzení 10.1.3 (Heineho definice derivace)** *Nechť funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ a bod $b \in L(M) \cap M$. Potom $f'(b) = B \iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ s $\lim a_n = b$ se $\lim \frac{f(a_n)-f(b)}{a_n-b} = B$.*

**Důkaz.** Plyne to z definice 10.1.1 a věty 5.2.12. □

Pokud v $b \in M(f)$ existuje $f'(b)$, implicitně i $b \in L(M(f))$.

• *Jednostranné derivace.* Definují se pomocí jednostranných limit. Nechť $f$ je v $\mathcal{F}(M)$ a $b \in L^-(M) \cap M$. Potom limitu $f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ $(\in \mathbb{R}^*)$ nazveme levou derivací (či derivací zleva) funkce $f$ v bodu $b$. Změnou znaménka $^-$ na znaménko $^+$ dostaneme pravou derivaci (či derivaci zprava) $f'_+(b)$ funkce $f$ v bodu $b$.

**Úloha 10.1.4** *Platí následující.*
1. $f'(a) = L \Rightarrow f'_-(a) = L$ *nebo* $f'_+(a) = L$.
2. $f'_-(a) = f'_+(a) = L \Rightarrow f'(a) = L$.
3. $f'_-(a) = K \neq L = f'_+(a) \Rightarrow f'(a)$ *neexistuje.*

**Úloha 10.1.5** *Jako v tvrzení 7.1.13 o limitách funkcí i jednostranná derivace funkce se dá pomocí zúžení funkce převést na obyčejnou derivaci. Konkrétně to zformulujte a dokažte to.*

• *Derivace a extrémy.* Teď si zahraje dřívější definice oboustranných limitních bodů množiny $M \subset \mathbb{R}$, zkratkou OLB ($a$ je OLB množiny $M$, právě když $\forall\, \delta\, \big(P^-(a,\delta) \cap M \neq \emptyset \wedge P^+(a,\delta) \cap M \neq \emptyset\big)$), jejichž množina je označená jako $L^{\pm}(M)$ ($\subset \mathbb{R}$).

**Úloha 10.1.6** *Každý* OLB *množiny $M$ je jejím limitním bodem. Naopak to obecně neplatí.*

Známý výsledek o vztahu derivací a extrémů upravíme pro naši derivaci.

**Věta 10.1.7 (derivace a extrémy)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L^{\pm}(M)$ a nechť $f'(b)$ ($\in \mathbb{R}^*$) existuje a není 0. <u>Potom</u> v $b$ funkce $f$ nemá lokální extrém, takže pro každé $\delta$ existují body $c, d \in U(b,\delta) \cap M$ s $f(c) < f(b) < f(d)$.*

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$ a $b$ jsou, jak je uvedeno, a je dáno $\delta$. Nechť $f'(b) < 0$, případ s $f'(b) > 0$ je podobný. Vezmeme tak malé $\varepsilon$, že $U(f'(b),\varepsilon) < \{0\}$. Podle definice 10.1.1 existuje $\theta \leq \delta$, že

$$x \in P(b,\,\theta) \cap M \Rightarrow D = \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \in U(f'(b),\,\varepsilon) \Rightarrow D < 0\,.$$

Pro tato $x < b$ je $f(x) > f(b)$, protože $x - b < 0$ a $D < 0$. Podobně pro tato $x > b$ je $f(x) < f(b)$. Vezmeme jakékoli

$$c \in P^+(b,\,\theta) \cap M \;\text{ a }\; d \in P^-(b,\,\theta) \cap M\,.$$

Prvky $c$ a $d$ existují, protože $b \in L^{\pm}(M)$. Tedy $c, d \in U(b,\delta) \cap M$ a $f(c) < f(b) < f(d)$. □

**Úloha 10.1.8** *Funkce $f(x) = x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ má v 0 ostré globální minimum a v 1 ostré globální maximum a přitom má nenulové derivace $f'(0) = f'(1) = 1$. Není to v rozporu s větou?*

Předešlou větu vyřkneme ještě jednou ekvivalentně, obměnou implikace, v její známější podobě <u>nutné podmínky existence lokálního extrému</u>.

**Věta 10.1.9 (NPELE)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M$ a nechť $f$ má v $b$ lokální extrém. <u>Potom</u> $b \notin L^{\pm}(M)$ nebo $f'(b)$ neexistuje nebo $f'(b) = 0$.*

Funkce $f \in \mathcal{R}$ tak může mít lokální, tedy i globální, extrémy jen v následující množině „podezřelých“ bodů.

$$\underline{\mathrm{SUSP}}(f) = \{b \in M(f) :\; b \notin L^{\pm}(M) \vee \neg\,\exists\, f'(b) \vee f'(b) = 0\} \;\; (\subset M(f))\,.$$

• *Derivace a spojitost.* Diferencovatelnost funkce zesiluje bodovou spojitost.

**Tvrzení 10.1.10 (derivace a spojitost)** *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je spojitá v každém bodu $b \in M(f)$, kde existuje vlastní derivace $f'(b)$.*

**Důkaz.** Nechť $f \in \mathcal{R}$, $b \in M(f)$ a existuje $f'(b) \in \mathbb{R}$. Tedy $b \in L(M(f))$ a podle AL funkcí se

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} \left(f(b) + (x-b)\cdot \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\right) = f(b) + 0\cdot f'(b) = f(b)\,.$$

Podle tvrzení 7.2.4 je funkce $f$ spojitá v $b$. □

**Úloha 10.1.11** *Dokažte, že* $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$. *Existence nevlastní derivace tak neimplikuje spojitost funkce v daném bodě.*

**Úloha 10.1.12** *Dokažte, že* $(|x|)'_-(0) = -1$ *a* $(|x|)'_+(0) = +1$. *Podle části 3 úlohy 10.1.4 tedy* $(|x|)'(0)$ *neexistuje. Spojitost v bodu tak samozřejmě nezaručuje existenci derivace.*

Nenulová derivace v bodu dává kromě věty 10.1.7 i následující výsledek, který se bude hodit pro derivování inverzní funkce.

**Tvrzení 10.1.13 (limitní body oboru hodnot)** *Nechť* $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M$ *a existuje nenulová vlastní derivace* $f'(b)$. *<u>Pak</u>* $f(b) \in L(f[M])$.

**Důkaz.** Nechť $f$ a $b \in M \cap L(M)$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. Díky $f'(b) \neq 0$ dle definice 10.1.1 existuje $\delta$, že pro každé $x \in P(b,\delta)\cap M$ je $f(x) \neq f(b)$. Podle tvrzení 10.1.10 lze vzít tak malé $\delta$, že pro tato $x$ je také $f(x) \in U(f(b),\varepsilon)$. Protože $b \in L(M)$, lze vzít $a \in P(b,\delta)\cap M$. Pak $f(a) \in P(f(b),\varepsilon)\cap f[M]$. Tedy $f(b) \in L(f[M])$. □

**Úloha 10.1.14** *Když se* $f'(b) = \pm\infty$, *pak toto tvrzení nemusí platit.*

**Úloha 10.1.15** *Tvrzení platí i pro* $f'(b) = 0$, *pokud* $f$ *není konstantní na žádném okolí* $U(b,\delta)\cap M$.

• *Příklady derivací.* Zderivujeme funkci $\sqrt{x}$ ($\in \mathcal{F}([0,+\infty))$). Nechť $a \geq 0$. Pak

$$(\sqrt{x})'(a) = \lim_{x\to a} \tfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \tfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \tfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\,.$$

Pro $a > 0$ se $(\sqrt{x})'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ a $(\sqrt{x})'(0) = +\infty$. Nevlastní derivace je tedy slučitelná se spojitostí funkce v daném bodě.

**Úloha 10.1.16** *Pro každé* $a \geq 0$ *spočítejte* $(\sqrt{x})'_-(a)$ *i* $(\sqrt{x})'_+(a)$.

**Úloha 10.1.17 (derivace konstant)** *Pro každé* $c \in \mathbb{R}$ *se* $k'_c = k_0$.

• *Derivace jako unární operace na* $\mathcal{R}$. Připomínáme, že $\mathcal{F}(M)$ s $M \subset \mathbb{R}$ je množina všech funkcí $f$ typu $f\colon M \to \mathbb{R}$. Z bodových hodnot derivace funkce složíme novou funkci.

**Definice 10.1.18 (derivace funkce)** *Pro $f \in \mathcal{F}(M)$ nechť $\underline{D(f)} = \{b \in M : \exists\, f(b) \in \mathbb{R}\}$ $(\subset L(M) \cap M)$. Funkci $f' \in \mathcal{F}(D(f))$ s hodnotami $f'(b) = \frac{df}{dx}(b)$ nazveme <u>derivací</u> funkce $f$.*

Derivace může mít menší definiční obor než původní funkce. Například $M(\sqrt{x}) = [0, +\infty)$, ale $D(\sqrt{x}) = M((\sqrt{x})') = M(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = (0, +\infty)$.

**Úloha 10.1.19** *Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}$ je zúžení $f \mid D(f)$ spojité.*

• *Funkce s nespojitou derivací.* Sestrojíme funkci $f \in \mathcal{R}$, že $f' \notin \mathcal{C}$. Nechť posloupnosti $a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > 0$ mají limitu $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $a_n - b_n = o(b_n)$ $(n \to \infty)$. Nechť $N = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(b_n, a_n)$ a nechť funkce $f \in \mathcal{F}(N)$ má hodnoty $f(0) = 0$ a $f(x) = x - b_n$ pro $x \in (b_n, a_n)$.

**Tvrzení 10.1.20 (nespojitá derivace)** *<u>Pak</u> je $f' \in \mathcal{F}(N) \setminus \mathcal{C}$, neboť $f'(0) = 0$, jinak $f'(x) = 1$ a $0 \in L(N)$.*

**Důkaz.** Pro $x \in (b_n, a_n)$ se $f'(x) = (x - b_n)' = 1$. Ale $0 \in L(N)$ a $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, neboť pro $x \in (b_n, a_n)$ je $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{a_n - b_n}{b_n} \to 0$ $(n \to \infty)$. □

**Úloha 10.1.21** *Proč se $\lim \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$?*

## 10.2 Standardní a limitní tečny

Definujeme tečnu ke grafu funkce $f \in \mathcal{R}$ v jeho bodu $(b, f(b))$. <u>Graf funkce $f$</u> je množina bodů v rovině $\underline{G_f} = \{(x, f(x)) : x \in M(f)\}$ $(\subset \mathbb{R}^2)$. Podle naší definice funkce se $f$ a $G_f$ prakticky shodují.

• *Standardní tečny.* Ty už jsme zmínili v souvislosti s diferencovatelností funkce v bodu definičního oboru.

**Definice 10.2.1 (standardní tečna)** *Nechť funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je diferencovatelná v $b \in M \cap L(M)$. <u>Tečnou</u> k jejímu grafu v bodě $(b, f(b))$ rozumíme přímku $\ell$ $(\subset \mathbb{R}^2)$ danou rovnicí $y = f'(b) \cdot (x - b) + f(b)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Tečna má sklon $f'(b)$ $(\in \mathbb{R})$ a prochází bodem $(b, f(b))$.

**Úloha 10.2.2** *$f$ a $b$ buďte jako v definici. Pak funkce $x \mapsto f'(b) \cdot (x - b) + f(b)$ je jediná lineární funkce aproximující $f$ u $b$ s přesností $o(x - b)$ $(x \to b)$.*

**Úloha 10.2.3** *Napište rovnici tečny ke grafu funkce $\sqrt{x}$ v bodě $(a, \sqrt{a})$.*

O tečnách se často říká, že jsou nějakými limitami sečen, to jest přímek jdoucích dvěma body grafu. Nikdy se už ale neřekne, jakými vlastně. Pojďme to teď říci.

• *Nesvislé přímky.* Podle geometrie roviny každá nesvislá přímka $\ell$ má jednoznačné vyjádření $\ell = \{(x, sx + t) : x \in \mathbb{R}\}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Číslo $s$ nazveme jejím <u>sklonem</u>. Nechť $\underline{\mathcal{N}}$ $(\subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$ je množina nesvislých přímek v rovině.

**Úloha 10.2.4** *Funkce $p\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^2$, daná jako $p(\ell) = (p_1(\ell),\, p_2(\ell)) = (s,\, t)$, je bijekce z množiny $\mathcal{N}$ nesvislých přímek do množiny $\mathbb{R}^2$.*

**Definice 10.2.5 (limity v $\mathcal{N}$)** *Pro $(\ell_n) \subset \mathcal{N}$ a $\ell \in \mathcal{N}$ píšeme $\underline{\lim \ell_n = \ell}$, právě když $\lim p_1(\ell_n) = p_1(\ell)$ a $\lim p_2(\ell_n) = p_2(\ell)$.*

**Úloha 10.2.6** *Nechť $A = (a, b)$ a $A' = (a', b')$ jsou v $\mathbb{R}^2$ & $a \neq a'$. Pak existuje jediná přímka $\ell \in \mathcal{N}$, že $A \in \ell$ i $A' \in \ell$. Tato přímka $\ell$ má sklon $\frac{b'-b}{a'-a}$.*

Přímku $\ell \in \mathcal{N}$ jdoucí body $A$ a $A'$ označíme jako $\underline{\kappa(A, A') = \kappa(a, b, a', b')}$. Leží-li body $A$ a $A'$ na grafu funkce, mluvíme o $\ell$ jako o <u>sečně</u> tohoto grafu.

• *Limitní tečny.* Předkládáme rigorózní definici tečny ke grafu funkce v podobě limity posloupnosti sečen.

**Definice 10.2.7 (limitní tečna)** *Nechť je funkce $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L(M)$ a $\ell \in \mathcal{N}$. Pokud pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ s $\lim a_n = b$ platí ve smyslu definice 10.2.5, že*

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(b,\, f(b),\, a_n,\, f(a_n)) = \ell\,,$$

*nazveme přímku $\ell$ <u>limitní tečnou</u> ke $G_f$ v bodu $(b, f(b))$.*

V této definici tečny nepotřebujeme hodnotu derivace $f'(b)$.

**Úloha 10.2.8** *Když $\ell$ je limitní tečna ke $G_f$ v bodu $(b, f(b))$, pak $(b, f(b)) \in \ell$.*

Dokážeme, že pojmy standardní tečny a limitní tečny splývají.

**Věta 10.2.9 (tečna $\iff$ lim. tečna)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L(M)$ a $\ell$ je v $\mathcal{N}$. <u>Potom</u> $\ell$ je tečna ke $G_f$ v bodu $(b, f(b))$ ve smyslu definice 10.2.1 $\iff$ $\ell$ je limitní tečna ke $G_f$ v bodu $(b, f(b))$ ve smyslu definice 10.2.7.*

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$, $b$ a $\ell$ jsou, jak uvedeno. <u>Implikace $\Rightarrow$</u>. Předpokládáme, že existuje $f'(b) \in \mathbb{R}$ a že $\ell$ je dána rovnicí

$$y = f'(b) \cdot (x - b) + f(b) = f'(b) \cdot x + f(b) - f'(b)f(b)\,.$$

Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ má $\lim a_n = b$. S $c_n = \frac{f(a_n)-f(b)}{a_n-b}$ je přímka $\kappa_n = \kappa(b, f(b), a_n, f(a_n))$ dána rovnicí

$$y = c_n(x - b) + f(b) = c_n x + f(b) - c_n b\,.$$

Podle Heineho definice limity funkce se $\lim c_n = f'(b)$. Tedy $\lim(f(b) - c_n b) = f(b) - f'(b)f(b)$ a $\lim \kappa_n = \ell$ ve smyslu definice 10.2.5.

<u>Implikace $\Leftarrow$</u>. Nechť $\ell$ je dána rovnicí $y = sx + t$ a nechť $(a_n)$, $c_n$ a $\kappa_n$ jsou jako výše. Předpokládáme, že pro každou takovou posloupnost $(a_n)$ se $\lim \kappa_n = \ell$ ve smyslu definice 10.2.5. Tedy vždy $\lim c_n = s$ a $\lim(f(b) - c_n b) = f(b) - sb = t$.

Podle Heineho definice limity funkce se pak $s = f'(b)$. Takže $t = f(b) - f'(b)b$ a $\ell$ je tečna ke $G_f$ v bodě $(b, f(b))$. $\square$

• *Tečna v chybějícím bodu.* Ukážeme, jak definovat tečnu ke grafu funkce v jeho bodu bez použití tohoto bodu. Důkaz následujícího lemmatu je jasný.

**Lemma 10.2.10 (jedna konvexní kombinace)** *Pro nezáporná reálná čísla $r$, $s$, $t$, $v$, kde $s, v > 0$, položíme $\alpha = \frac{s}{s+v}$ a $\beta = \frac{v}{s+v}$. Pak*

$$\frac{r+t}{s+v} = \alpha \cdot \frac{r}{s} + \beta \cdot \frac{t}{v}$$

*je konvexní kombinace s koeficienty $\alpha$ a $\beta$, protože $\alpha, \beta \geq 0$ a $\alpha + \beta = 1$.*

**Věta 10.2.11 (tečna v chybějícím bodu)** *Nechť $b \in M$ je* OLB *množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(M \setminus \{b\})$ a $\ell \in \mathcal{N}$. Potom platí ekvivalence, že funkci $f$ lze rozšířit do $b$ hodnotou $f(b)$ tak, že $\ell$ je tečna ke $G_f$ v bodu $(b, f(b))$ $\iff$ pro každé dvě posloupnosti $(x_n)$, $(y_n) \subset M$ splňující, že vždy $x_n < b < y_n$ a že $x_n, y_n \to b$, se $\lim \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n)) = \ell$ ve smyslu definice 10.2.5.*

**Důkaz.** Nechť $b$, $M$, $f$ a $\ell$ jsou, jak uvedeno. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že jsme funkci $f$ rozšířili do $b$ nějakou hodnotou $f(b)$, existuje $f'(b) \in \mathbb{R}$ a přímka $\ell$ je dána rovnicí

$$y = f'(b) \cdot (x - b) + f(b) = f'(b) \cdot x + f(b) - f'(b)b\,.$$

Nechť $(x_n)$ a $(y_n)$ jsou popsané posloupnosti. Položíme $r_n = f(b) - f(x_n)$, $s_n = b - x_n$, $t_n = f(y_n) - f(b)$ a $v_n = y_n - b$. Podle lemmatu 10.2.10 je sklon $u_n$ sečny

$$\ell_n = \kappa(x_n,\, f(x_n),\, y_n,\, f(y_n))$$

grafu $G_f$ konvexní kombinací sklonů $r_n/s_n$ a $t_n/v_n$ sečen $\kappa(x_n, f(x_n), b, f(b))$ a $\kappa(b, f(b), y_n, f(y_n))$ grafu $G_f$:

$$u_n = \tfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \tfrac{r_n+t_n}{s_n+v_n} = \alpha_n \cdot \tfrac{r_n}{s_n} + \beta_n \cdot \tfrac{t_n}{v_n}\,,$$

kde $\alpha_n, \beta_n \geq 0$ a $\alpha_n + \beta_n = 1$. Protože $\lim r_n/s_n = \lim t_n/v_n = f'(b)$, podle věty 4.3.10 též $\lim u_n = f'(b)$. Sečna $\ell_n$ je dána rovnicí

$$y = u_n(x - x_n) + f(x_n) = u_n x + f(x_n) - u_n x_n\,.$$

Protože $\lim u_n = f'(b)$, $\lim x_n = b$ a $\lim f(x_n) = f(b)$ ($f$ je spojitá v $b$, protože $f'(b) \in \mathbb{R}$), je $\lim \ell_n = \ell$ ve smyslu definice 10.2.5.

Implikace $\neg \Rightarrow \neg$. Nechť $f$ nelze rozšířit do $b$ žádnou hodnotou $f(b)$ tak, aby $\ell$ byla tečna ke $G_f$ v $(b, f(b))$. Když tedy vezmeme to jediné číslo $f(b) \in \mathbb{R}$, že $(b, f(b)) \in \ell$, a když $s \in \mathbb{R}$ je sklon přímky $\ell$, pak neplatí, že $\lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = s$. Sestrojíme dvě posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset M$ splňující, že vždy $x_n < b < y_n$ a že $x_n, y_n \to b$, ale že neplatí limita přímek $\lim \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n)) = \ell$.

První případ je, že rozšířená funkce $f$ není spojitá v $b$. Pak existují posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset M$ splňující, že vždy $x_n < b < y_n$, že $\lim x_n = \lim y_n = b$, $\lim f(x_n) = K$, $\lim f(y_n) = L$, ale že neplatí $K = L = f(b)$ (úloha 10.2.12). Pokud $K \neq L$, sklony sečen $\ell_n = \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n))$ jdou do $\pm\infty$, takže uvedená limita přímek neplatí. Pokud $K = L \neq f(b)$, pak průsečíky sečen $\ell_n$ se svislou přímkou $(x = b)$ konvergují k (případně nevlastnímu) bodu různému od $(b, f(b))$. Podle úlohy 10.2.13 pak limita $\lim \ell_n$, když existuje, nemůže být přímka jdoucí bodem $(b, f(b))$ a uvedená limita přímek opět neplatí.

Zbylý druhý případ je, že rozšířená funkce $f$ je spojitá v $b$, ale neplatí rovnost $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = s$. Pak existuje $A \in \mathbb{R}^* \setminus \{s\}$ a posloupnost $(x_n) \subset M \setminus \{b\}$, která celá leží na jedné straně od $b$, že $\lim x_n = b$ a $\lim \frac{f(x_n)-f(b)}{x_n-b} = A$. Můžeme předpokládat, že vždy $x_n < b$, případ, že vždy $x_n > b$, je podobný. Vezmeme libovolnou posloupnost $(y_n) \subset M$, že vždy $y_n > b$ a $\lim y_n = b$. Pak $\lim f(y_n) = f(b)$ a z $(y_n)$ dokážeme vybrat podposloupnost $(y_{m_n})$, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(y_{m_n})}{x_n-y_{m_n}} = A$$

(úloha 10.2.14). Protože $A \neq s$, uvedená limita přímek opět neplatí. □

Tři následující úlohy jsou vlastně lemmata použitá v důkazu a čtvrtá ukazuje nutnost předpokladu, že body $x_n$ a $y_n$ jsou oddělené bodem $b$.

**Úloha 10.2.12** *Když $b \in M$ je* OLB *množiny $M \subset \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{F}(M)$ není spojitá v $b$, pak existují posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset M \setminus \{b\}$, které z různých stran konvergují k $b$ a existují pro ně limity $\lim f(x_n) = K$ a $\lim f(y_n) = L$, ale alespoň jedna z rovnosti $K = f(b)$ a $L = f(b)$ neplatí.*

**Úloha 10.2.13** *Nechť $\ell_n, \ell \in \mathcal{N}$, $(b, c) \in \ell$, $\lim \ell_n = \ell$ a $(x = b) \cap \ell_n = \{(b, c_n)\}$. Pak $\lim c_n = c$.*

**Úloha 10.2.14** *$(x_n)$, $(y_n)$, $(z_n)$ a $(u_n)$ buďte takové posloupnosti, že $\lim x_n = \lim z_n = b$, že vždy $x_n \neq b$, $\lim y_n = \lim u_n = c$ a $\lim \frac{y_n-c}{x_n-b} = A$. Pak existuje posloupnost $(m_n) \subset \mathbb{N}$, že $\lim \frac{y_n-u_{m_n}}{x_n-z_{m_n}} = A$.*

**Úloha 10.2.15** *Podmínka ve větě 10.2.11, že vždy $x_n < b < y_n$, je podstatná. Uveďte příklad funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ s tečnou $\ell$ ke $G_f$ v bodu $(b, f(b))$ a dvou posloupností $(x_n), (y_n) \subset M \setminus \{b\}$ splňujících, že vždy $x_n \neq y_n$ a že $\lim x_n = \lim y_n = b$, ale že neplatí rovnost $\lim \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n)) = \ell$.*

## 10.3 Aritmetika derivací

• *Lineární kombinace.* Zderivujeme lineární kombinace funkcí. Povolujeme i nevlastní hodnoty derivací.

**Tvrzení 10.3.1 (lineární kombinace)** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$, $M(f) = M(g) =: M$, $c \in M$ & $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí následující.*
1. *Když $f'(c) = K$ a $g'(c) = L$, pak $(af + bg)'(c) = aK + bL$, pokud výraz vpravo není neurčitý.*
2. *Platí, že $(af + bg)' \supset af' + bg'$.*

**Důkaz.** 1. Nechť $aK + bL$ není neurčitý výraz a $h = af + bg$. Potom se podle AL funkcí $h'(c) = \lim_{x\to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = a \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + b \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = aK + bL$.

2. Nechť $c \in M(af' + bg') = D(f) \cap D(g)$. Díky části 1 platí, že potom $c \in D(af + bg)$ a $(af + bg)'(c) = af'(c) + bg'(c)$. □

Pro jednoduchost bereme jen funkce se společným definičním oborem, i když by se daly uvažovat obecnější situace. Vyhnuli jsme se tím zvláštnostem, jako jsou funkce $f = |x| \,|\, (-\infty, 0]$ a $g = |x| \,|\, [0, +\infty)$, pro něž $(f + g)' = \emptyset$, ale $f' + g' = \{(0, 0)\}$. Je také jasné, že inkluze v druhé části může být ostrá. Vezměme například $f = |x|$ a $g = -|x|$ $(\in \mathcal{F}(\mathbb{R}))$. Pak $(f + g)' = k_0$, ale $f' + g'$ je $k_0 \,|\, (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Například pro funkci $\overline{\mathrm{sgn}} = \mathrm{sgn} \,|\, [0, +\infty)$ pomocí první části dostáváme, že

$$(\overline{\mathrm{sgn}}(x) + \sqrt{x})'(0) = \overline{\mathrm{sgn}}'(0) + (\sqrt{x})'(0) = +\infty + (+\infty) = +\infty\,.$$

Jak víme, $\overline{\mathrm{sgn}}'(0) = \mathrm{sgn}'_+(0)$.

**Úloha 10.3.2** $(\overline{\mathrm{sgn}}(x) - \sqrt{x})'(0) = ?$

• *Součiny a podíly.* Dokážeme známý Leibnizův vzorec pro derivaci součinu.

**Věta 10.3.3 (součin)** *Nechť $M(f) = M(g)$, $f'(b) = K$, $g'(b) = L$ a $f$ či $g$ je spojitá v $b$. Pak $(fg)'(b) = K \cdot g(b) + f(b) \cdot L$, když výraz vpravo není neurčitý.*

**Důkaz.** Nechť $g$ je spojitá v $b$, pro spojitou $f$ postupujeme podobně (úloha 10.3.4). Podle předpokladů a podle AL funkcí je

$$\begin{aligned}
(fg)'(b) &= \lim_{x\to b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x - b} \\
&= \lim_{x\to b} \frac{(f(x) - f(b))g(x) + f(b)(g(x) - g(b))}{x - b} \\
&= \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \cdot \lim_{x\to b} g(x) + f(b) \lim_{x\to b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \\
&\overset{g \text{ je spoj. v } b}{=} f'(b)g(b) + f(b)g'(b)\,.
\end{aligned}$$

□

**Úloha 10.3.4** *Vyřešte jednoduše případ, kdy v $b$ je spojitá funkce $f$.*

**Úloha 10.3.5** *Spojitost nelze pominout. Nechť $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, kde pro $x \neq 0$ je $f(x) = -g(x) = \operatorname{sgn} x$, $f(0) = -\frac{1}{2}$ a $g(0) = \frac{1}{2}$. Ukažte, že pro $b = 0$ se zde pravá strana Leibnizova vzorce rovná $(+\infty) \cdot \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\infty) = +\infty$, ale levá strana neexistuje.*

Následující důsledek se dokazuje jako důsledek **??**. Je dobré si uvědomit, že pro vlastní derivace je předpoklad spojitosti automaticky splněný.

**Důsledek 10.3.6 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$)** *Nechť $M(f) = M(g)$. <u>Pak</u> $(fg)' \supset f'g + fg'$.*

Tato inkluze opět může být ostrá a bez předpokladu společného definičního oboru nemusí platit.

**Tvrzení 10.3.7 (derivace podílu)** *Nechť $M(f) = M(g)$, $f'(b) = K$, $g'(b) = L$ a $g$ je spojitá v $b$. <u>Pak</u>*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(b) = \frac{K \cdot g(b) - f(b) \cdot L}{g(b)^2} = \frac{f'(b) \cdot g(b) - f(b) \cdot g'(b)}{g(b)^2},$$

*když výraz vpravo není neurčitý.*

**Důkaz.** Z předpokladů a AL funkcí plyne, že

$$\begin{aligned}
&(f/g)'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x)/g(x) \; - \; f(b)/g(b)}{x \; - \; b} \\
&\lim_{x \to b} \frac{f(x)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(b) - f(b)g(x)}{g(x)g(b)(x-b)} = \\
&\lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \lim_{x \to b} \frac{g(b)}{g(x)g(b)} - \lim_{x \to b} \frac{f(b)}{g(x)g(b)} \lim_{x \to b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \\
&\overset{g \text{ je spoj. v } b}{=} \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}.
\end{aligned}$$

□

**Úloha 10.3.8** *Jako v úloze 10.3.5 uveďte příklad, který ukazuje, že předpoklad spojitosti $g$ v $b$ nelze vynechat.*

Následující důsledek se opět dokazuje jako pro lineární kombinaci. Zase se využije, že pro vlastní derivace je předpoklad spojitosti automaticky splněný.

**Důsledek 10.3.9 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$)** *Nechť $M(f) = M(g)$. <u>Pak</u> platí, že $(f/g)' \supset (f'g - fg')/g^2$.*

Tato inkluze opět může být ostrá a bez předpokladu společného definičního oboru nemusí platit.

## 10.4 Derivace složených funkcí a inverzů

Připomínáme, že pro funkce $f, g \in \mathcal{R}$ jejich složenina $f(g)$ je funkce

$$f(g)\colon \{x \in M(g) \mid g(x) \in M(f)\} \to \mathbb{R}$$

s hodnotami $f(g)(x) = f(g(x))$. Tedy $M(f(g)) \subset M(g)$. Pro prostou funkci $f \in \mathcal{R}$ její inverz $f^{-1}$ je funkce

$$f^{-1}\colon f[M(f)] \to \mathbb{R}$$

s hodnotami $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Tedy $M(f^{-1}) = f[M(f)]$. Když $f$ není prostá, její inverz není definovaný.

• *Derivace složeniny.* Zderivujeme složenou funkci.

**Věta 10.4.1 (derivace složeniny)** *Nechť $M = M(f(g))$, bod $b \in M \cap L(M)$, $g'(b) \in \mathbb{R}^*$, $g$ je spojitá v $b$ a $f'(g(b)) \in \mathbb{R}^*$. Pak*

$$(f(g))'(b) = f'(g(b)) \cdot g'(b)\,,$$

*když pravá strana není neurčitý výraz.*

**Důkaz.** Nechť $M$, $f$, $g$ a $b$ jsou, jak uvedeno. Půjdeme Heineho stezkou. Nechť $f'(g(b)) \cdot g'(b)$ není neurčitý výraz a $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = b$. Pak podle předpokladu $\lim g(a_n) = g(b)$. Posloupnost $(a_n)$ rozložíme na dvě podposloupnosti $(b_n)$ a $(c_n)$, které mohou být konečné i prázdné: pro každé $n$ je $g(b_n) = g(b)$ a $g(c_n) \neq g(b)$. Ukážeme, že pro $(x_n) = (b_n)$ i pro $(x_n) = (c_n)$, když tato posloupnost je nekonečná, máme tutéž limitu

$$\lim \frac{f(g)(x_n) - f(g)(b)}{x_n - b} = f'(g(b)) \cdot g'(b)\,.$$

Pak ale i $\lim \frac{f(g)(a_n) - f(g)(b)}{a_n - b} = f'(g(b)) \cdot g'(b)$ a podle Heineho definice derivace se $(f(g))'(b) = f'(g(b)) \cdot g'(b)$.

Nechť $(b_n)$ je nekonečná. Pak $\lim b_n = b$ a podle Heineho definice derivace

$$g'(b) = \lim \frac{g(b_n) - g(b)}{b_n - b} = \lim \frac{g(b) - g(b)}{b_n - b} = 0\,.$$

Tedy

$$\lim \frac{f(g)(b_n) - f(g)(b)}{b_n - b} = \lim \frac{f(g(b)) - f(g(b))}{b_n - b} = 0 = f'(g(b)) \cdot g'(b)\,.$$

Nechť $(c_n)$ je nekonečná. Pak $\lim c_n = b$, $\lim g(c_n) = g(b)$ a podle AL a Heineho definice derivace opět

$$\begin{aligned}
&\lim \frac{f(g)(c_n) - f(g)(b)}{c_n - b} = \lim \frac{f(g(c_n)) - f(g(b))}{c_n - b} \\
&= \lim \frac{f(g(c_n)) - f(g(b))}{g(c_n) - g(b)} \cdot \frac{g(c_n) - g(b)}{c_n - b} \\
&= \lim \frac{f(g(c_n)) - f(g(b))}{g(c_n) - g(b)} \cdot \lim \frac{g(c_n) - g(b)}{c_n - b} = f'(g(b)) \cdot g'(b)\,.
\end{aligned}$$

□

**Úloha 10.4.2** *Ukažte pomocí příkladu, že bez předpokladu spojitosti funkce $g$ v $b$ věta neplatí.*

**Důsledek 10.4.3 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$)** *Nechť platí, že $g[M(g)] \subset M(f)$. Potom $f(g)' \supset f'(g) \cdot g'$.*

**Důkaz.** Nechť $M = M(f(g))$ a $b \in M(f'(g) \cdot g')$, takže $g(b) \in D(f)$ a $b \in D(g)$. Tedy $b$ je v $M(g) \cap L(M(g))$. Protože $M = M(g)$, je $b \in M \cap L(M)$. Podle věty 10.4.1 je $b \in D(f(g))$ a $(f(g))'(b) = f'(g(b)) \cdot g'(b)$. □

• *Derivace inverzní funkce.* Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ *roste*, resp. *klesá, v bodě $b \in M$*, existuje-li $\delta$, že pro každé $x$ a $x'$ s $b - \delta < x < b < x' < b + \delta$ je $f(x) < f(b) < f(x')$, resp. $f(x) > f(b) > f(x')$. Zderivujeme inverzní funkci.

**Věta 10.4.4 (derivace inverzu)** *$f \in \mathcal{F}(M)$ je prostá funkce, existuje derivace $f'(b) \in \mathbb{R}^*$ a $f^{-1}$ je spojitá v bodě $c = f(b)$. Pak platí následující.*
(1) *Když $f'(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(c) = 1/f'(b) = 1/f'(f^{-1}(c))$.*
(2) *Když $f'(b) = 0$ a funkce $f$ v bodě $b$ roste, resp. klesá, pak $\left(f^{-1}\right)'(c) = +\infty$, resp. $-\infty$.*
(3) *Když $f'(b) = \pm\infty$ a $c \in L(f[M])$, pak $\left(f^{-1}\right)'(c) = 0$.*

**Důkaz.** Nechť $f$, $M$, $b$ a $c$ jsou, jak uvedeno. Opět se vydáme Heineho stezkou. Nechť $(b_n) \subset f[M] \setminus \{c\}$ je libovolná posloupnost s $\lim b_n = c$ a $a_n = f^{-1}(b_n)$. Tedy $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ a podle předpokladu $\lim a_n = b$.

1. Nechť $f'(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak $c \in L(f[M])$ podle tvrzení 10.1.13. Podle AL a Heineho definice derivace je

$$\lim \frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(c)}{b_n - c} = \lim \frac{1}{\frac{f(a_n)-f(b)}{a_n-b}} = \frac{1}{\lim \frac{f(a_n)-f(b)}{a_n-b}} = \frac{1}{f'(b)}\,.$$

Podle Heineho definice derivace je $(f^{-1})'(c) = 1/f'(b)$.

2. Nechť $f'(b) = 0$. Pak $c \in L(f[M])$ podle úlohy 10.1.15. Nechť $f$ v $b$ klesá (pro $f$ rostoucí v $b$ podobně). Pak existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{f(a_n)-f(b)}{a_n-b} < 0$. Předešlý výpočet a část 5 tvrzení 4.1.4 ukazují, že $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

3. Nechť $f'(b) = \pm\infty$ a $c \in L(f[M])$. Potom máme $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\pm\infty} = 0$ podle části 1. □

**Úloha 10.4.5** *Prozkoumejte, co se stane, když se vynechá předpoklad spojitosti inverzu v $c$.*

**Důsledek 10.4.6 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$)** *Nechť $f \in \mathcal{R}$ je prostá a $f^{-1} \in \mathcal{C}$. Pak $(f^{-1})' \supset 1/f'(f^{-1}) = k_1/f'(f^{-1})$.*

**Důkaz.** Nechť $c \in M(1/f'(f^{-1}))$, tedy $c \in M(f^{-1})$ a $f^{-1}(c) \in D(f) \setminus Z(f')$. Podle věty 10.4.4 a předpokladu, že $f^{-1} \in \mathcal{C}$, je $c \in D(f^{-1})$ a $(f^{-1})'(c) = 1/f'(f^{-1}(c))$. $\square$

## 10.5 Derivace elementárních funkcí

Závěrem kapitoly o derivacích odvodíme (popř. odvodíte v úlohách) vzorce pro derivace elementárních funkcí z oddílu **??**. Už umíme zderivovat $x^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Podle tvrzení **??** se na $\mathbb{R}$ pro $n > 0$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ a } (x^0)' = 1' = 0 \,.$$

• *Exponenciála, sinus a kosinus.* Pro ně potřebujeme umět zderivovat mocninnou řadu. Následující přímý argument využívá algebraickou identitu

$$x^n - y^n = (x - y) \textstyle\sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-1-i}, \; n \in \mathbb{N} \,.$$

Už jsme ji použili v důkazu věty 8.6.3 i jinde.

**Věta 10.5.1 (derivace moc. řad)** *Nechť reálné koeficienty $a_n$ v mocninné řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ splňují, že*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0 \,.$$

*Pak její součet*

$$S(x) := \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

*(viz věta 8.6.3) má derivaci $S' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a ta je dána vztahem*

$$S'(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \,.$$

**Důkaz.** Z důkazu věty 8.6.3 víme, že pro každé reálné $x$ řada $S(x)$ absolutně konverguje. Tedy i řada v rovnici pro $S'(x)$ je AK (úloha 10.5.2). Nechť $x, h \in \mathbb{R}$

s $h \neq 0$. Pak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \left|\sum_{j=0}^{n-1} (x+h)^j x^{n-1-j} - n x^{n-1}\right| = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot \left|\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} h^i x^{n-1-i}\right| \\
&= |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot \left|\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} h^{i-1} x^{n-1-i}\right| \\
&\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} y^{i-1} y^{n-1-i}, \text{ kde } y := 1 + |h| + |x| \,, \\
&\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| y^{n-2} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} 2^j \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (2y)^n \to 0
\end{aligned}$$

pro $h \to 0$. Tedy $S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. □

**Úloha 10.5.2** *Proč je ta řada* AK*?*

**Úloha 10.5.3** *Zdůvodněte všechny nerovnosti a rovnosti v důkazu.*

**Úloha 10.5.4** *Odvoďte z věty důsledek níže.*

**Důsledek 10.5.5 ($\exp x$, $\cos x$ a $\sin x$)** *Tyto funkce mají na $\mathbb{R}$ derivace*

$$(\exp x)' = \exp x, \ (\cos x)' = -\sin x \ \ a \ \ (\sin x)' = \cos x \,.$$

- *Vzorec pro derivaci podílu.* Zderivujeme jím tangens a kotangens a $x^n$.

**Tvrzení 10.5.6 (derivace $\tan x$)** *Tato funkce má derivaci*

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} : \mathbb{R} \setminus Z(\cos x) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \,.$$

**Důkaz.** Tvrzení 10.3.7, důsledek 10.5.5 a identita $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dávají na $\mathbb{R} \setminus Z(\cos x)$ vztah

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \,.$$

□

**Úloha 10.5.7** ($\cot x$) *Tato funkce má na* $\mathbb{R} \setminus Z(\sin x)$ *derivaci* $-1/\sin^2 x$.

**Tvrzení 10.5.8** ($x^n$ **pro** $n < 0$) *Pro každé* $n \in \mathbb{Z}$ *s* $n < 0$ *platí na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *vztah* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

**Důkaz.** Skutečně, pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)x^{-n-1} \ .$$

□

• *Složené funkce a inverzy.* Několik derivací elementárních funkcí spočteme pomocí vzorců pro derivaci složenin a inverzů.

**Tvrzení 10.5.9** ($\arctan x$) *Tato funkce má na* $\mathbb{R}$ *derivaci* $1/(1 + x^2)$.

**Důkaz.** Z důsledku **??**, tvrzení 10.5.6 a identity $\cos^2 x = 1/(1+\tan^2 x)$ dostáváme na $\mathbb{R}$ vztah

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan)'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2} \ .$$

□

**Tvrzení 10.5.10** ($\log x$) *Tato funkce má na* $(0, +\infty)$ *derivaci* $1/x$.

**Důkaz.** Z důsledků **??** a 10.5.5 dostáváme na $(0, +\infty)$ vztah

$$(\log x)' = \frac{1}{(\exp)'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x} \ .$$

□

**Úloha 10.5.11 (logaritmická derivace)** *Nechť* $a \in M \subset \mathbb{R}$, *a je limitní bod množiny* $M$, $f\colon M \to (0, +\infty)$ *je funkce spojitá v* $a$ *&* *nechť existuje derivace* $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. *Pak existuje derivace* $\big(\log(f(x))\big)'(a) \in \mathbb{R}^*$ *&* *platí rovnost*

$$\big(\log(f(x))\big)'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)} \ .$$

**Tvrzení 10.5.12** ($\arcsin x$) *Tato funkce má na* $(-1, 1)$ *derivaci* $1/\sqrt{1 - x^2}$.

**Důkaz.** Z důsledků **??** a 10.5.5 a identity $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ platné na $(-1, 1)$ dostáváme na tomto intervalu vztah

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

□

**Úloha 10.5.13** (**$\operatorname{arccot} x$, $\log|x|$ a $\arccos x$**) *Tyto funkce mají následující derivace.*

1. $(\operatorname{arccot} x)' = -1/(1+x^2)$ *na* $\mathbb{R}$.
2. $(\log|x|)' = 1/x$ *na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ *na* $(-1,1)$.

**Tvrzení 10.5.14 (derivace $x^b$)** *Pro každý exponent $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ platí pro každé $x > 0$ vztah $(x^b)' = bx^{b-1}$.*

**Důkaz.** Skutečně,

$$\big(x^b\big)' = \big(\exp(b\log x)\big)' = \exp'(b\log x)\cdot\big(b\log x\big)' = \exp(b\log x)\cdot b/x = bx^{b-1}\ .$$

V první rovnosti jsme použili definici 5.3.9, ve druhé důsledek **??**, ve třetí důsledky 10.5.5 a **??** a tvrzení 10.5.10 a konečně ve čtvrté tvrzení 5.3.13. □

• *Shrnutí derivačních vzorců.*

| $F$ | $F'$ | podmínky |
|---|---|---|
| $af+bg$ | $af'+bg'$ | důsledek **??** |
| $fg$ | $f'g+gf'$ | důsledek **??** |
| $f/g$ | $(f'g-fg')/g^2$ | důsledek **??** |
| $f(g)$ | $f'(g)\cdot g'$ | důsledek **??** |
| $f^{-1}$ | $1/f'(f^{-1})$ | důsledek **??** |

| $f$ | $f'$ | podmínky |
|---|---|---|
| $\exp x$ | $\exp x$ | na $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | na $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | na $\mathbb{R}$ |
| $\arctan x$ | $1/(1+x^2)$ | na $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-1/(1+x^2)$ | na $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | na $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ |
| $c$ | $0$ | na $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$ s $n<0$ |
| $\log\lvert x\rvert$ | $1/x$ | na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| $x^b$ | $bx^{b-1}$ | na $(0,+\infty)$, $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ |
| $\log x$ | $1/x$ | na $(0,+\infty)$ |
| $\tan x$ | $1/(\cos x)^2$ | na $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\pi/2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ |
| $\cot x$ | $-1/(\sin x)^2$ | na $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ |
| $\arcsin x$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ | na $(-1,1)$ |
| $\arccos x$ | $-1/\sqrt{1-x^2}$ | na $(-1,1)$ |

**Úloha 10.5.15** *Pro $x>0$ spočítejte derivaci $\big(x^x\big)'$.*

**Úloha 10.5.16** *Pro pevné* $a > 0$ *a* $x \in \mathbb{R}$ *spočítejte derivaci* $\left(a^x\right)'$.

**Úloha 10.5.17** *Zderivujte funkce* $\frac{3x^2-5x+1}{x^2+x+1}$, $\exp(\tan(\sqrt{x}))$ *a* $|x^2-1|$.

**Úloha 10.5.18** *Dokažte tvrzení* **??**.

# Kapitola 11

# Přednáška 8. Věty o střední hodnotě

Kapitola o osmé přednášce se věnuje větám o střední hodnotě a jejich použitím. V oddílu 11.1 uvedeme a dokážeme tři takové věty, Rolleovu 11.1.1, Lagrangeovu 11.1.4 a Cauchyovu 11.1.7.

## 11.1 Tři věty o střední hodnotě

Dokážeme tři věty popisují situace, kdy konfigurace hodnot funkcí vynucují jisté hodnoty derivací.

• *Rolleova věta.* První z nich se názvem odkazuje na francouzského matematika M. Rolleho. Píšeme o něm v oddílu C.1.

**Věta 11.1.1 (Rolleova)** *Nechť $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pro každé $c \in (a,b)$ existuje derivace $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ (může být nevlastní) & $f(a) = f(b)$. Pak*

$$\exists\, c \in (a,\, b)\, \big(f'(c) = 0\big)\ .$$

**Důkaz.** Když je $f$ konstantní, tedy $f(x) = f(a) = f(b)$ pro každé $x \in [a,b]$, pak $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$.

Nechť $f$ není konstantní a pro nějaké $x_0 \in (a,b)$ je $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Případ, že $f(x_0) < f(a) = f(b)$, se probere podobně. Podle věty 8.4.1 funkce $f$ nabývá v nějakém bodu $c \in [a,b]$ svou největší hodnotu. Protože $f(c) \geq f(x_0)$, je $a < c < b$. Protože $c$ je OLB intervalu $[a,b]$ a existuje derivace $f'(c)$, podle věty 10.1.7 se $f'(c) = 0$. □

**Úloha 11.1.2** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 11.1.3 (dva protipříklady)** *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla.*

1. *Existuje funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *že* $f(a) = f(b)$, $f$ *je na* $[a,b)$ *spojitá* & $f$ *je na* $(a,b)$ *diferencovatelná, ale* $f' \neq 0$ *na* $(a,b)$.

2. *Pro každé* $d \in (a,b)$ *existuje funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *že* $f(a) = f(b)$, $f$ *je spojitá,* $f$ *je diferencovatelná na* $(a,b) \setminus \{d\}$ & *derivace* $f'(d)$ *neexistuje, ale* $f' \neq 0$ *na* $(a,b) \setminus \{d\}$.

• *Lagrangeova věta.* Tato věta o střední hodnotě se nejčastěji používá.

**Věta 11.1.4 (Lagrangeova)** *Nechť* $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce* & *pro každé* $c \in (a,b)$ *existuje derivace* $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ *(může být nevlastní). Pak*

$$\exists\, c \in (a,\, b) \left( f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

**Důkaz.** Nechť $z := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ & $g(x) := f(x) - (x-a) \cdot z$. Lehce se ověří, že $g(x)$ splňuje předpoklady Rolleovy věty, zejména $g(a) = g(b) = f(a)$. Tedy $0 = g'(c) = f'(c) - z$ pro nějaké $c \in (a,b)$ a jsme hotovi. □

Geometricky to znamená, že existuje tečna ke $G_f$ v nějakém bodu, která je rovnoběžná se sečnou $\kappa(a, f(a), b, f(b))$.

**Úloha 11.1.5** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 11.1.6 (další dva protipříklady)** *Nechť* $a < b$ *jsou reálná čísla.*

1. *Existuje funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *že* $f(a) > f(b)$, $f$ *je na* $[a,b)$ *spojitá* & $f$ *je na* $(a,b)$ *diferencovatelná, ale* $f' = 0$ *na* $(a,b)$.

2. *Pro každé* $d \in (a,b)$ *existuje funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *že* $f(a) > f(b)$, $f$ *je na* $[a,b]$ *spojitá,* $f$ *je diferencovatelná na* $(a,b) \setminus \{d\}$ & *derivace* $f'(d)$ *neexistuje, ale* $f' = 0$ *na* $(a,b) \setminus \{d\}$.

• *Cauchyova věta.* V ní figurují dvě funkce.

**Věta 11.1.7 (Cauchyova)** *Nechť* $a < b$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou spojité funkce, pro každé* $c \in (a,b)$ *existují derivace* $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ *(může být nevlastní)* & $g'(c) \in \mathbb{R}$ *(musí být vlastní)* & $g(a) \neq g(b)$. *Pak*

$$\exists\, c \in (a,\, b) \left( f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) \right).$$

**Důkaz.** Nechť $z := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ & $h(x) := f(x) - z \cdot (g(x) - g(a))$. Lehce se ověří, že $h(x)$ splňuje předpoklady Rolleovy věty, zejména $h(a) = h(b) = f(a)$. Tedy $0 = h'(c) = f'(c) - z \cdot g'(c)$ pro nějaké $c \in (a,b)$ a jsme hotovi. □

**Úloha 11.1.8** *Kde by vadilo, kdyby derivace funkce* $g$ *byla nekonečná?*

## 11.2 Logaritmus není P-rekurentní

Pomocí Rolleovy, a vlastně i Lagrangeovy, věty o střední hodnotě dokážeme, že posloupnost $(\log n)$ není P-rekurentní. P-rekurentní posloupnosti pochopitelně nejprve definujeme.

• P-*rekurentní posloupnosti.* Jde o zobecnění konstantně rekurentních posloupností z oddílu 6.2.

**Definice 11.2.1 (P-rekurence)** $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *je* P-*rekurentní posloupnost, pokud existují polynomy* $p_i \in \mathbb{R}[x]$, $i \in [k]$ *a* $k \in \mathbb{N}$, *které nejsou všechny nulové a pro něž platí, že*

$$\forall\, n \left(n \geq k \Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{k} p_i(n) a_{n-i+1} = 0\right) .$$

Například posloupnost hodnot faktoriálu

$$(a_n) := (n!) = (1,\, 2,\, 6,\, 24,\, 120,\, 720,\, 5040,\, \dots)$$

je P-rekurentní, protože platí, že

$$n \geq 2 \Rightarrow a_n - n \cdot a_{n-1} = 0 .$$

**Úloha 11.2.2** *Nahradíme-li v předešlé definici v předpokladu implikace číslo* $k$ *libovolným celým číslem* $n_0 \geq k$, *dostaneme ekvivalentní definici.*

• *Posloupnost* $(\log n) = (0, \log 2, \log 3, \dots)$. Dokážeme, že není P-rekurentní. Vyjdeme z následujícího tvrzení.

**Tvrzení 11.2.3 (nenulová racionální funkce)** *Nechť*

$$f(x) := r(x) + \textstyle\sum_{j=1}^{k} c_j \log(x - j + 1) ,$$

*kde* $r \in \mathbb{R}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{R}$ *a čísla* $c_j$ *nejsou všechna nulová, je elementární funkce s přirozeným definičním oborem* $M := (k-1, +\infty) \setminus Z$, *kde* $Z$ *jsou reálné kořeny jmenovatele funkce* $r(x)$. *Potom racionální funkce*

$$f' \colon D(f) = M \to \mathbb{R}$$

*není nulová.*

**Důkaz.** Pro spor předpokládejme, že $f'$ je nulová racionální funkce a že $c_k \neq 0$ (což můžeme předpokládat). Tedy pro nějaké $\delta$ je restrikce

$$f' \colon (k-1,\, k-1+\delta) \to \mathbb{R}$$

konstantně nulová funkce. To ovšem podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě implikuje (viz později), že restrikce

$$f \colon (k-1,\, k-1+\delta) \to \mathbb{R}$$

je konstantní funkce. Ale $\lim_{x\to k-1} \log(x-k+1) = -\infty$ a $\lim_{x\to k-1} r(x) \in \mathbb{R}$ nebo je $\pm\infty$, takže

$$\lim_{x\to k-1} f(x) = \pm\infty$$

(úloha 11.2.4) a $f$ rozhodně není lokálně konstantní. □

**Úloha 11.2.4** *Dokažte, že* $\lim_{x\to k-1} f(x) = \pm\infty$.

Z tvrzení odvodíme tuto větu.

**Věta 11.2.5 (jen omezené nulové body)** *Nechť*

$$f(x) := r(x) + \textstyle\sum_{j=1}^{k} p_j(x) \log(x-j+1) \ ,$$

*kde* $r \in \mathbb{R}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $p_j \in \mathbb{R}[x]$ *a polynomy* $p_j$ *nejsou všechny nulové, je elementární funkce s přirozeným definičním oborem* $M := (k-1, +\infty) \setminus Z$, *kde* $Z$ *jsou reálné kořeny jmenovatele funkce* $r(x)$. *Potom neexistuje posloupnost* $(a_n) \subset M$ *s* $a_1 < a_2 < \dots$ *a* $\lim a_n = +\infty$, *že*

$$\forall\, n \left( f(a_n) = 0 \right) \ .$$

*Funkce* $f$ *tedy nemá libovolně velké nulové body.*

**Důkaz.** Postupujeme indukcí podle stupně $\deg f$ těchto funkcí, který definujeme jako součet

$$\deg f := \sum_{j\in[k] \wedge p_j \neq 0} \deg p_j$$

stupňů nenulových polynomů $p_j(x)$. Vezmeme nejmenší protipříklad k větě, to jest funkci $f(x)$ uvažovaného typu s nejmenším stupněm $\deg f \in \mathbb{N}_0$, pro kterou existuje uvedená posloupnost $(a_n) \subset M$ nulových bodů jdoucí do nekonečna. Pokud $Z \neq \emptyset$, můžeme předpokládat, že $a_1 > \max(Z)$ (úloha 11.2.6). Použijeme Rolleovu větu o střední hodnotě (jak? — úloha 11.2.7) a dostaneme takovou posloupnost $(b_n) \subset M$, že

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \dots \wedge \forall\, n \left( f'(b_n) = 0 \right) \ .$$

Derivace funkce $f$ tedy má také libovolně velké nulové body. To je ale spor. Pro $\deg f = 0$ máme spor díky tvrzení 11.2.3, protože pak $f'$ je nenulová racionální funkce, která ale má jen konečně mnoho nulových bodů. Pro $\deg f > 0$ máme spor s minimalitou protipříkladu $f$, protože $f'$ je opět funkce uvažovaného typu, která ale má $\deg f' < \deg f$ (úloha 11.2.8). □

**Úloha 11.2.6** *Proč potřebujeme, aby bylo* $a_1 > \max(Z)$, *a proč to můžeme předpokládat?*

**Úloha 11.2.7** *Jak přesně v předešlém důkazu použijeme Rolleovu větu?*

**Úloha 11.2.8** *Proč je $f'$ uvažovaného typu a proč má menší stupeň než $f$?*

Dokazovanou vlastnost posloupnosti $(\log n)$ už z věty 11.2.5 snadno získáme.

**Důsledek 11.2.9 (log není P-rek.)** *Posloupnost* $(\log n)$ *není* P*-rekurentní.*

**Důkaz.** Pro spor nechť tato posloupnost je P-rekurentní. Tedy existují polynomy $p_j \in \mathbb{R}[x]$, $j \in [k]$ a $k \in \mathbb{N}$, které nejsou všechny nulové a pro každé $n \geq k$ platí, že

$$\sum_{j=1}^{k} p_j(n) \log(n - j + 1) = 0 \,.$$

Pak ale funkce

$$f(x) := \sum_{j=1}^{k} p_j(x) \log(x - j + 1) \colon (k-1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

má, v rozporu s větou 11.2.5, neomezené nulové body $x := n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. $\square$

**Úloha 11.2.10** *Zobecněte předchozí důsledek na posloupnosti* $(\log(n + c))$*, kde* $c > -1$ *je reálná konstanta.*

Tento oddíl je založený na autorově preprintu [92].

## 11.3 Monotonie a l'Hospitalovo pravidlo

Pomocí vět o střední hodnotě ukážeme, jak poznat intervaly monotonie funkce z její derivace a jak derivace rozšiřovat. Také dokážeme l'Hospitalovo pravidlo, což je metoda pro počítání limit neurčitých funkčních výrazů $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

• *Derivace a intervaly monotonie funkcí.* Pro množinu $M \subset \mathbb{R}$ jako

$$M^0 := \{a \in M \mid \exists\, \delta \, \big(U(a, \delta) \subset M\big)\}$$

označíme její *vnitřek*. Vnitřek intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval $I^0 \subset I$, který vznikne z $I$ vynecháním koncových bodů. Omezíme se na funkce definované na intervalech.

**Věta 11.3.1 (derivace a monotonie 1)** *$I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f \colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a pro každé $c \in I^0$ existuje derivace $f'(c)$ (může být nevlastní). Pak platí následující.*

1. *$f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) na $I^0 \Rightarrow f$ na $I$ neklesá (resp. neroste).*
2. *$f' > 0$ (resp. $f' < 0$) na $I^0 \Rightarrow f$ na $I$ roste (resp. klesá).*

**Důkaz.** Nechť na $I^0$ je $f' < 0$ a $x < y$ jsou libovolná čísla v $I$. Podle věty 11.1.4 pro nějaké $z \in (x, y) \subset I^0$ je $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) < 0$. Jmenovatel je $y - x > 0$, čitatel je tedy záporný, $f(x) > f(y)$ a $f$ na $I$ klesá. Další tři možnosti v 1 a 2 se proberou podobně. □

**Úloha 11.3.2** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 11.3.3 (derivace a monotonie 2)** *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, derivace $f'_{\pm}(a)$ níže mohou být nevlastní. Pak:*

1. *$a$ je levý* LB *množiny $M$ a $f'_-(a) < 0$, resp. $f'_-(a) > 0$, pak*

$$\exists\, \delta \left( f[P^-(a,\delta) \cap M] > \{f(a)\}, \quad \textit{resp.} \quad < \{f(a)\} \right) .$$

2. *$a$ je pravý* LB *množiny $M$ a $f'_+(a) < 0$, resp. $f'_+(a) > 0$, pak*

$$\exists\, \delta \left( f[P^+(a,\delta) \cap M] < \{f(a)\}, \quad \textit{resp.} \quad > \{f(a)\} \right) .$$

**Úloha 11.3.4** *Co z tvrzení plyne pro hodnotu funkce $|x|$ v nule?*

• *Limitní rozšiřování derivací.* Pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě lze derivace jako funkce rozšiřovat.

**Tvrzení 11.3.5 (rozšiřování derivací)** *Nechť $a < b$, $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce s $D(f) \supset (a, b)$ a nechť*

$$\lim_{x \to a} f'(x) =: L \in \mathbb{R}^* .$$

*Potom existuje derivace $f'(a)$ a $f'(a) = L$.*

**Důkaz.** Nechť $a$, $b$, $f$ a $L$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. Existuje takové $\delta \le b - a$, že $x \in P^+(a, \delta) \Rightarrow f'(x) \in U(L, \varepsilon)$. Nechť $x \in P^+(a, \delta)$ je libovolné. Podle věty 11.1.4 existuje takové $y \in (a, x) \subset P^+(a, \delta)$, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(y) \in U(L,\, \varepsilon) .$$

Tedy $f'(a) = L$. □

**Úloha 11.3.6** *Čemu se rovnají $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$? Proč píšeme $f'(a)$, a ne $f_+(a)$? Proč píšeme $x \in P^+(a, \delta)$, a ne $x \in P(a, \delta)$?*

• *l'Hospitalovo*[1] *pravidlo/vzorec.* Je to vzorec pro výpočet limit $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ zkrácením zlomku infinitesimálním faktorem $x - A$. L'Hospitalův

[1] Čti: lapitalovo.

vzorce motivujeme. Řekněme, že $A \in \mathbb{R}$ a $f(A) = g(A) = 0$. Pro $x \to A$ pak můžeme psát

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(A)}{g(x) - g(A)} = \frac{\frac{f(x)-f(A)}{x-A}}{\frac{g(x)-g(A)}{x-A}} \approx \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Očekáváme tedy, že pokud existují derivace $f'$ a $g'$ a pro $x \to A$ má $f'(x)/g'(x)$ limitu $L$, má ji i $f(x)/g(x)$.

**Věta 11.3.7 (LHP 1)** *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a pro nějaké $\delta > 0$ máme funkce*

$$f,\, g,\, f',\, g' \colon P^+(A,\, \delta) \to \mathbb{R}$$

*s $g' \neq 0$ na $P^+(A,\, \delta)$, $f$ a $g$ mají v $A$ limitu $0$ a nechť $\lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$. Pak též*

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = L \,.$$

**Důkaz.** Nechť $A$, $\delta$, $f$, $g$ a $L$ jsou, jak uvedeno, a nechť nejprve $a := A \in \mathbb{R}$. Obě funkce rozšíříme hodnotou $f(a) = g(a) := 0$. Číslo $a$ je limitní bod definičního oboru zlomku $f(x)/g(x)$ (kdyby se totiž na $P^+(a, \theta)$ funkce $g = 0$, pak by se na $P^+(a, \theta)$ i $g' = 0$). Položíme

$$P_0^+(a,\, \delta) := \{x \in (a,\, a + \delta) \mid g(x) \neq 0\} \,.$$

Podle věty 11.1.7 existuje taková funkce $c\colon P_0^+(a, \delta) \to P^+(a, \delta)$, že pro každé $x \in P_0^+(a, \delta)$ je

$$c(x) \in (a,\, x) \wedge \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \,.$$

Speciálně se $\lim_{x\to a} c(x) = a$. Ale $a \notin P^+(a, \delta)$, takže je splněna podmínka 1 věty 7.4.1 o limitě složené funkce. Podle této věty se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L \,.$$

Nechť $A = +\infty$. Definujeme funkce

$$f_0(y) := f(1/y),\, g_0(y) := g(1/y) \colon P^+(0,\, \delta) \to \mathbb{R} \,.$$

Podle důsledku **??** se na $P^+(0, \delta)$ derivace $f_0'(y) = -f'(1/y)/y^2$ a $g_0'(y) = -g'(1/y)/y^2$. Takže

$$\lim_{y\to 0} \frac{f_0'(y)}{g_0'(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \,,$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili větu 7.4.1 (se splněnou podmínkou 1) a ve třetí předpoklad. Tedy

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f_0(y)}{g_0(y)} = L \,,$$

kde jsme v první rovnosti použili větu 7.4.1 (se splněnou podmínkou 1), ve druhé definici funkcí $f_0$ a $g_0$ a ve třetí již dokázaný případ této věty pro konečnou hodnotu $A = 0$.

Případ $A = -\infty$ přenecháváme úloze 11.3.8. □

**Úloha 11.3.8** *Dokažte předešlou větu pro $A = -\infty$. Dokažte ji pro definiční obory $P^-(A, \delta)$ a $P(A, \delta)$.*

**Věta 11.3.9 (LHP 2)** *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a pro nějaké $\delta > 0$ máme funkce*

$$f,\, g,\, f',\, g' \colon P^+(A,\, \delta) \to \mathbb{R}$$

*s $g' \neq 0$ na $P^+(A,\, \delta)$, $g$ má v $A$ limitu $\pm\infty$ a nechť $\lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$. Pak též*

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

**Důkaz.**

□

Jiný důkaz druhého l'Hospitalova vzorce uvádíme v oddílu 14.2 ve větě 14.2.14.

Spočítáme pomocí LHP pár limit. Například

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log x &= \lim_{x\to 0} \frac{(\log x)'}{(1/\sqrt{x})'} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{(-1/2)x^{-3/2}} \\ &= -2 \lim_{x\to 0} x^{1/2} = 0 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(\cos x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\sin x} \\ &= -2 \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(\sin x)'} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = -2\,. \end{aligned}$$

**Úloha 11.3.10** *Ukažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ se*

$$\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon} \log x = 0 \quad a \quad \lim_{x\to +\infty} x^{-\varepsilon} \log x\,.$$

## 11.4 Derivace vyšších řádů

• *Derivace vyšších řádů.* Definiční obory funkcí teď většinou budou otevřené množiny. Každý bod takové množiny je její OLB.

**Definice 11.4.1 ($f^{(n)}(x)$)** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná otevřená množina a $f = f(x) \colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Pro $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ definujeme indukcí konečnou či nekonečnou posloupnost funkcí $f^{(n)}(x) \colon M \to \mathbb{R}$.*

1. *Na začátku* $f^{(0)}(x) := f(x)$.

2. *Pro* $n > 0$, *když je funkce* $f^{(n-1)}(x)$ *definovaná a má v každém bodu* $a \in M$ *vlastní derivaci, pro každé* $a \in M$ *definujeme hodnotu* $n$*-té funkce jako*

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)}(x))'(a) \ .$$

*Funkci* $f^{(n)}$ *nazveme derivací řádu* $n$ *funkce* $f$ *či* $n$*-tou derivací funkce* $f$.

Funkce $f^{(0)}$ je tedy $f$ sama a $f^{(1)}$ je její derivace $f'$. Pokud je $f^{(n-1)} \colon M \to \mathbb{R}$ definovaná a má v $b \in M$ derivaci, i nevlastní, stále píšeme

$$f^{(n)}(b) := (f^{(n-1)})'(b) \in \mathbb{R}^*$$

a mluvíme o $n$-té derivaci funkce $f$ v bodě $b$. Funkci $f^{(2)}$, druhou derivaci funkce $f$, označíme též jako $f''$. Například, pro $M = \mathbb{R}$, $(x \sin x)'' = (\sin x + x \cos x)' = 2 \cos x - x \sin x$. Druhou derivaci lze použít ke zdůvodnění existence extrémů funkcí.

**Tvrzení 11.4.2 ($f''$ a extrémy)** *Nechť* $a \in M \subset \mathbb{R}$, *kde* $M$ *je otevřená množina,* $f \colon M \to \mathbb{R}$ *je funkce, existuje vlastní* $f' \colon M \to \mathbb{R}$ *s* $f'(a) = 0$ *a existuje* $f''(a) \in \mathbb{R}^*$, *i nevlastní. Pak platí následující.*

1. $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ *má v* $a$ *ostré lokální minimum.*

2. $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ *má v* $a$ *ostré lokální maximum.*

*Množinu* $M$ *lze zřejmě vždy brát ve tvaru* $U(a, \delta)$.

**Důkaz.** Dokážeme jen první část, důkaz druhé je podobný. Nechť tedy $M = U(a, \delta)$, na $U(a, \delta)$ existuje vlastní $f'$, $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$. Podle tvrzení 11.3.3 existuje takové $\theta \leq \delta$, že $f' < f'(0) = 0$ na $P^-(a, \theta)$ a $f' > f'(0) = 0$ na $P^+(a, \theta)$. Nechť $x \in P^-(a, \theta)$ je libovolné. Podle věty 11.1.4 existuje $y \in (x, a) \subset P^-(a, \theta)$, že

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(y) < 0 \ .$$

Protože jmenovatel $a - x$ je kladný, je čitatel záporný a $f(a) < f(x)$. Pro $x \in P^+(a, \theta)$ je $f'(y) > 0$, jmenovatel je záporný, čitatel je tedy opět záporný a opět $f(a) < f(x)$. Proto má $f$ v $a$ ostré lokální minimum. □

Když $f''(a) = 0$, tvrzení nic neříká. Tento případ lze částečně rozhodnout zobecněním tvrzení na derivace řádů $> 2$.

## 11.5 Konvexita a konkavita

• *Konvexita a konkavita funkcí.* Nechť $B := (c, d) \in \mathbb{R}^2$ je bod v rovině a $\ell$ je nesvislá přímka, daná rovnicí $y = sx + b$. Platí-li nerovnost $d \geq sc + b$, resp. $d > sc + b$, píšeme $B \geq \ell$, resp. $B > \ell$, a řekneme, že $B$ *leží nad* $\ell$, resp. že $B$ *leží ostře nad* $\ell$. Otočením nerovností definujeme, že $B$ *leží pod* $\ell$, resp. že $B$ *leží ostře pod* $\ell$, symbolicky $B \leq \ell$, resp. $B < \ell$.

**Definice 11.5.1 (konvexní a konkávní)** *Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Je (na $I$) konvexní, pokud pro každou trojici čísel $a < b < c$ v $I$ platí „nerovnost“*

$$(b,\, f(b)) \leq \kappa(a,\, f(a),\, c,\, f(c))\ .$$

*Je-li tato „nerovnost“ ostrá, je $f$ (na $I$) ryze konvexní. Platí-li opačné „nerovnosti“, nazveme funkci $f$ konkávní, resp. ryze konkávní (na $I$).*

Připomínáme, že $\kappa(a, f(a), c, f(c))$ je sečna grafu $G_f$ jdoucí body $(a, f(a))$ a $(c, f(c))$. Typickým příkladem ryze konvexní funkce je

$$f(x) = x^2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ .$$

Funkce

$$f(x) = -x^2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

pak je ryze konkávní. Obecně $f\colon I \to \mathbb{R}$ je (ryze) konvexní $\iff$ $-f$ je (ryze) konkávní. (Ryzí) konvexita, resp. (ryzí) konkavita, se zachovává při zúžení funkce na podinterval.

Uvedeme bez důkazu zajímavý fakt, že konvexita a konkavita implikují spojitost.

**Věta 11.5.2 ($\exists$ jednostranné derivace)** *Každá konvexní, resp. konkávní, funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ má vlastní jednostranné derivace*

$$f'_-,\ f'_+ \colon I \to \mathbb{R}$$

*a ty jsou neklesající, resp. nerostoucí.*

Podle tvrzení 5 v minulé přednášce pak $f$ je v každém bodě $b \in I$ zleva i zprava spojitá a je tedy spojitá na $I$. Ovšem derivace $f'(b)$ nemusí vždy existovat, jak ukazuje konvexní funkce $|x|$.

**Věta 11.5.3 (konvexita a konkavita a $f''$)** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a spojitá funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ má v každém $b \in I^0$ druhou derivaci $f''(b) \in \mathbb{R}^*$, i nevlastní. Pak platí následující.*

1. *$f'' \geq 0$, resp. $f'' \leq 0$, na $I^0 \Rightarrow f$ je na $I$ konvexní, resp. konkávní.*

*2. $f'' > 0$, resp. $f'' < 0$, na $I^0 \Rightarrow f$ je na $I$ ryze konvexní, resp. ryze konkávní.*

Pro důkaz této věty budeme potřebovat následující geometrické lemma, jehož důkaz ponecháme jako cvičení. Říká, že když jdeme zleva doprava a na nesvislou úsečku $(a, a')(b, b')$ napojíme další nesvislou úsečku $(b, b')(c, c')$ se stejným či větším sklonem, pak společný bod $(b, b')$ leží pod přímkou jdoucí krajními body $(a, a')$ a $(c, c')$.

**Lemma 11.5.4 (o sklonech)** *Nechť $(a, a')$, $(b, b')$ a $(c, c')$ jsou v $\mathbb{R}^2$ a je $a < b < c$. Pak*

$$\frac{b' - a'}{b - a} \leq \frac{c' - b'}{c - b} \Rightarrow (b,\, b') \leq \kappa(a,\, a',\, c,\, c')\ .$$

*Dále ostrá nerovnost implikuje ostrou „nerovnost“ a obě tyto implikace platí i pro opačné nerovnosti a „nerovnosti“.*

**Důkaz věty 11.5.3.** Předpoklad existence $f''$ znamená, že existuje vlastní $f' \colon I^0 \to \mathbb{R}$. Spojitost $f$ musíme předpokládat, aby platila i v krajních bodech intervalu $I$. Nechť $f'' \geq 0$ na $I^0$, další tři případy v 1 a 2 se proberou podobně. Nechť $a < b < c$ jsou tři libovolná čísla v $I$. Podle věty 11.1.4 existují $y \in (a, b)$ a $z \in (b, c)$, že

$$s := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(y) \ \text{ a } \ t := \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(z)\ .$$

Podle věty 11.3.1 je $f'$ na $I^0$ neklesající, protože $f''$ je nezáporná. Protože $y < z$, je sklon $s = f'(y)$ úsečky $(a, f(a))(b, f(b))$ nejvýše roven sklonu $t = f'(z)$ úsečky $(b, f(b))(c, f(c))$. Podle předchozího lemmatu tak bod $(b, f(b))$ leží pod přímkou

$$\kappa(a,\, f(a),\, c,\, f(c))\ .$$

Tím je splněna podmínka v definici 11.5.1 a $f$ je na $I$ konvexní. □

• *Inflexní body.* Lze je definovat různě, ale pro nás to jsou ty body grafu funkce, kde přechází z jedné strany tečny na druhou. Přesná definice následuje.

**Definice 11.5.5 (inflexe)** *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, kde $a$ je* OLB *množiny $M$, $f \colon M \to \mathbb{R}$ a $\ell$ je tečna ke $G_f$ v $(a, f(a))$. Bod $(a, f(a))$ nazveme inflexním bodem grafu funkce $f$, pokud existuje $\delta$, že pro každé $x \in P^-(a, \delta) \cap M$ a každé $x' \in P^+(a, \delta) \cap M$ je*

$$(x,\, f(x)) \leq \ell \ \text{ a } \ (x',\, f(x')) \geq \ell\ ,$$

*anebo vždy platí opačné „nerovnosti“.*

Například bod $(0, 0)$ je inflexním bodem grafu funkce

$$f(x) = x^3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,$$

protože v něm $G_f$ přechází z dolní na horní stranu tečny $y = 0$ (tento příklad spadá pod větu 11.5.7).

Následující tvrzení podává nutnou podmínku pro inflexi: funkce je v daném bodě diferencovatelná (aby tam existovala tečna) a druhá derivace neexistuje nebo je nulová.

**Tvrzení 11.5.6 (inflexe není)** *Nechť $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a existuje druhá derivace $f''(a) \in \mathbb{R}^*$, která ale není nulová. Pak*

$$(a, f(a)) \text{ není inflexním bodem grafu funkce } f\ .$$

**Důkaz.** Předpoklad o $f''$ znamená, že (po případném zmenšení $\delta$) existuje vlastní $f'\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. Nechť $f''(a) > 0$, případ s $f''(a) < 0$ se probere podobně. Nechť $\ell$ je tečna ke $G_f$ v $(a, f(a))$, takže má sklon $f'(a)$ a prochází bodem $(a, f(a))$. Podle tvrzení 11.3.3 existuje $\theta \le \delta$, že pro každé $x \in P^-(a,\theta)$ a každé $x' \in P^+(a,\theta)$ je

$$f'(x) < f'(a) \ \text{ a } \ f'(x') > f'(a)\ . \tag{1}$$

Nechť $x \in P^-(a,\theta)$ a $x' \in P^+(a,\theta)$ jsou libovolná čísla a $s$ a $t$ jsou po řadě sklony sečen

$$\kappa(x,\, f(x),\, a,\, f(a)) \ \text{ a } \ \kappa(a,\, f(a),\, x',\, f(x'))$$

grafu $G_f$. Díky nerovnostem (1) a větě 11.1.4 o střední hodnotě snadno vidíme, že $s < f'(a) < t$. Tedy

$$(x,\, f(x)) > \ell \wedge (x',\, f(x')) > \ell$$

a podmínka v definici 11.5.5 není splněna. □

Postačující podmínku pro inflexi uvedeme bez důkazu.

**Věta 11.5.7 (inflexe je)** *Nechť $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, pro každé $b \in U(a,\delta)$ existuje vlastní $f''(b)$, $f''(a) = 0$, $f'' \ge 0$ na $P^-(a,\delta)$ a $f'' \le 0$ na $P^+(a,\delta)$, anebo tyto dvě nerovnosti platí otočené. Pak*

$$(a,\, f(a)) \text{ je inflexním bodem grafu funkce } f\ .$$

• *Asymptoty funkce.* Asymptota funkce je přímka, která může být i svislá a k níž se graf funkce neomezeně blíží.

**Definice 11.5.8 (svislé asymptoty)** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý limitní bod množiny $M$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Když*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty\ ,$$

*nazveme přímku $x = b$ levou svislou asymptotou funkce $f$. Pravé svislé asymptoty se definují podobně.*

Například $x = 0$ je levou i pravou svislou asymptotou funkce $f(x) = 1/x\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a je pravou svislou asymptotou funkce $f(x) = \log x\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

**Definice 11.5.9 (asymptoty v nekonečnu)** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ je limitní bod množiny $M$, $s, b \in \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Když*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - sx - b) = 0 \,,$$

*nazveme přímku $y = sx + b$ asymptotou funkce $f$ v $+\infty$. Asymptoty v $-\infty$ se definují podobně.*

Patrně je $y = sx+b$ asymptotou funkce $f$ v $+\infty$, právě když $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = s$ a $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - sx) = b$. Analogicky pro asymptoty v $-\infty$. Například $y = 0 = 0x + 0$ je asymptotou funkce $f(x) = 1/x$ v $+\infty$ i v $-\infty$.

## 11.6 Průběh funkce

• *Určení průběhu funkce.* Určení průběhu funkce $f$, obvykle dané vzorcem, začneme určením jejího definičního oboru, tedy množiny $M \subset \mathbb{R}$ maximální vzhledem k inkluzi, že $f\colon M \to \mathbb{R}$. Skoro vždy to je sjednocení nejvýše spočetně mnoha intervalů. Určíme, zda $f$ není speciálního tvaru (sudá, lichá, periodická, ...). Určíme, kde je $f$ spojitá a kde má $f'$. V bodech nespojitosti $f$ a v limitních bodech množiny $M$ ležících mimo $M$ nalezneme jednostranné limity. Určíme průsečíky $G_f$ se souřadnými osami a určíme obraz $f[M]$. Spočteme i jednostranné derivace, může pomoci tvrzení 11.3.5. Pomocí věty 11.3.1 určíme maximální intervaly monotonie. Najdeme lokální a globální extrémy.

Určíme, kde existuje $f''$, a pomocí věty 11.5.3 určíme maximální intervaly konvexity a konkavity. Pomocí tvrzení 11.5.6 a věty 11.5.7 nalezneme inflexní body grafu. Určíme asymptoty funkce $f$ a pak případně rukou či počítačem načrtneme její graf.

**Příklad 1.** Nechť

$$f(x) := \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \,.$$

Definiční obor je

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\pi n - \pi/2,\, \pi n + \pi/2) \,.$$

Funkce $f$ je $\pi$-periodická, protože $\sin(\pi + x) = -\sin x$ a $\cos(\pi + x) = -\cos x$. Díky spojitost sinu a kosinu a díky aritmetice spojitosti je $f$ spojitá na $M$. Pro $b(n) := \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, je

$$\lim_{x\to b(n)^-} f(x) = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b(n)^+} f(x) = -\infty$$

— každá přímka $x = b(n)$ je tedy levá i pravá svislá asymptota. Ani v $-\infty$ ani v $+\infty$ asymptota neexistuje, neexistují ani limity $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Graf $G_f$

protíná osu $y$ pouze v bodě $(0,0)$ a osu $x$ právě v bodech $(b(n)-\frac{\pi}{2},0)=(\pi n,0)$, $n\in\mathbb{Z}$. Protože

$$f'(x)=1/\cos^2 x>0 \quad \text{na} \quad M\ ,$$

je $f$ na každém intervalu $(b(n)-\pi,b(n))$ rostoucí. Vzhledem k tomu a vzhledem k periodičnosti $f$ nemá žádné extrémy. Díky spojitosti $f$ (nabývání mezihodnot) a hořejším nekonečným limitám je jasné, že

$$f[M]=f[(b(n)-\pi,\,b(n))]=\mathbb{R}\ .$$

Druhá derivace je

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\colon M\to\mathbb{R}\ .$$

Protože $f''(x)=0 \iff x=b(n)-\frac{\pi}{2}$, $f''<0$ na $(b(n)-\pi,b(n)-\frac{\pi}{2})$ a $f''>0$ na $(b(n)-\frac{\pi}{2},b(n))$, je $f$ na $(b(n)-\pi,b(n)-\frac{\pi}{2}]$ ryze konkávní, na $[b(n)-\frac{\pi}{2},b(n))$ ryze konvexní a inflexní body jsou právě

$$\big(b(n)-\tfrac{\pi}{2},\,0\big)=(\pi n,\,0)\,,\ \ n\in\mathbb{Z}\ .$$

Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

**Příklad 2.** (Podle skript R. Černý a M. Pokorný, *Základy matematické analýzy pro studenty fyziky. 1*, MatfyzPress, Praha 2020, str. 193–194.) Nechť

$$f(x):=\arcsin\big(2x/(1+x^2)\big)\ .$$

Definiční obor je

$$M=\mathbb{R}\ ,$$

protože definiční obor arkus sinu je $[-1,1]$ a $2|x|\le 1+x^2$ pro každé $x\in\mathbb{R}$ ($x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2\ge 0$). Tato funkce je lichá, tj. $f(-x)=-f(x)$, protože funkce $\sin x$, $\arcsin x$ a $\frac{2x}{1+x^2}$ jsou liché. Podle vět o spojitosti inverzní funkce, racionální funkce a složené funkce je $f$ spojitá na $M$. Patrně

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\arcsin(0)=0\ ,$$

protože $\frac{2x}{1+x^2}\to 0$ pro $x\to\pm\infty$, a $y=0=0x+0$ tak je asymptotou funkce $f$ v $-\infty$ i v $+\infty$. Nemá svislé asymptoty. $G_f$ protíná obě osy právě a jen v počátku, v bodě $(0,0)$. Vzorce pro derivaci arkus sinu, složené funkce a podílu dávají, že na $\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{2x}{1+x^2}\ne\pm 1\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ se

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x/(1+x^2))^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\\
&= 2\cdot\frac{(1-x^2)/(1+x^2)^2}{|(1-x^2)/(1+x^2)|}=2\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{2\cdot\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}\ .
\end{aligned}$$

Patrně $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \mp 1$ a podle tvrzení 11.3.5 se $f'_\pm(1) = \mp 1$. Vzhledem k lichosti $f$ se $f'_\pm(-1) = \pm 1$. Protože $f' < 0$ na $(-\infty, -1)$, $f' > 0$ na $(-1, 1)$ a $f' < 0$ na $(1, +\infty)$, podle věty 11.3.1 $f$ na $(-\infty, -1]$ klesá, na $[-1, 1]$ roste a na $[1, +\infty)$ klesá. Též $f(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f(x) > 0$ pro $x > 0$ (a $f(0) = 0$). Podle těchto intervalů monotonie a znamének a podle nulových limit výše vidíme, že $f$ má v $x = -1$ ostré globální minimum s hodnotou $f(-1) = -\pi/2$, že v $x = 1$ má symetricky (díky lichosti) ostré globální maximum s hodnotou $f(1) = \pi/2$ a že nemá žádné další lokální extrémy. Z těchto extrémů a spojitosti $f$ (nabývání mezihodnot) plyne, že

$$f[M] = f[\mathbb{R}] = [-\pi/2,\, \pi/2]\ .$$

Druhá derivace se na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ rovná

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot \operatorname{sgn}(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}\ .$$

Protože $f'' < 0$ na $(-\infty, -1)$, $f'' > 0$ na $(-1, 0)$, $f'' < 0$ na $(0, 1)$, $f'' > 0$ na $(1, +\infty)$ a $f''(x) = 0 \iff x = 0$ (druhé derivace $f''(\pm 1)$ neexistují), podle věty 11.5.3, tvrzení 11.5.6 a věty 11.5.7 je $f$ na $(-\infty, -1]$ ryze konkávní, na $[-1, 0]$ ryze konvexní, na $[0, 1]$ ryze konkávní, na $[1, +\infty)$ ryze konvexní a $(0, 0)$ je jediný inflexní bod (v bodech $(-1, f(-1))$ a $(1, f(1))$ neexistují tečny). Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

# Kapitola 12

# Přednáška 9. Taylorovy rozvoje. Primitivní funkce

V kapitole rozvíjející devátou přednášku jsme se dostali už k Taylorovým polynomům a řadám. V jejím závěru obrátíme operaci derivace funkce a dostaneme primitivní funkce, kterým se také říká antiderivace. V podkapitole 12.1 dokážeme větu 12.1.6 o jednoznačnosti Taylorova polynomu a v tvrzení 12.1.9 odvodíme devět vzorců pro Taylorovy polynomy elementárních funkcí se středem v nule.

V podkapitole 12.2

## 12.1 Taylorovy polynomy

- *Aproximace Taylorovým polynomem* zobecňuje lokální lineární aproximaci

$$f(x) = f(b) + f'(b) \cdot (x - b) + o(x - b), \quad (x \to b) \ ,$$

funkce $f$ poblíž bodu $b$, kde je diferencovatelná, na polynom obecného stupně. Ten je definovaný následujícím způsobem.

**Definice 12.1.1 (Taylorův polynom)** *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $b \in M \subset \mathbb{R}$, $b$ je limitní bod množiny $M$ a je dána taková funkce $f \colon M \to \mathbb{R}$, že*

$$b \in D^{(n)}(f) \ .$$

*Pro $n = 0$ tím rozumíme spojitost $f$ v $b$. Polynomu*

$$\begin{aligned} T_n^{f,b}(x) &:= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(b)}{j!}(x-b)^j \\ &= f(b) + f'(b) \cdot (x-b) + \frac{f''(b)}{2} \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \cdot (x-b)^n \end{aligned}$$

*říkáme Taylorův polynom funkce $f$ řádu $n$ se středem v bodu $b$.*

Zřejmě $T_0^{f,b}(x) = f(b) = T_n^{f,b}(0)$ a hořejší lineární aproximace v okolí bodu diferencovatelnosti je $T_1^{f,b}(x)$.

**Úloha 12.1.2** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 12.1.3 (identita pro $T_n^{f,b}(x)$)** *V situaci definice 12.1.1 pro $n \geq 1$ platí identita*

$$\left(T_n^{f,\,b}(x)\right)' = T_{n-1}^{f',\,b}(x)\ .$$

**Lemma 12.1.4 (o nulovém polynomu)** *Pro všechna reálná čísla $b$ a $a_0$, $a_1$, $\ldots$, $a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, platí implikace*

$$\lim_{x\to b} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{(x-b)^n} = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0\ .$$

**Důkaz.** Polynom v čitateli označíme jako $p(x)$ a postupujeme indukcí podle $n$. Pro $n = 0$ implikace platí, $a_0/1 \to 0$ dává $a_0 = 0$. Nechť $n > 0$ a platí limita v předpokladu implikace. Pak nutně $p(b) = \lim_{x\to b} p(x) = 0$. Tedy $b$ je kořenem $p(x)$ a $p(x) = (x-b)\cdot q(x)$, kde $q(x)$ je reálný polynom stupně nejvýše $n-1$. Z

$$0 = \lim_{x\to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}}$$

indukcí plyne, že $q(x)$ je nulový polynom. To je tedy i $p(x)$. □

**Úloha 12.1.5** *Proč je na konci důkazu $p(x)$ nulový polynom?*

Následující věta uvádí základní vlastnost Taylorova polynomu.

**Věta 12.1.6 (aproximace Taylorovým polynomem)** *V situaci definice 12.1.1 je polynom $T_n^{f,b}(x)$ jediný reálný polynom $p(x)$ stupně nejvýše $n$ s vlastností, že*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x) - p(x)}{(x-b)^n} = 0\ .$$

**Důkaz.** Nejprve ukážeme, že pro $p(x) = T_n^{f,b}(x)$ platí uvedená limita. Pro $n = 0$ to plyne ze spojitosti $f$ v $b$. Pro $n = 1$ se podle aritmetiky limit funkcí limita

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x) - \overbrace{(f(b) + f'(b)\cdot(x-b))}^{T_1^{f,\,b}(x)}}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \lim_{x\to b} f'(b) = f'(b) - f'(b)$$

rovná nule. A pro $n \geq 2$ podle l'Hospitalova pravidla, tvrzení 12.1.3 a indukce podle $n$ rovněž dostáváme, že

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to b} \frac{f(x) - T_n^{f,\,b}(x)}{(x-b)^n} &= \lim_{x\to b} \frac{\left(f(x) - T_n^{f,\,b}(x)\right)'}{\left((x-b)^n\right)'} \\
&= \frac{1}{n} \lim_{x\to b} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',\,b}(x)}{(x-b)^{n-1}} \\
&= (1/n)\cdot 0 = 0\ .
\end{aligned}$$

Na druhou stranu nechť $p(x)$ je libovolný reálný polynom stupně nejvýše $n$, pro nějž platí uvedená limita. Pak, podle aritmetiky limit funkcí a první části,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b}\frac{p(x)-T_n^{f,\,b}(x)}{(x-b)^n} &= \lim_{x\to b}\frac{p(x)-f(x)}{(x-b)^n}+\lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_n^{f,\,b}(x)}{(x-b)^n}\\ &= 0+0=0\,.\end{aligned}$$

Podle předešlého lemmatu je tedy polynom v prvním čitateli identicky nulový a $p(x)=T_n^{f,b}(x)$. □

**Úloha 12.1.7** *Nemohli bychom v první části předchozího důkazu postupovat pomocí l'Hospitalova pravidla už od $n=1$?*

Shrneme aproximaci funkce Taylorovým polynomem.

**Důsledek 12.1.8 (Taylorova aproximace)** *V situaci definice 12.1.1 pro $x\to b$ platí, že*

$$f(x)=T_n^{f,\,b}(x)+o((x-b)^n)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(b)}{j!}(x-b)^j+\underbrace{o((x-b)^n)}_{e(x)}\,.$$

Jak víme, značení $o$ zde znamená, že $\lim_{x\to b}e(x)/(x-b)^n=0$.

• *Taylorovy polynomy elementárních funkcí.* Odvodíme tyto Taylorovy polynomy. Pro jednoduchost zápisu se omezíme na střed v nule, tj. na $b=0$.

**Tvrzení 12.1.9 (přehled Taylorových polynomů)** *Pro každé $n\in\mathbb{N}_0$ platí následující vzorce.*

1. *Funkce $f(x)=\exp x$ má v nule Taylorův polynom*

$$T_n^{f,0}(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\,.$$

2. *Funkce $f(x)=\sin x$ má v nule Taylorův polynom*

$$T_{2n+1}^{f,0}(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}\,.$$

3. *Funkce $f(x)=\cos x$ má v nule Taylorův polynom*

$$T_{2n}^{f,0}(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{2j}}{(2j)!}\,.$$

4. *Pro každé reálné $a$ má funkce $f(x) = (1+x)^a$ v nule Taylorův polynom*

$$T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j} x^j \ ,$$

*kde*

$$\binom{a}{j} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-j+1)}{j!} \ ,$$

*s* $\binom{a}{0} := 1$, *je* zobecněný binomický koeficient.

5. *Funkce $f(x) = \log(1+x)$ má v nule Taylorův polynom*

$$T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$$

*pro $n > 0$ a $T_0^{f,0}(x) = 0$.*

6. *Funkce $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$ má v nule Taylorův polynom*

$$T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j}$$

*pro $n > 0$ a $T_0^{f,0}(x) = 0$.*

7. *Funkce $f(x) = \arctan x$, to jest inverz tangensu, má v nule Taylorův polynom*

$$T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \ .$$

8. *Funkce $f(x) = \arcsin x$, to jest inverz sinu, má v nule Taylorův polynom*

$$T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{-1/2}{j} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{2j+1} \ .$$

9. *Funkce $f(x) = \arccos x$, to jest inverz kosinu, má v nule Taylorův polynom*

$$T_{2n+1}^{f,0}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{j=0}^{n} \binom{-1/2}{j} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{2j+1} \ .$$

**Důkaz.** 1. Tento vzorec přenecháváme úloze 12.1.10.

2. Plyne to z rovností $\sin^{(j)}(x) = \sin x$ pro $j \equiv 0 \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = \cos x$ pro $j \equiv 1 \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = -\sin x$ pro $j \equiv 2$, $\pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = -\cos x$ pro $j \equiv 3 \pmod 4$, $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$.

3. Toto odvození je podobné předchozímu.

4. Na intervalu $(-1,1)$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ a každé $a \in \mathbb{R}$ platí, že

$$((1+x)^a)^{(j)} = a(a-1)\dots(a-j+1)(1+x)^{a-j}\ ,$$

s $((1+x)^a)^{(0)} = (1+x)^a$, a $(1+0)^{a-j} = 1$. Viz úlohu 12.1.11.

5. Na intervalu $(-1,1)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí, že

$$\begin{aligned}(\log(1+x))^{(j)} &= (-1)(-2)\dots(-j+1)\cdot(1+x)^{-j}\\ &= (-1)^{j+1}(j-1)!\cdot(1+x)^{-j}\end{aligned}$$

a $(\log(1+x))^{(0)} = \log(1+x)$. Dále platí, že $\log(1+0) = 0$ a $(1+0)^{-j} = 1$.

6. Toto plyne z předešlého vzorce, protože na intervalu $(-1,1)$ se

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\log(1-x) = -\log(1+(-x))\ .$$

7. $(\arctan x)^{(0)} = \arctan x$ a

$$(\arctan x)^{(1)} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)\ .$$

Pro každé $j \in \mathbb{N}$ se tak

$$(\arctan x)^{(j)} = -\frac{i}{2}\cdot(-1)^{j-1}(j-1)!\left((x-i)^{-j} - (x+i)^{-j}\right)\ .$$

Dále $(\arctan x)^{(0)}(0) = 0$, pro každé sudé $j \geq 2$ máme rovněž $(\arctan x)^{(j)}(0) = 0$ a pro každé liché $j \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}(\arctan x)^{(j)}(0) &= \frac{i}{2}\cdot\underbrace{(-1)^{j-1}}_{=i^{2j-2}}(j-1)!\cdot 2\cdot i^{-j}\\ &= i^{j-1}(j-1)! = (-1)^{(j-1)/2}(j-1)!\ .\end{aligned}$$

Derivovali jsme ale komplexní funkce reálné proměnné. Tento Taylorův polynom odvodíme ještě jednou jiným způsobem bez pomoci $\mathbb{C}$ v důsledku 12.1.14.

8 a 9. Viz důsledek 12.1.14. □

**Úloha 12.1.10** *Dokažte vzorec pro Taylorův polynom exponenciály v části 1.*

**Úloha 12.1.11** *Pro která reálná čísla a je posloupnost Taylorových polynomů*

$$\left(T_n^{f,\,0}\ |\, n = 1,\, 2,\, \dots\right)$$

*v části 4 eventuálně konstantní?*

**Úloha 12.1.12** *Ukažte, že v částech 8 a 9 můžeme koeficient u $x^{2j+1}$ napsat ekvivalentně jako*

$$(-1)^j\binom{-1/2}{j} = \binom{j-1/2}{j}\ .$$

**Tvrzení 12.1.13 (Taylorův polynom derivace)** *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, funkce*

$$f\colon U(0,\,\delta) \to \mathbb{R}$$

*má derivaci*

$$f'\colon D(f) = U(0,\,\delta) \to \mathbb{R}$$

*a $0 \in D^{(n+1)}(f)$. Pak platí implikace ($a_j \in \mathbb{R}$)*

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + o(x^n) \Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j x^{j+1}}{j+1} + o(x^{n+1}) \quad (x \to 0)\ .$$

**Důkaz.** Pracujeme s Taylorovými polynomy se středem v 0 a předpokládáme, že platí předpoklad implikace. Podle věty 12.1.6 o jednoznačnosti Taylorova polynomu pak pro $j = 0, 1, \ldots, n$ je

$$a_j = \frac{(f')^{(j)}(0)}{j!} = \frac{f^{(j+1)}(0)}{j!}\ .$$

Podle téže věty je tedy koeficient u $x^{j+1}$ v Taylorově polynomu funkce $f$ roven

$$\frac{f^{(j+1)}(0)}{(j+1)!} = \frac{a_j}{j+1}\ .$$

□

Ze znalosti Taylorova polynomu derivace dané funkce tak dostáváme Taylorův polynom výchozí funkce (oba polynomy mají střed v nule).

**Důsledek 12.1.14 (tři aplikace)** *Platí vzorce v částech 7, 8 a 9 tvrzení 12.1.9 pro Taylorovy polynomy arkus tangensu, arkus sinu a arkus kosinu se středem v nule.*

**Důkaz.** Nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a $f(x) := \arctan x$. Pak $f(0) = 0$ a díky součtu geometrické řady máme odhad

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \quad (x \to 0)$$

(úloha 12.1.15). Z předešlého tvrzení pak plyne vzorec v části 7 tvrzení 12.1.9.

Nechť $f(x) := \arcsin x$. Pak $f(0) = 0$ a díky vzorci v části 4 tvrzení 12.1.9 pro $a = -\frac{1}{2}$ a díky větě 12.1.6 máme odhad

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{-1/2}{j} (-1)^j x^{2j} + o(x^{2n}) \quad (x \to 0)\ .$$

Z předešlého tvrzení pak plyne vzorec v části 8 tvrzení 12.1.9.

Podobně se z předešlého tvrzení odvodí vzorec v části 9 tvrzení 12.1.9 pro Taylorův polynom arkus kosinu se středem v nule. □

**Úloha 12.1.15** *Dokažte odhad $o(x^{2n})$ založený na geometrické řadě v předešlém důkazu. Nemohli jsme také použít vzorec z části 4 tvrzení 12.1.9 a větu 12.1.6?*

• *Zjišťování limit a lokálního chování funkcí pomocí Taylorových polynomů.* Využijeme důsledek 12.1.8. Pomocí polynomu $T_1^{f,0}(x)$ v části 2 tvrzení 12.1.9 třeba hned vidíme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=1+0=1\ .$$

Nebo pomocí polynomu $T_2^{f,0}(x)$ v části 3 tvrzení 12.1.9 dostáváme, že

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(\cos x-1)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(1-x^2/2-1+o(x^2))^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4/4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{4}+o(x^4)/x^4}=4\ .\end{aligned}$$

**Úloha 12.1.16** *Zjistěte, pro která čísla $\alpha\in\mathbb{R}$ je*

$$\sqrt[7]{1+x}-1+\alpha x>0$$

*na nějakém okolí $P^+(0,\delta)$.*

**Úloha 12.1.17** *Vypočítejte limitu*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}-1-x-2x^2}{x^3}\ .$$

## 12.2 Taylorovy řady

• *Taylorovy řady.* Taylorova řada funkce vznikne z jejích Taylorových polynomů prodloužením do nekonečna.

**Definice 12.2.1 (Taylorovy řady)** *Nechť $f\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ má pro každé $n\in\mathbb{N}$ vlastní $f^{(n)}\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$. Pokud pro každé $x\in U(a,\delta)$ se*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n\ ,$$

*řekneme, že funkce $f$ je na $U(a,\delta)$ součtem své Taylorovy řady $\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$ se středem v $a$.*

Taylorovy polynomy jsou tedy částečné součty Taylorových řad. Následující věta ukazuje, kdy situace v předešlé definici nastává. Pro $n\in\mathbb{N}_0$ a funkci $f\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ s vlastní $f^{(n)}(a)\in\mathbb{R}$ definujme *zbytek Taylorova polynomu* $T_n^{f,a}(x)$ jako

$$R_n^{f,a}(x):=f(x)-T_n^{f,a}(x),\ x\in U(a,\delta)\ .$$

**Věta 12.2.2 (zbytky TP)** *Nechť je $n \in \mathbb{N}_0$, $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n+1)}\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. Pak platí následující.*

1. *(Lagrangeův zbytek) $\forall\, x \in P(a,\delta)\ \exists\, c$ mezi $a$ a $x$, že*

$$R_n^{f,\,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}\ .$$

2. *(Cauchyův zbytek) $\forall\, x \in P(a,\delta)\ \exists\, c$ mezi $a$ a $x$, že*

$$R_n^{f,\,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n!} \cdot (x-a)\ .$$

**Důkaz.** Dokážeme obecněji, že pro každou funkci $g\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ s vlastní a nenulovou $g'\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ pro každé $x \in P(a,\delta)$ existuje číslo $c$ mezi $a$ a $x$, že

$$R_n^{f,\,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{g'(c)} \cdot f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n\ . \tag{R}$$

Lagrangeův zbytek pak dostáváme volbou $g(t) := (x-t)^{n+1}$ a Cauchyův volbou $g(t) := t$.

Nechť $x \in P(a,\delta)$ a funkce $g$ je, jak uvedeno. Uvažme pomocnou funkci

$$F(t) := f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!} \cdot (x-t)^i\ .$$

Na $F$, $g$ a interval $I$ s konci $a$ a $x$ použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě. Na tomto intervalu je $F$ spojitá, $F(x) = 0$, $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, $g(a) \neq g(x)$ (podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě) a na $I$ se

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!} \cdot (x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{i!} \cdot i(x-t)^{i-1} \right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n\ . \end{aligned}$$

Podle Cauchyovy věty o střední hodnotě (rovnost $(*)$) existuje číslo $c \in I^0$, že

$$-\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{g(x)-g(a)} = \frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} \overset{(*)}{=} \frac{F'(c)}{g'(c)} = -\frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n! \cdot g'(c)}\ .$$

Vztah (R) teď plyne lehkou úpravou. □

Pro všech devět vzorců pro TP výše nyní uvedeme, pro jaké $x \in \mathbb{R}$ dávají Taylorovu řadu funkce $f$ se středem v 0 konvergující k $f(x)$. Důkazy pomineme, snadno se provedou pomocí předešlé věty.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} x^n/n!$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $\sin x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$.

3. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $\cos x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$.

4. $\forall\, x \in (-1,1)$ a $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se $(1+x)^a = \sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}x^n$.

5. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\log(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}x^n/n$.

6. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} x^n/n$.

7. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\arctan x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$.

8. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\arcsin x = \sum_{n\geq 0}\binom{n-1/2}{n}x^{2n+1}/(2n+1)$.

9. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0}\binom{n-1/2}{n}x^{2n+1}/(2n+1)$.

Některé z těchto rozvojů platí i v širších oborech. Rozvoj 4 s $a \in \mathbb{N}_0$ platí pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rozvoj 5 platí i pro $x = 1$, rozvoj 6 platí i pro $x = -1$, rozvoj 7 platí i pro $x = 1$ a rozvoje 8 a 9 platí i pro $x = -1$.

Koeficienty v Taylorových řadách se dají často vyložit kombinatoricky. Uvedeme bez důkazu jeden příklad z mnoha.

**Tvrzení 12.2.3 (Bellova čísla $B_n$)** $\forall\, x \in (-1,1)$ *platí rozvoj*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1} = \exp(\exp(x) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}\ ,$$

*kde $B_n$ je počet rozkladů $n$-prvkové množiny.*

Například $B_3 = 5$ díky pěti rozkladům $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$ a $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ množiny $\{1,2,3\}$.

## 12.3 Primitivní funkce

• *Primitivní funkce.* Interval $I \subset \mathbb{R}$ je *netriviální*, pokud $I \neq \emptyset, \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Netriviální jsou přesně ty neprázdné intervaly, jejichž každý bod je jejich limitním bodem.

**Definice 12.3.1 (primitivní funkce)** *Pro funkce $F, f\colon I \to \mathbb{R}$ definované na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$ řekneme, že $F$ je primitivní (funkce) k $f$, a píšeme $F = \int f$, pokud $F$ má na $I$ vlastní derivaci a*

$$\forall\, b \in I\colon F'(b) = f(b)\ .$$

*Někdy se $F$ také nazývá antiderivací funkce $f$.*

Zdůrazňujeme, protože se v tom ostatní literatura většinou liší (neboť definuje derivace jen ve vnitřních bodech), že pro každé $b \in I$, i v krajních bodech intervalu, je zde $F'(b)$ vždy obyčejná, oboustranná derivace. Z dřívějšího výsledku o derivaci plyne, že primitivní funkce je vždy spojitá. Například $ax^2/2+bx+c$ je primitivní k lineární funkci $ax+b$ na každém netriviálním intervalu, $\mathrm{e}^x$ je na $\mathbb{R}$ primitivní sama k sobě, $c+\arcsin x$ je na $(-1,1)$ antiderivací funkce $1/\sqrt{1-x^2}$ a $2x^{3/2}/3$ je na $[0,+\infty)$ PF funkce $\sqrt{x}$.

Antiderivace dané funkce není určena jednoznačně, ale každé dvě se liší jen konstantním posunem.

**Věta 12.3.2 (nejednoznačnost PF)** *$F_1, F_2, f\colon I \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $F_1$ i $F_2$ je primitivní k $f$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$, že*

$$F_1 - F_2 = c \text{ na } I\ .$$

*Naopak, je-li $F$ primitivní k $f$, potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je také $F+c$ primitivní k $f$.*

**Důkaz.** Nechť $F_1$, $F_2$, $f$ a $I$ jsou, jak uvedeno, a $a < b$ jsou dvě libovolná čísla z $I$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě, použité pro funkci $F_1 - F_2$ a interval $[a,b]$, existuje $c \in (a,b)$, že

$$\begin{aligned} \frac{(F_1-F_2)(b)-(F_1-F_2)(a)}{b-a} &= (F_1-F_2)'(c) = F_1'(c) - F_2'(c) \\ &= f(c) - f(c) = 0\ . \end{aligned}$$

Tedy $F_1(b) - F_2(b) = F_1(a) - F_2(a)$, takže $F_1(x) - F_2(x) = c$ pro nějakou konstantu $c$ a každé $x \in I$.

Druhá část věty je jasná, $(F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$. □

Ve zbytku přednášky dokážeme existenci antiderivace ke každé spojité funkci. Nejprve si připravíme několik nástrojů.

• *Prohození limity a derivace.* V této pasáži je naším cílem věta popisující situaci, kdy lze beze změny výsledku prohodit operace limity pro $n \to \infty$ a derivování. Větu použijeme níže v důkazu věty 12.3.9 o existenci antiderivace. Nejdřív ale zavedeme bodovou a stejnoměrnou konvergenci a dokážeme Moore–Osgoodovu větu.

**Definice 12.3.3 ($f_n \to f$)** *$M \subset \mathbb{R}$ je množina a $f, f_n\colon M \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce. Když*

$$\forall\, \varepsilon\ \forall\, x \in M\ \exists\, n_0\colon n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ ,$$

*píšeme $f_n \to f$ (na $M$) a řekneme, že funkce $f_n$ konvergují na $M$ bodově k funkci $f$.*

Jinak řečeno, pro každé $x \in M$ se $\lim f_n(x) = f(x)$.

**Definice 12.3.4** ($f_n \rightrightarrows f$) *$M \subset \mathbb{R}$ je množina a $f, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce. Když*

$$\forall \varepsilon \, \exists n_0 \, \forall x \in M \colon n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ ,$$

*píšeme $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$) a řekneme, že funkce $f_n$ konvergují na $M$ stejnoměrně k funkci $f$.*

Teď se požaduje více, aby jediný index $n_0$ vyhovoval pro všechny $x \in M$. Patrně $f_n \rightrightarrows f$ implikuje, že $f_n \to f$, ale naopak to obecně neplatí.

Následující větě se také říká Moore–Osgoodova věta.

**Věta 12.3.5 (výměna limit)** *Nechť $f_n, f \colon M \to \mathbb{R}$, pro indexy $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$), $A \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M$ a $\lim_{x \to A} f_n(x) =: a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n$. Potom následující vlastní limity existují a rovnají se:*

$$\lim a_n = \lim_{x \to A} f(x), \quad tj. \quad \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to A} f_n(x) = \lim_{x \to A} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \ .$$

**Důkaz.** Z předpokladu, že $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$), plyne, že $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ je stejnoměrně Cauchyova pro $x \in M$, to jest pro každé $\varepsilon$ existuje $n_0$, že pro každé $x \in M$ a každé $m, n \geq n_0$ je

$$|f_m(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ .$$

Pro každé dva pevné indexy $m, n \geq n_0$ pak limitní přechod $\lim_{x \to A}$ dává nerovnost $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Tedy $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova posloupnost a má vlastní limitu $\lim a_n =: a \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí odhad

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{V_1} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{V_2} + \underbrace{|a_n - a|}_{V_3} \ .$$

Buď dáno $\varepsilon$. Protože $\lim a_n = a$, existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow V_3 < \varepsilon/3$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ (na $M$), existuje $n_1$, že $n \geq n_1 \Rightarrow V_1 < \varepsilon/3$ pro každé $x \in M$. Vezmeme index $m \geq \max(n_0, n_1)$. Protože $\lim_{x \to A} f_m(x) = a_m$, můžeme vzít $\delta$, že $V_2 < \varepsilon/3$ pro $n := m$ a každé $x \in P(A, \delta) \cap M$. Pro $n := m$ a každé $x \in P(A, \delta) \cap M$ tak je

$$|f(x) - a| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

a $\lim_{x \to A} f(x) = a = \lim a_n$. □

Zde je tedy věta o výměně limity a derivace.

**Věta 12.3.6 (výměna $df/dx$ a $\lim_{n \to \infty}$)** *Pro indexy $n \in \mathbb{N}$ nechť $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$, které splňují tři následující podmínky.*

1. *Pro každé $n$ existuje vlastní derivace $f_n' \colon I \to \mathbb{R}$.*

2. *$f_n' \rightrightarrows f$ (na $I$) pro nějakou funkci $f \colon I \to \mathbb{R}$.*

3. *Existuje $a \in I$, že posloupnost $(f_n(a)) \subset \mathbb{R}$ konverguje.*

*Potom $f_n \to F$ (na $I$) pro nějakou funkci $F \colon I \to \mathbb{R}$, existuje vlastní derivace $F' \colon I \to \mathbb{R}$ a*

$$F' = f \text{ na } I, \text{ tj. } \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \,.$$

**Důkaz.** Nechť $f_n$, $I$, $f$ a $a$ jsou, jak uvedeno, a $b \in I$ je libovolný bod. Nejprve dokážeme, že posloupnost $(f_n(b)) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova. Pro $b = a$ to podle podmínky 3 platí, proto můžeme předpokládat, že třeba $a < b$, případ s $b < a$ se probere podobně. Nechť je dáno $\varepsilon$. Z podmínek 2 a 3 plyne, že posloupnost funkcí $(f_n')$ je na $I$ stejnoměrně Cauchyova a že posloupnost $(f_n(a))$ je Cauchyova. Tedy existuje $n_0$, že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in I$ a také $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. Vezmeme dva libovolné indexy $m, n \geq n_0$ a na funkci $f_m - f_n$ a interval $[a, b]$ použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Tím pro nějaké číslo $c \in (a, b)$ dostaneme po řadě rovnost a odhad

$$\frac{(f_m - f_n)(b) - (f_m - f_n)(a)}{b - a} = (f_m - f_n)'(c)$$

a

$$\begin{aligned} |f_m(b) - f_n(b)| &\leq |b - a| \cdot |f_m'(c) - f_n'(c)| + |f_m(a) - f_n(a)| \\ &< (b - a)\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1) \,. \end{aligned}$$

Takže posloupnost $(f_n(b))$ je Cauchyova, tedy konvergentní, a pro každé $b \in I$ můžeme definovat

$$F(b) := \lim f_n(b) \in \mathbb{R} \,.$$

Tím jsme získali funkci $F \colon I \to \mathbb{R}$, že $f_n \to F$ (na $I$).

Dokážeme, že $F' = f$ na $I$. Použijeme předešlou větu a pak ověříme, že jsou splněny její předpoklady. Pro libovolné $b \in I$ se opravdu

$$\begin{aligned} F'(b) &= \lim_{x\to b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} \\ &= \lim_{x\to b} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \\ &\overset{\text{věta 12.3.5}}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n'(b) = f(b) \,. \end{aligned}$$

Ověříme předpoklady tohoto použití věty 12.3.5. Použili jsme ji pro posloupnost funkcí

$$g_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \colon I \setminus \{b\} \to \mathbb{R} \,.$$

Jistě $\lim_{x\to b} g_n(x) = f_n'(b)$ pro každé $n$ a také $\lim f_n'(b) = f(b)$. Zbývá ověřit, že $g_n \rightrightarrows g$ (na $I \setminus \{b\}$) pro funkci

$$g(x) := \frac{F(x) - F(b)}{x - b} \ .$$

Pro to stačí ověřit, že posloupnost $(g_n(x))$ je na $I \setminus \{b\}$ stejnoměrně Cauchyova. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I \setminus \{b\}$ platí identita

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= \frac{|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(b) - f_n(b))|}{|x - b|} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{\cancel{|x-b|} \cdot |f_m'(c) - f_n'(c)|}{\cancel{|x-b|}} \\ &= \underbrace{|f_m'(c) - f_n'(c)|}_{V}, \ c \text{ leží mezi } b \text{ a } x \ . \end{aligned}$$

Získali jsme ji v rovnosti $(*)$ Lagrangeovou větou o střední hodnotě, použitou pro funkcí $f_m(x) - f_n(x)$ a interval s konci $b$ a $x$. Podle podmínky 2 pro dané $\varepsilon$ existuje $n_0$, že pro každé $m, n \geq n_0$ a každé $c \in I$ je $|V| < \varepsilon$. Posloupnost $(g_n(x))$ je tedy na $I \setminus \{b\}$ stejnoměrně Cauchyova a důkaz je hotový. □

• *Spojitá funkce má primitivní funkci.* Abychom to dokázali, potřebujeme ještě jeden nástroj.

**Definice 12.3.7 (stejnoměrná spojitost)** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá (na $M$), pokud*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\colon a \in M \Rightarrow f[U(a,\, \delta) \cap M] \subset U(f(a),\, \varepsilon) \ .$$

Jediné $\delta$ tak vyhovuje pro všechny body $a \in M$.

**Věta 12.3.8 (spojitost na kompaktu)** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní množina. Je-li funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ spojitá, je stejnoměrně spojitá.*

**Důkaz.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní a $f\colon M \to \mathbb{R}$ není stejnoměrně spojitá. Tedy existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $n$ existují takové dva body $a_n, b_n \in M$, že $|a_n - b_n| < 1/n$, ale $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$. Využijeme kompaktnost množiny $M$ a z $(a_n)$ i $(b_n)$ vybereme konvergentní podposloupnosti s limitami v $M$. Pro jednoduchost značení předpokládáme, že už $(a_n)$ a $(b_n)$ konvergují a mají limity $\lim a_n =: a \in M$ a $\lim b_n =: b \in M$. Z $|a_n - b_n| < 1/n$ plyne, že $a = b$. Z $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$ a konvergence $(a_n)$ a $(b_n)$ k $a$ ale plyne, že pro každé $\delta$

$$f[U(a,\, \delta) \cap M] \not\subset U(f(a),\, \varepsilon/2) \ .$$

Tedy funkce $f$ není spojitá v bodu $a$ a není spojitá na $M$. □

**Věta 12.3.9 (∃ antiderivace)** *Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Taková funkce $f$ má vždy primitivní funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$.*

**Stručný důkaz.** $I$ buď nejprve kompaktní, $I = [a, b]$ s $a < b$. Funkce $g\colon I \to \mathbb{R}$ je *lomená čára*, když je spojitá a existuje dělení $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ intervalu $I$, že každá restrikce $g \mid [a_{i-1}, a_i]$ je lineární, tj. tvaru $g(x) = c_i x + d_i$. Díky větě 12.3.8

$$\forall\, n\ \exists \text{lomená čára } g_n\colon x \in I \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| < 1/n\ .$$

Protože $\int (cx + d) = cx^2/2 + dx + e$, podle tvrzení 6 minule existují $G_n\colon I \to \mathbb{R}$, že $G_n = \int g_n$ a $G_n(a) = 0$. Pak ale, protože $g_n \rightrightarrows f$ (na $I$) a $G_n' = g_n$ na $I$, podle věty 12.3.6 existuje $F\colon I \to \mathbb{R}$, že $G_n \to F$ (na $I$), ale hlavně $F' = f$ na $I$, to jest $F = \int f$.

Pokud interval $I$ není kompaktní, vyjádříme ho jako sjednocení vnořených netriviálních kompaktních intervalů $I_n$: $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ a $\bigcup_{n\geq 1} I_n = I$. Na každém $I_n$ vezmeme vhodnou $F_n = \int f \mid I_n$ a pak $F := \bigcup_{n\geq 1} F_n$ je na $I$ primitivní funkce k $f$. □

Na `https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/podrobnyduk.pdf` naleznete podrobnosti důkazu (až je ale sepíšu). P. Lundström, Primitives of continuous functions via polynomials, `https://arxiv.org/abs/2204.05012` uvádí podobný důkaz, ale s polynomy místo lomených čar. Jednodušším způsobem dokážeme tuto větu zanedlouho znovu pomocí Riemannova integrálu.

**Tvrzení 12.3.10 (existence Eulerovy konstanty $\gamma$)** *Existuje vlastní limita*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log n \right).$$

**Důkaz.** Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť $a_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log n$ a $b_n := a_n - a_{n-1}$, kde $a_0 := 0$. Dokážeme, že $b_n = O(1/n^2)$ $(n \in \mathbb{N})$. Díky úloze **??** pak posloupnost

$$(a_n) = (\textstyle\sum_{j=1}^{n} b_n)$$

konverguje k vlastní limitě.

Máme $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$ a pro každé $n \geq 3$ podle Taylorova rozvoje funkce $\log(1 + x)$ máme, že

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} - \dots\right) \\ &= \frac{-2(n-1) + n}{2n(n-1)^2} - \frac{1}{3(n-1)^3} + \frac{1}{4(n-1)^4} - \dots \\ &= -\frac{n-2}{2n(n-1)^2} - \Delta_n\ , \end{aligned}$$

kde $0 \leq \Delta_n \leq 1/3(n-1)^3$ podle věty **??**. Opravdu $b_n = O(1/n^2)$ $(n \in \mathbb{N})$. □

# Kapitola 13

# Derivace

## 13.1 Ještě k tečnám

V [70, str. 81] čteme:

> That is the unique property of the tangent to any curve at a point: it touches the curve without crossing it. If the line crossed the ellipse at $P$, part of the line would necessarily be inside it: [následuje obrázek]

Dodejme, že v tomto případu jde o tečnu k elipse $E \subset \mathbb{R}^2$. Pro každý bod $P \in E$ skutečně existuje jediná přímka $\ell$, že $\ell \cap E = \{P\}$ nebo, ekvivalentně, že $P \in \ell$ a $E \setminus \{P\}$ leží (celá či lokálně, pro elipsu je to jedno) v jediné otevřené polorovině určené přímkou $\ell$. Ta pak má plné právo nazývat se tečnou k $E$ v $P$.

Tento přístup ale selhává pro křivku

$$F = \{(x,\, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

a bod $P = (0, 0) \in F$. Každá přímka procházející bodem $P$ a ležící ve druhém a čtvrtém kvadrantu protíná $F$ pouze v bodu $P$. Neexistuje také ani přímka procházející bodem $P$, vzhledem k níž by $F \setminus \{P\}$ ležela lokálně na jedné straně. Nicméně přímka daná rovnicí $y = 0$, to jest osa $x$, je tečna k $F$ v $P$.

## 13.2 K definici derivace: Peanovy derivace

## 13.3 Existence spojitých funkcí bez derivace

## 13.4 O diferencovatelnosti skoro všude

## 13.5 Odpuzující se částice

## 13.6 Barvinokova metoda

# Kapitola 14

# Přednáška 10. Newtonův integrál

Postoupili jsme do kapitoly založené na desáté přednášce. V oddílu 14.1 definujeme rovinnou oblast pod grafem funkce. Pro funkce definované na intervalu $[a, b]$ zavedeme dvěma způsoby plochu této oblasti: pomocí tzv. Riemannových součtů a pak pomocí antiderivací. Pro spojité funkce lze použít obě definice a v důsledku 14.1.11 dokážeme, že dávají tutéž hodnotu.

V oddílu 14.2 definujeme Newtonův integrál. Ve větě 11.3.9 dokážeme s jeho pomocí druhý případ l'Hospitalova pravidla. V oddílu 14.3 dokážeme, že derivace nabývají všechny mezihodnoty (věta 14.3.2). V oddílu 14.4 uvedeme ve větě 14.4.3 metodu per partes pro hledání antiderivací a ve větě 14.4.5 dva vzorce substituční metody.

Přednáška

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI23_pred10.pdf`

byla přednesena 20. 4. 2023.

## 14.1 Plocha oblasti pod grafem

• *K čemu slouží antiderivace?* Pro počítání ploch rovinných oblastí ležících pod grafy funkcí. Jak víme, pro čísla $a, b \in \mathbb{R}$ množina

$$I(a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid \min(\{a,\, b\}) \leq x \leq \max(\{a,\, b\})\}$$

představuje uzavřený interval s konci $a$ a $b$. Pro $M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$ grafem funkce $f$ rozumíme rovinnou množinu $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset \mathbb{R}^2$. Podobně definujeme

$$G_{\leq f} := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in M \wedge y \in I(0,\, f(x))\} \subset \mathbb{R}^2\ ,$$

množinu bodů v rovině ležících mezi $G_f$ a osou $x$. Nazveme ji *oblastí pod grafem (funkce $f$)*. Pro definiční obory $M = I$ rovné netriviálním intervalům se budeme zabývat otázkou, jak spočítat plochu této oblasti. Budeme se věnovat jen omezeným intervalům. Použijeme dva přístupy, Riemannovy součty a primitivní funkce.

**Úloha 14.1.1** *Platí, že $G_f \subset G_{\leq f}$?*

• *První metoda: Riemannovy součty.* Nechť $M = I = [a, b]$ pro reálná čísla $a < b$. *Dělením $\overline{a}$ (intervalu $I$)* rozumíme každou takovou $k+1$-tici bodů $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, $k \in \mathbb{N}$, že

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k = b\,.$$

Jeho *norma* $\|\overline{a}\| > 0$ je největší délka $a_i - a_{i-1}$ podintervalu dělení. *Dělení (intervalu $I$) s body* je každá taková dvojice $(\overline{a}, \overline{t})$, že $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$ je dělení intervalu $I$ a $k$-tice $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ splňuje, že $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ pro každé $i \in [k]$.

**Definice 14.1.2 (Riemannovy součty)** *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla, je dána funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a $(\overline{a}, \overline{t})$ je dělení intervalu $[a, b]$ s body. Riemannův součet pro $f$ a $(\overline{a}, \overline{t})$ je konečný součet*

$$R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) := \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)\,.$$

Geometricky jde o „plochu“ *sloupcového grafu*

$$B_f := \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1},\, a_i] \times I(0,\, f(t_i))$$

složeného z $k$ sloupců ve tvaru obdélníků s rozměry $(a_i - a_{i-1}) \times |f(t_i)|$. Sloupce pod osou $x$ s $f(t_i) < 0$ přispívají zápornou plochou. Protože $G_{\leq f}$ a $B_f$ se zhruba shodují, je rozumné předpokládat, že pro malou normu $\|\overline{a}\|$ součet $R(\overline{a}, \overline{t}, f)$ dobře aproximuje „plochu“ množiny $G_{\leq f}$.

**Tvrzení 14.1.3 (cauchyovost)** *Nechť je funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\ \big(\|\overline{a}\|,\, \|\overline{b}\| < \delta \Rightarrow |R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - R(\overline{b},\, \overline{u},\, f)| < \varepsilon\big)\,.$$

**Důkaz.** Nechť $f$ je, jak uvedeno, a je dáno $\varepsilon$. Víme, že $f$ je stejnoměrně spojitá (věta 12.3.8). Tedy existuje $\delta$, že pro každé $c, d \in [a, b]$ platí, že $|c - d| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(d)| < \varepsilon/2(b - a)$. Nechť $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{b}, \overline{u})$, kde

$$\overline{a} = (a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_k) \ \text{ a } \ \overline{b} = (b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_l) \ \text{ s } \ \|\overline{a}\|,\, \|\overline{b}\| < \delta\,,$$

jsou dělení intervalu $[a,b]$ s body. Nejprve navíc předpokládáme, že $\overline{a} \subset \overline{b}$, takže $a_0 = b_{i_0} = a$, $a_1 = b_{i_1}$, …, $a_k = b_{i_k} = b$ pro nějaké indexy $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = l$. Pak

$$\begin{aligned}
|R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - R(\overline{b},\, \overline{u},\, f)| &= \left| \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i) - \sum_{i=1}^{l} (b_i - b_{i-1}) \cdot f(u_i) \right| \\
&\overset{(1)}{=} \left| \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_j - b_{j-1}) \cdot (f(t_r) - f(u_j)) \right| \\
&\overset{(2)}{<} \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_j - b_{j-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \overset{(3)}{=} (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} \,.
\end{aligned}$$

Jsou-li $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{b}, \overline{u})$ obecná dělení intervalu $[a,b]$ s body splňující $\|\overline{a}\|, \|\overline{b}\| < \delta$, vezmeme dělení intervalu $[a,b]$ s body $(\overline{c}, \overline{v})$ pro $\overline{c} := \overline{a} \cup \overline{b}$ a libovolné $\overline{v}$. Pak též $\|\overline{c}\| < \delta$. Protože $\overline{a} \subset \overline{c}$ a $\overline{b} \subset \overline{c}$, podle předchozího případu je $|R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{b}, \overline{u}, f)|$ nejvýše

$$|R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - R(\overline{c},\, \overline{v},\, f)| + |R(\overline{c},\, \overline{v},\, f) - R(\overline{b},\, \overline{u},\, f)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

□

**Úloha 14.1.4** *Proč v důkazu platí rovnosti* (1) *a* (3) *a nerovnost* (2)*?*

**Definice 14.1.5 (limita Riemannových součtů)** *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$ & $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Když pro každou posloupnost $\big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ dělení intervalu $[a,b]$ s body platí, že*

$$\lim \|\overline{a_n}\| = 0 \Rightarrow \lim R(\overline{a_n},\, \overline{t_n},\, f) = c \,,$$

*napíšeme, že $\lim_{\|\overline{a}\| \to 0} R(\overline{a}, \overline{t}, f) = c$, a řekneme, že Riemannovy součty funkce $f$ mají limitu $c$.*

**Úloha 14.1.6** *Dokažte jednoznačnost těchto limit. (Je to trochu chyták.)*

**Důsledek 14.1.7 (existence limit R. součtů)** *Pro spojitou funkci mají její Riemannovy součty vždy limitu.*

**Důkaz.** Nechť $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s body splňující, že $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Podle tvrzení 14.1.3 je posloupnost $\big(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)\big)$ Cauchyova, a proto má limitu $c \in \mathbb{R}$. Pokud $\big((\overline{b_n}, \overline{u_n})\big)$ je další posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s body a s $\lim \|\overline{b_n}\| = 0$, podle tvrzení 14.1.3 je

$$\lim_{n \to \infty} \big(R(\overline{a_n},\, \overline{t_n},\, f) - R(\overline{b_n},\, \overline{u_n},\, f)\big) = 0 \,.$$

Takže i $\lim R(\overline{b_n}, \overline{u_n}, f) = c$. □

• *Druhá metoda: Lagrange.* Předpokládáme, že $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a $\overline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ je dělení intervalu $[a,b]$. Nalezneme body $\overline{c} = (c_1, \dots, c_k)$, že se Riemannův součet

$$R(\overline{a},\, \overline{c},\, f) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(c_i) = F(b) - F(a)\ .$$

Získáme je pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci $F$ a intervaly $[a_{i-1}, a_i]$. Existují totiž body $c_i \in (a_{i-1}, a_i)$, že $\frac{F(a_i)-F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$, a $F(b) - F(a)$ se tak opravdu rovná

$$\sum_{i=1}^{k} (F(a_i) - F(a_{i-1})) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(c_i) = R(\overline{a},\, \overline{c},\, f)\ .$$

**Úloha 14.1.8** *Proč se $F(b) - F(a)$ rovná $\sum_{i=1}^{k} (F(a_i) - F(a_{i-1}))$?*

Podáme tedy dvě definice plochy oblasti $G_{\leq f}$ pod grafem funkce.

**Definice 14.1.9 (plocha pod grafem 1)** *Plochu $A_f \in \mathbb{R}$ oblasti $G_{\leq f}$ pod grafem funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme dvěma způsoby.*

1. *(I. Newton) $A_f := F(b) - F(a)$ pro libovolnou funkci $F$ primitivní k $f$ (pokud $F$ existuje).*
2. *(B. Riemann) $A_f := \lim_{\|\overline{a}\| \to 0} R(\overline{a}, \overline{t}, f)$ (pokud tato limita existuje).*

**Úloha 14.1.10** *Ukažte, že hodnota v Newtonově definici nezávisí na volbě primitivní funkce $F$.*

První definice je jednodušší než druhá, ale druhou lze použít v případech, kdy první použít nelze. Později uvidíme, že oblasti použitelnosti obou definic nejdou porovnat. Ukážeme, že pro spojité funkce obě definice poskytují stejnou hodnotu $A_f$.

**Důsledek 14.1.11 (Riemann = Newton)** *Když je funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá a funkce $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je k ní primitivní, pak*

$$\lim_{\|\overline{a}\| \to 0} R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) = F(b) - F(a)\ .$$

**Důkaz.** Nechť $f$ a $F$ jsou, jak je uvedeno, a $\big((\overline{a_n}, \overline{t_n})\big)$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s body, pro níž $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Podle argumentu výše pro každé $n$ existují body $c_{n,i} \in (a_{n,i-1}, a_{n,i})$, že $F(b) - F(a) = R(\overline{a_n},\, \overline{c_n},\, f)$. Podle AL posloupností se

$$\lim R(\overline{a_n},\, \overline{t_n},\, f) = \underbrace{\lim \big(R(\overline{a_n},\, \overline{t_n},\, f) - R(\overline{a_n},\, \overline{c_n},\, f)\big)}_{= 0 \text{ podle tvrzení } 14.1.3} +$$
$$+ \lim \underbrace{R(\overline{a_n},\, \overline{c_n},\, f)}_{= F(b) - F(a)} = 0 + F(b) - F(a) = F(b) - F(a)\ .$$

Dostali jsme uvedenou rovnost. □

Pokud například $f(x) = x^2 \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, pak $F(x) = x^3/3$ je na $[-1, 1]$ primitivní k $f$. Podle Newtonovy definice se plocha oblasti

$$G_{\leq f} = \{(x,\, y) \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

rovná

$$A_f = F(1) - F(-1) = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

**Úloha 14.1.12** *Vypočítejte plochu $A_f$ pro funkci $f(x) = -\sin x \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$.*

## 14.2 Newtonův integrál

• *Newtonův integrál.* Zavedeme první integrál v těchto přednáškách. Později definujeme další integrály.

**Definice 14.2.1 (Newtonův integrál)** *Nechť $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$. Když má funkce $f$ primitivní funkci $F \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ a existují vlastní limity*

$$F_a := \lim_{x \to a} F(x) \;\; a \;\; F_b := \lim_{x \to b} F(x)\,,$$

*definujeme Newtonův integrál funkce $f$ (přes interval $(a, b)$) jako jejich rozdíl*

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f := F_b - F_a = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)\,.$$

*Plochu $A_f$ oblasti $G_{\leq f}$ pak definujeme jako $A_f := (\mathrm{N}) \int_a^b f$.*

Jak víme, hodnota $(\mathrm{N}) \int_a^b f$ nezávisí na volbě funkce $F$. Píšeme, že

$$f \in \mathrm{N}(a, b)\,,$$

a řekneme, že *$f$ je (na $(a, b)$) newtonovsky integrovatelná.*

**Úloha 14.2.2** *Dokažte, že když je funkce $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá, je její restrikce $f \mid (a, b)$ newtonovsky integrovatelná a*

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f \mid (a,\, b) = \lim_{\|\overline{a}\| \to 0} R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)\,.$$

**Úloha 14.2.3** *Rozpomeňte se na příklad nespojité funkce $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, která má primitivní funkci.*

**Úloha 14.2.4** *Dokažte, že když $f \in \mathrm{N}(a, b)$, pak $f \mid (c, d) \in \mathrm{N}(c, d)$ pro každá dvě čísla $c < d$ v intervalu $(a, b)$.*

**Úloha 14.2.5** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 14.2.6 (linearita** $(\mathrm{N})\int$**)** *Nechť* $f, g \in \mathrm{N}(a,b)$*, kde* $a < b$*, a nechť* $c, d \in \mathbb{R}$*. Pak* $cf + dg \in \mathrm{N}(a,b)$ *a*

$$(\mathrm{N})\int_a^b (cf + dg) = c \cdot (\mathrm{N})\int_a^b f + d \cdot (\mathrm{N})\int_a^b g\ .$$

Ukážeme, že Newtonův integrál je monotónní.

**Tvrzení 14.2.7 (monotonie** $(\mathrm{N})\int$**)** *Když* $f, g \in \mathrm{N}(a,b)$ *a na* $(a,b)$ *je* $f \le g$*, pak*

$$(\mathrm{N})\int_a^b f \le (\mathrm{N})\int_a^b g\ .$$

**Důkaz.** Nechť $F$, resp. $G$, je primitivní k $f$, resp. ke $g$. Čísla $c < d$ v $(a,b)$ buďte libovolná. Použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci $F - G$ a interval $[c,d]$: pro nějaký bod $e \in (c,d)$ je

$$\begin{aligned}(F(d) - G(d)) - (F(c) - G(c)) &= (F - G)'(e) \cdot (d - c)\\ &= (F'(e) - G'(e)) \cdot (d - c)\\ &= (f(e) - g(e)) \cdot (d - c) \le 0\ .\end{aligned}$$

Proto $F(d) - F(c) \le G(d) - G(c)$. Tato nerovnost se zachová při limitních přechodech $c \to a$ a $d \to b$ a dostáváme uvedenou nerovnost mezi Newtonovými integrály. □

**Úloha 14.2.8** *Dokažte následující důsledek monotonie Newtonova* $\int$*.*

**Důsledek 14.2.9 (odhad** $|(\mathrm{N})\int|$**)** *Nechť* $a < b$*,* $f, g \in \mathrm{N}(a,b)$*,* $g > 0$ *na* $(a,b)$ *a* $|f| \le g$ *na* $(a,b)$*. Pak*

$$\left|(\mathrm{N})\int_a^b f\right| \le (\mathrm{N})\int_a^b g\ .$$

Newtonův integrál má také vlastnost aditivity.

**Tvrzení 14.2.10 (aditivita** $(\mathrm{N})\int$**)** *Nechť* $a < c < b$*,* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *a* $f$ *je v* $\mathrm{N}(a,b)$*. Potom* $f \in \mathrm{N}(a,c) \cap \mathrm{N}(c,b)$ *a*

$$(\mathrm{N})\int_a^b f = (\mathrm{N})\int_a^c f + (\mathrm{N})\int_c^b f\ ,$$

*kde příslušné restrikce funkce* $f$ *značíme pro jednoduchost opět jako* $f$*.*

**Důkaz.** Nechť $F$ je nějaká antiderivace funkce $f$ na intervalu $(a,b)$. Pak

$$\begin{aligned}(\mathrm{N})\int_a^b f &= F_b - F_a = \big(F_b - F(c)\big) + \big(F(c) - F_a\big)\\ &= \big(F_b - \lim_{x\to c^+} F(x)\big) + \big(\lim_{x\to c^-} F(x) - F_a\big)\\ &= (\mathrm{N})\int_c^b f + (\mathrm{N})\int_a^c f\,.\end{aligned}$$

Prostřední rovnost platí díky spojitosti $F$ v $c$. □

**Úloha 14.2.11** *Proč je $F$ v $c$ spojitá?*

Tvrzení 17.1.13 jde opačným směrem. Uvedeme tři příklady na Newtonův integrál.

$$(\mathrm{N})\int_0^1 \sqrt{x} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{3/2}}{3/2} - \lim_{x\to 0}\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\cdot 1^{3/2}}{3} - \frac{2\cdot 0^{3/2}}{3} = \frac{2}{3}$$

a

$$(\mathrm{N})\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{1/2}}{1/2} - \lim_{x\to 0}\frac{x^{1/2}}{1/2} = 2(1^{1/2} - 0^{1/2}) = 2\,.$$

Neomezená oblast $G_{\le 1/\sqrt{x}}$ pod grafem neomezené funkce $1/\sqrt{x}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ má tedy konečnou newtonovskou plochu rovnou 2. Jak uvidíme v kapitole 17, riemannovsky se tato plocha nedá spočítat. Avšak podobný Newtonův integrál

$$(\mathrm{N})\int_0^1 \frac{1}{x}$$

neexistuje, protože žádná antiderivace $c + \log x$ nemá v 0 vlastní limitu.

• *Důkaz druhého l'Hospitalova pravidla.* Pomocí Newtonova integrálu dokážeme větu 11.3.9, kterou níže zopakujeme jako větu 14.2.14. Jako pomocné tvrzení dokážeme jednu asymptotiku Newtonových integrálů.

**Tvrzení 14.2.12 (asymptotika** $(\mathrm{N})\int$**)** *$f, g \in \mathrm{N}(a,b)$, $g > 0$ na $(a,b)$, $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ & $\lim_{x\to a} (\mathrm{N})\int_x^b g = +\infty$. Pak*

$$(\mathrm{N})\int_x^b f = o\left((\mathrm{N})\int_x^b g\right) \quad (x \to a)\,.$$

**Důkaz.** Buď dáno $\varepsilon$. Podle prvního $o$ existuje $\delta \le b - a$, že $x \in (a, a+\delta)$ $\Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot g(x)$. Podle limity $+\infty$ existuje $\theta < \delta$, že $x \in (a, a+\theta) \Rightarrow$

$\left|(\mathrm{N})\int_{a+\delta}^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot(\mathrm{N})\int_x^b g$. Takže $x \in (a, a+\theta) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\left|(\mathrm{N})\int_x^b f\right| &\overset{\text{tvrz. 14.2.10}}{=} \left|(\mathrm{N})\int_x^{a+\delta} f + (\mathrm{N})\int_{a+\delta}^b f\right| \\
&\overset{\Delta\text{-ová ner.}}{\leq} \left|(\mathrm{N})\int_x^{a+\delta} f\right| + \left|(\mathrm{N})\int_{a+\delta}^b f\right| \\
&\overset{\text{obě} \Rightarrow \text{a důsl. 14.2.9}}{<} \frac{\varepsilon}{2}\cdot(\mathrm{N})\int_x^{a+\delta} g + \frac{\varepsilon}{2}\cdot(\mathrm{N})\int_x^b g \\
&\overset{(?)}{\leq} \varepsilon\cdot(\mathrm{N})\int_x^b g\,.
\end{aligned}$$

Platnost poslední nerovnosti je předmětem následující úlohy. □

**Úloha 14.2.13** *Proč platí poslední nerovnost?*

**Věta 14.2.14 (LHP 2)** *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a pro nějaké $\delta > 0$ máme funkce*

$$f,\, g,\, f',\, g' \colon P^+(A,\, \delta) \to \mathbb{R}$$

*s $g' \neq 0$ na $P^+(A,\, \delta)$, $g$ má v $A$ limitu $\pm\infty$ a nechť $\lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$. Pak též*

$$\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,.$$

**Důkaz.** Nechť $A$, $\delta$, $f$, $g$ a $L$ jsou, jak uvedeno, a nechť nejprve $a := A \in \mathbb{R}$. Lze předpokládat, že $g$ má v $a$ limitu $+\infty$ a že na $P^+(A,\, \delta)$ je $g' > 0$ (viz úloha 14.2.15), limita $-\infty$ se probere podobně. Nechť nejprve $L = 0$, tj. $f'(x) = o(g'(x))$ $(x \to A)$. Vezmeme nějaké $\theta < \delta$ a podle předchozí věty dostaneme, že

$$(\mathrm{N})\int_x^\theta f' = o\left((\mathrm{N})\int_x^\theta g'\right) \quad (x \to A)\,,$$

což dává $f(x) = f(\theta) - o(1)(g(\theta) - g(x))$. Tedy $f(x)/g(x) = f(\theta)/g(x) + o(1)(1 - g(\theta)/g(x)) = o(1) + o(1)(1 - o(1)) = o(1)$ a tedy $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = 0 = L$.

Nechť $L \in \mathbb{R}$ je obecné. Pak s $h(x) := f(x) - Lg(x)$ je $\lim_{x\to A} h'(x)/g'(x) = 0$, a podle právě dokázaného případu je

$$0 = \lim_{x\to A}\frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} - L$$

a $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = L$. Pro $L = +\infty$ je $\lim_{x\to A} g'(x)/f'(x) = 0^+$. Tedy podle předchozího případu je

$$\lim_{x\to A}\frac{g(x)}{f(x)} = 0^+$$

a dostaneme, že $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = 1/0^+ = +\infty$. $L = -\infty$ převedeme substitucí $h(x) := -f(x)$ na případ $L = +\infty$. □

Předešlý důkaz LHP pro limity $\frac{\infty}{\infty}$ je převzat z učebnice [110, str. 206–7].

**Úloha 14.2.15** *Proč můžeme předpokládat, že že $g' > 0$? Návod: viz následující věta.*

**Úloha 14.2.16** *Dokažte větu pro definiční obory $P^-(A, \delta)$ a $P(A, \delta)$ a pro nekonečna $A = \pm\infty$.*

**Úloha 14.2.17** *Vypočítejte* $\lim_{x\to 0} \cot x / \log x$.

## 14.3 Darbouxova vlastnost derivací

Derivace funkce sice nemusí být spojitá, ale v jednom ohledu se chová jako spojitá funkce.

• *Darbouxova vlastnost derivace.* Jak ukážeme, derivace nabývá každou mezihodnotu.

**Definice 14.3.1 (Darbouxova vlastnost)** *Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, má Darbouxovu vlastnost (je Darbouxova), pokud pro každý interval $I \subset M$ je jeho obraz $f[I]$ interval.*

V důsledku **??** jsme dokázali, že spojité funkce jsou Darbouxovy. Nyní to rozšíříme na derivace.

**Věta 14.3.2 (derivace jsou Darbouxovy)** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval. Když má funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ primitivní funkci, má Darbouxovu vlastnost.*

**Důkaz.** Nechť $a < b$, $f, F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $F$ je primitivní k $f$ a $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Uvážíme funkci

$$G(x) := F(x) - cx\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}\,.$$

Na $[a, b]$ se patrně $G' = F' - c = f - c$ a $G$ je tedy spojitá. Podle věty 8.4.1 $G$ nabývá v nějakém bodu $d \in [a, b]$ minimum. Z

$$G'(a) = f(a) - c < 0 \text{ a } G'(b) = f(b) - c > 0$$

podle tvrzení 11.3.3 plyne, že $d \in (a, b)$ a $d$ je tedy OLB definičního oboru. Podle věty 10.1.7 se $G'(d) = f(d) - c = 0$, takže $f(d) = c$. □

**Úloha 14.3.3** *Proč je tato třída darbouxovských funkcí ostře obsáhlejší než třída spojitých funkcí?*

**Úloha 14.3.4** *Jak z věty plyne, že funkce znaménka* $\operatorname{sgn}(x)$ *nemá na žádném netriviálním intervalu $I \ni 0$ primitivní funkci?*

## 14.4 Per partes a substituce pro PF

Uvedeme dvě metody výpočtu primitivní funkce, *per partes* (po částech) a *substituční*. Operace antiderivování je také lineární. Pro netriviální interval $I$ a dvě funkce $F, f\colon I \to \mathbb{R}$ značení

$$F = \int f \quad \text{a} \quad \int f = F$$

znamená, že $F$ je (na $I$) primitivní k $f$. Obstarožní zápisy $F = \int f + c$ a $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c$ s integrační konstantou $c$ nebudeme používat.

• *Linearita primitivní funkce a integrace per partes.* Důkazy těchto výsledků jsou přímočaré.

**Tvrzení 14.4.1 (linearita PF)** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, $f$, $g$, $F$, $G\colon I \to \mathbb{R}$, $F$ (resp. $G$) je primitivní k $f$ (resp. ke $g$). Pak*

$$aF + bG = \textstyle\int (af + bg)\ .$$

**Důkaz.** Pokud $f$, $g$, $I$, $F$ a $G$ jsou, jak je uvedeno, pak podle linearity derivování se

$$(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg\ .$$

□

**Úloha 14.4.2** *Víme, že na $\mathbb{R}$ je $x^2/2 = \int x$ a že $-\cos x = \int \sin x$. Jaká je primitivní funkce k $2\sin x - 3x$?*

**Věta 14.4.3 (metoda per partes)** *$I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval, $f$, $g$, $F$, $G\colon I \to \mathbb{R}$ a $F$ (resp. $G$) je primitivní k $f$ (resp. ke $g$). Pak*

$$\textstyle\int fG = FG - \int Fg\ .$$

*To jest, když $H\colon I \to \mathbb{R}$ je primitivní k $Fg$, pak $FG - H$ je primitivní k $fG$.*

**Důkaz.** Podle Leibnizova vzorce a linearity derivování se

$$(FG - H)' = F'G + FG' - H' = fG + Fg - Fg = fG\ .$$

□

Často se tento vzorec zapisuje i jako

$$\textstyle\int F'G = FG - \int FG'$$

— pokud známe primitivní funkci k $FG'$, známe primitivní funkci i k $F'G$. Derivace přeskočí z $F$ na $G$. Například pro $I = (0, +\infty)$ tak vypočítáme antiderivaci logaritmu:

$$\begin{aligned}\int \log x &= \int x' \log x = x \log x - \int x(\log x)' \\ &= x \log x - \int \frac{x}{x} = x \log x - \int 1 = x \log x - x\ .\end{aligned}$$

Nebo snadno vyřešíme tuto úlohu.

**Úloha 14.4.4** $\int x \sin x = ?$ *Návod:* $-\cos x = \int \sin x$.

Správnost výsledků získaných metodou per partes snadno zkontrolujeme zderivováním.

• *Substituční metoda.* Jedná se o dva vzorce pro výpočet antiderivací.

**Věta 14.4.5 (substituční metoda)** *Nechť $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou netriviální intervaly, $g\colon I \to J$, $g'\colon I \to \mathbb{R}$ a $f\colon J \to \mathbb{R}$. Pak platí následující vzorce.*

(1) $F = \int f$ *na* $J \Rightarrow F(g) = \int f(g) \cdot g'$ *na* $I$.

(2) *Když $g$ je surjekce a na $I$ je $g' \neq 0$, potom platí implikace*

$$G = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I \Rightarrow G(g^{-1}) = \int f \text{ na } J.$$

**Důkaz.** 1. Podle věty 10.4.1 o derivaci složené funkce se

$$(F(g))' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g' \ .$$

2. Podle věty 14.3.2 má $g'$ Darbouxovu vlastnost. Na $I$ je tedy buď $g' > 0$, anebo $g' < 0$. Takže, podle věty 11.3.1, $g$ buď roste, anebo klesá. Podle části 2 věty 8.6.9 existuje spojitý inverz $g^{-1}\colon J \to I$. Podle vzorců pro derivaci složené funkce a pro derivaci inverzní funkce (věta 10.4.1 a věta 10.4.4) se

$$\begin{aligned} \big(G(g^{-1})\big)' &= G'(g^{-1}) \cdot (g^{-1})' \\ &= f(\underbrace{g(g^{-1})}_{=x}) \cdot \cancel{g'(g^{-1})} \cdot \frac{1}{\cancel{g'(g^{-1})}} = f \ . \end{aligned}$$

□

Na závěr kapitoly druhý ze substitučních vzorců ilustrujeme příkladem a první úlohou.

Na $J = (-1, 1)$ nalezneme primitivní funkci $\int f$ k $f(t) := \sqrt{1 - t^2}$. Funkci $f$ složíme s funkcí $g(x) := \sin x\colon I = (-\pi/2, \pi/2) \to J$. Na intervalu $I$ metodou per partes spočítáme, že

$$\begin{aligned} \int f(g) \cdot g' &= \int \cos^2 x = \int (\sin x)' \cos x \\ &= \sin x \cdot \cos x - \int \sin x (\cos x)' \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \\ &= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \ . \end{aligned}$$

Na $I$ se proto

$$\int f(g) \cdot g' = \int \cos^2 x = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} =: G(x) \ .$$

Podle druhého substitučního vzorce a vztahu $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ platícího na $I$ máme na $J$ vztah

$$\int \sqrt{1-t^2} = \int f = G(g^{-1}) = \frac{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t}{2} \ .$$

Snadno ho zkontrolujeme zderivováním.

**Úloha 14.4.6** *Nechť na $I$ platí $F = \int f$ & $a, b \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$. Pomocí prvního substitučního vzorce nalezněte na intervalu $J := \frac{1}{a} \cdot (I - b)$ vzorec pro*

$$\int f(ax+b) \ .$$

# Kapitola 15

# Přednáška 11. Nevlastní Newtonův integrál. Antiderivace racionálních funkcí

V kapitole založené na jedenácté přednášce v podkapitole 15.1 rozšíříme Newtonův integrál i na neomezené otevřené intervaly. V podkapitole 15.2 upravíme ve větě 15.2.1 pro tento integrál metodu per partes a ve větě 15.2.5 metodu substituční. Věta 15.2.9 podává přehled antiderivací elementárních funkcí získaných obrácením jednoduchého derivování.

V podkapitole 15.3 dokážeme, že každá racionální funkce má primitivní funkci definovanou jako elementární funkce. Tyto elementární antiderivace racionálních funkcí jsou popsány ve větě 15.3.1. Dále zmíníme tvrzení 15.3.7 o tzv. Bachetově identitě a větu 15.3.10 o vyjádření každé racionální funkce pomocí tzv. parciálních zlomků.

Přednáška byla přednesena 27. 4. 2023, viz

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI23_pred11.pdf` .

V učebnicové verzi jsme ji zde rozšířili jen málo.

## 15.1 Nevlastní Newtonův integrál

• *Mírné zobecnění Newtonova integrálu.* Rozšíříme ho teď na funkce typu

$$f\colon (A,\, B) = \{x \in \mathbb{R} \mid A < x < B\} \to \mathbb{R}$$

pro konce intervalu $A < B$ ležící v $\mathbb{R}^*$. Dovolujeme tedy i $A = -\infty$ a $B = +\infty$.

**Definice 15.1.1 (nevlastní Newtonův integrál)** *Prvky $A < B$ jsou v $\mathbb{R}^*$,*

$$F,\, f\colon (A,\, B) \to \mathbb{R}$$

*a $F$ je primitivní k $f$. Newtonův integrál funkce $f$ přes interval $(A, B)$ definujeme jako rozdíl*

$$(\mathrm{N}) \int_A^B f = F_B - F_A := \lim_{x \to B} F(x) - \lim_{x \to A} F(x)\ ,$$

*jsou-li obě limity vlastní. Plocha $A_f$ oblasti $G_{\leq f}$ pak je $(\mathrm{N}) \int_A^B f$. Pro $B < A$ klademe $(\mathrm{N}) \int_A^B f := -(\mathrm{N}) \int_B^A f$. Dále vždy definujeme $(\mathrm{N}) \int_A^A f := 0$.*

Pokud je $(\mathrm{N}) \int_A^B f$ definovaný, řekneme, že $f$ je *newtonovsky integrovatelná přes* $(A, B)$, a píšeme, že

$$f \in \mathrm{N}(A,\, B)\ .$$

**Úloha 15.1.2** *Ukažte, že hodnota tohoto integrálu nezávisí na volbě primitivní funkce $F$.*

**Úloha 15.1.3** *Ukažte, že pro $A, B, K, L \in \mathbb{R}^*$ s $A \leq K < L \leq B$ platí, že $f \in \mathrm{N}(A, B) \Rightarrow f \,|\, (K, L) \in \mathrm{N}(K, L)$.*

V této situaci píšeme jednodušeji, že $f \in \mathrm{N}(K, L)$. Například $\frac{1}{1+x^2} \in \mathrm{N}(0, +\infty)$, protože

$$(\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \overbrace{\arctan_{+\infty}}^{\lim_{x\to+\infty} \arctan x} - \overbrace{\arctan_0}^{=\arctan 0} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\ .$$

Pro $F\colon (A, B) \to \mathbb{R}$ zavedeme zápis

$$[F]_A^B := F_B - F_A = \lim_{x \to B} F(x) - \lim_{x \to A} F(x)\ ,$$

jestliže obě limity existují a jsou vlastní.

**Úloha 15.1.4** *Dokažte dvě následující tvrzení.*

**Tvrzení 15.1.5 (aditivita)** *Pokud $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ a*

$$f \in \mathrm{N}\big(\min(\{A,\, B,\, C\}),\, \max(\{A,\, B,\, C\})\big)\ ,$$

*pak*

$$(\mathrm{N}) \int_A^C f = (\mathrm{N}) \int_A^B f + (\mathrm{N}) \int_B^C f$$

*neboli $(\mathrm{N}) \int_A^B f + (\mathrm{N}) \int_B^C f + (\mathrm{N}) \int_C^A f = 0$.*

**Tvrzení 15.1.6 (linearita)** *Pokud $A, B \in \mathbb{R}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ a*

$$f,\, g \in \mathrm{N}\big(\min(\{A,\, B\}),\, \max(\{A,\, B\})\big)\ ,$$

*pak*

$$(\mathrm{N}) \int_A^B (af + bg) = a \cdot (\mathrm{N}) \int_A^B f + b \cdot (\mathrm{N}) \int_A^B g\ .$$

## 15.2 Per partes a substituce

Tyto dvě metody, jimiž lze nalézt primitivní funkce, teď upravíme pro nevlastní Newtonovy integrály.

• *Integrace per partes, to jest po částech.* Na rozdíl od dvou předešlých tvrzení tento vzorec dokážeme.

**Věta 15.2.1 (per partes pro N. $\int$)** *Nechť $f, g, F, G\colon (A, B) \to \mathbb{R}$, kde $A < B$ jsou v $\mathbb{R}^*$, a funkce $F$ (resp. $G$) je primitivní k $f$ (resp. ke $g$). Pak rovnost*

$$\underbrace{(\mathrm{N})\int_A^B fG}_{T_1} = \underbrace{[FG]_A^B}_{T_2} - \underbrace{(\mathrm{N})\int_A^B Fg}_{T_3}$$

*platí vždy, když jsou definovány dva ze tří členů $T_i$.*

**Důkaz.** 1. Nechť $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$. Tedy $[FG]_A^B = T_2$ a funkce $fG$ má na $(A, B)$ primitivní funkci $H$ s $[H]_A^B = T_1$. Pak

$$(FG - H)' = fG + Fg - fG = Fg \ \text{ a } \ [FG - H]_A^B = T_2 - T_1 \ .$$

$FG - H$ je tedy na $(A, B)$ primitivní k $Fg$ a poslední rovnost je jen úprava rovnosti uvedené ve větě.

2. Nechť $T_1 \in \mathbb{R}$ a $T_3 \in \mathbb{R}$. Takže $fG$, resp. $Fg$, má na $(A, B)$ primitivní funkci $H_1$, resp. $H_2$, s $[H_1]_A^B = T_1$ a $[H_2]_A^B = T_3$. Pak

$$(H_1 + H_2)' = fG + Fg = (FG)' \text{ na } (A, B) \ .$$

Podle věty 12.3.2 existuje konstanta $c$, že na $(A, B)$ se $H_1 + H_2 + c = FG$. Proto

$$[FG]_A^B = [H_1 + H_2 + c]_A^B = [H_1]_A^B + [H_2]_A^B = T_1 + T_3 \ ,$$

což je rovnost ve větě.

3. $T_2, T_3 \in \mathbb{R}$ – tento případ je podobný případu 1. □

**Úloha 15.2.2** *Dokažte podrobně případ 3.*

**Tvrzení 15.2.3 ($\int = \mathbf{n}!$)** *Jako příklad použití metody per partes dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ se*

$$I_n := (\mathrm{N})\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = n! \ (= \textstyle\prod_{i=1}^n i) \ .$$

**Důkaz.** $I_0 = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-x}) - (-\mathrm{e}^{-0}) = -0 - (-1) = 1$. Pro $n > 0$ pomocí poslední věty a indukce podle $n$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} I_n &= (\mathrm{N})\int_0^{+\infty} x^n \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)' \\ &\overset{\text{věta 15.2.1, } \exists\, T_2 \text{ a } T_3}{=} [-x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} + (\mathrm{N})\int_0^{+\infty} (x^n)'\,\mathrm{e}^{-x} \\ &\overset{\text{linearita } \int}{=} -0 + 0 + n\cdot(\mathrm{N})\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \\ &= n\cdot I_{n-1}\ . \end{aligned}$$

Proto $I_n = n! = \prod_{i=1}^n i$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. □

**Úloha 15.2.4** *Vysvětlete, proč přesně na druhém řádku výpočtu existují členy $T_2$ a $T_3$.*

Tuto reprezentaci faktoriálů pomocí integrálů využijeme v podkapitole 20.2 ve druhém odvození Stirlingova vzorce.

• *Substituce v Newtonově integrálu.* Dva vzorce pro integraci substitucí z minulé přednášky upravíme pro nevlastní Newtonův integrál.

**Věta 15.2.5 (substituce v N. $\int$)** *Nechť $A, B, C, D \in \mathbb{R}^*$, $A < B$, $C < D$, $g\colon (A,B) \to (C,D)$ a má na $(A,B)$ vlastní $g'$ a $f\colon (C,D) \to \mathbb{R}$. Pak platí následující.*

1. *Nechť $f$ má primitivní funkci $F\colon (C,D) \to \mathbb{R}$. Pak platí rovnost*

$$(\mathrm{N})\int_A^B f(g)\cdot g' = (\mathrm{N})\int_{g_A}^{g_B} f\ ,$$

*jestliže poslední integrál existuje.*

2. *Nechť je funkce $g$ surjekce a $g' \neq 0$ na $(A,B)$. Pak $\{g_C^{-1}, g_D^{-1}\} = \{A, B\}$ a platí rovnost*

$$(\mathrm{N})\int_C^D f = (\mathrm{N})\int_{g_C^{-1}}^{g_D^{-1}} f(g)\cdot g'\ ,$$

*jestliže poslední integrál existuje.*

**Důkaz.** Nechť $A$, $B$, $C$, $D$, $g$ a $f$ jsou, jak je uvedeno.

1. Nechť existuje $F$ a pravá strana je definovaná. Tedy existují limity

$$g_A := \lim_{x\to A} g(x) \in \mathbb{R}^* \ \text{ a } \ g_B := \lim_{x\to B} g(x) \in \mathbb{R}^*\ ,$$

což jsou patrně limitní body intervalu $(C,D)$, a pravá strana se rovná

$$F_{g_B} - F_{g_A} = \lim_{y\to g_B} F(y) - \lim_{y\to g_A} F(y)\ ,$$

takže poslední dvě limity existují a jsou vlastní. Víme, že na $(A, B)$ je $F(g)$ primitivní k $f(g) \cdot g'$. Tím pádem

$$\begin{aligned}(\mathrm{N}) \int_{g_A}^{g_B} f &= \lim_{y \to g_B} F(y) - \lim_{y \to g_A} F(y) \\ &= \lim_{x \to B} F(g(x)) - \lim_{x \to A} F(g(x)) = (\mathrm{N}) \int_A^B f(g) \cdot g' \,.\end{aligned}$$

První a třetí rovnost plynou z definice nevlastního N. $\int$. Druhá rovnost plyne z věty 7.4.1 o limitě složené funkce (se splněnou podmínkou 1).

2. Nechť $g$ je na, $g' \neq 0$ a pravá strana je definovaná. Víme, že $g$ i $g^{-1}$ je rostoucí nebo klesající bijekce (úloha 15.2.6). Tedy limity

$$g_C^{-1} := \lim_{y \to C} g^{-1}(y) \in \mathbb{R}^* \ \text{ a } \ g_D^{-1} := \lim_{y \to D} g^{-1}(y) \in \mathbb{R}^*$$

existují a $\{g_C^{-1}, g_D^{-1}\} = \{A, B\}$, to jest v nějakém pořadí se rovnají prvkům $A$ a $B$. Podle předpokladu má $f(g) \cdot g'$ na $(A, B)$ primitivní funkci $G$ a pravá strana má hodnotu

$$\lim_{x \to g_D^{-1}} G(x) - \lim_{x \to g_C^{-1}} G(x) \,.$$

Víme, že na $(C, D)$ má inverzní funkce $g^{-1}$ vlastní derivaci (věta 10.4.4) a že $G(g^{-1})$ tam je primitivní k $f$ (viz výpočet v důkazu věty 14.4.5). Tím pádem

$$\begin{aligned}(\mathrm{N}) \int_{g_C^{-1}}^{g_D^{-1}} f(g) \cdot g' &= \lim_{x \to g_D^{-1}} G(x) - \lim_{x \to g_C^{-1}} G(x) \\ &= \lim_{y \to D} G(g^{-1}(y)) - \lim_{y \to C} G(g^{-1}(y)) = (\mathrm{N}) \int_C^D f \,.\end{aligned}$$

První a třetí rovnost opět plynou z definice nevlastního N. $\int$ a druhá opět z věty o limitě složené funkce. □

**Úloha 15.2.6** *Proč je funkce $g$ a její inverz monotónní bijekce?*

Minule jsme substitucí spočítali, že na $(-1, 1)$ je

$$\frac{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t}{2} = \int \sqrt{1-t^2} \,.$$

**Úloha 15.2.7** *Dokažte, že tento vztah platí i na* $[-1, 1]$.

Umíme tak spočítat plochu horního jednotkového půlkruhu, plochu $A_f$ oblasti $G_{\leq f}$ pod grafem funkce $f(t) = \sqrt{1-t^2} \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

**Důsledek 15.2.8** *Platí, že*

$$(\mathrm{N}) \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} = \frac{\pi}{2} \,.$$

**Důkaz.** Nechť $F(t) := (t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t)/2$. Pak

$$\begin{aligned}(\mathrm{N})\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2} &= \lim_{t\to 1} F(t) - \lim_{t\to -1} F(t)\\ &= \frac{0+\arcsin 1}{2} - \frac{0+\arcsin(-1)}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

□

• *Primitivní funkce některých elementárních funkcí.* Mechanicky invertujeme pravidla pro derivování ve větě **??**.

**Věta 15.2.9 (tabulka antiderivací)** *Na intervalech $I$ platí následující vztahy.*

1. *$I = \mathbb{R}$, pak platí, že $\exp x = \int \exp x$, $-\cos x = \int \sin x$, $\sin x = \int \cos x$, $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}$ a $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.*
2. *$I = (-\infty, 0)$ nebo $(0, +\infty)$, pak $\log(|x|) = \int \frac{1}{x}$ a $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n$ pro $n = -2, -3, \ldots$.*
3. *$I = (0, +\infty)$, pak $\frac{x^{b+1}}{b+1} = \int x^b$ pro $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*
4. *$I = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\tan x = \int \frac{1}{(\cos x)^2}$.*
5. *$I = (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $-\cot x = \int \frac{1}{(\sin x)^2}$.*
6. *$I = (-1, 1)$, pak $\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

**Důkaz.** Viz věta **??**. □

**Úloha 15.2.10** *Nejsou vztahy $(\log x)' = \frac{1}{x}$ a $(\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ v rozporu s tím, že dvě antiderivace téže funkce se liší jen konstantním posunem?*

## 15.3 Antiderivace racionálních funkcí

Racionální funkce, zkratkou RF, představují poměrně širokou podtřídu elementárních funkcí, jejichž primitivní funkce se vždy dají vyjádřit „vzorcem“ — jsou opět elementární.

• *Obecný tvar antiderivace racionální funkce.* Připomeňme si, že RF $r = r(x)$ je podíl dvou reálných polynomů

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \colon \mathbb{R} \setminus Z(r) \to \mathbb{R}\,.$$

Zde $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, polynom $q(x)$ není nulový a

$$Z(r) := \{a \in \mathbb{R} \mid q(a) = 0\}$$

je množina reálných kořenů jmenovatele $q(x)$. Jak známo, $|Z(r)| \leq \deg q$, *stupeň* polynomu $q = q(x)$. *Ireducibilní trojčlen* $a(x)$, krátce IT, je reálný *monický* (s vedoucím koeficientem 1) kvadratický polynom

$$a(x) = x^2 + bx + c \ \text{ s } \ b^2 - 4c < 0 \ ,$$

takže $a(x)$ nemá reálné kořeny. Pak $a(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Např. $x^2 + 2x + 2$ je IT. Ve druhé polovině přednášky dokážeme, modulo důkaz věty 15.3.3, následující větu.

**Věta 15.3.1** ($\int r(x)$) *Pro každou* RF $r = r(x)$ *existuje taková funkce* $R(x)$ *tvaru*

$$r_0(x) + \sum_{i=1}^{k} s_i \cdot \log(|x - \alpha_i|) + \sum_{i=1}^{l} t_i \cdot \log(a_i(x)) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \arctan(b_i(x)) \ ,$$

*kde* $r_0(x)$ *je* RF, $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, *prázdné* $\sum := 0$, $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in Z(r)$, $a_i(x)$ *jsou* IT*y a* $b_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ *jsou nekonstantní lineární polynomy, že na každém netriviálním intervalu* $I \subset \mathbb{R} \setminus Z(r)$ *je*

$$R(x) = \int r(x) \ .$$

Je jasné, že funkce všech čtyř uvedených typů se v $R(x)$ mohou objevit. Linearitou integrace, integrací substitucí a pomocí výše uvedené tabulky primitivních funkcí například dostaneme, že na libovolném netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ je

$$\begin{aligned} \int r(x) &:= \int \left( \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x-1} + \overbrace{\frac{2x+2}{x^2+2x+2}}^{=(\dots)'/(\dots)} + \overbrace{\frac{1}{x^2+2x+2}}^{=1/((x+1)^2+1)} \right) \\ &= -\frac{1}{3x^3} + \log(|x-1|) + \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) \ . \end{aligned}$$

**Úloha 15.3.2** *Nalezněte následující primitivní funkce.*

$$\int \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \ , \ \int \frac{20x^3 - 2}{10x^4 - 4x + 1} \ \ a \ \int \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2} \ .$$

Pro důkaz věty nejdříve vysvětlíme teorii tzv. parciálních zlomků.

• *Parciální zlomky.* Následující větu — Základní větu algebry — zde nebudeme dokazovat. Už jsme ji totiž dokázali v podkapitole 2.8.

**Věta 15.3.3 (Zvalg)** $\forall\, p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C} \ \exists\, \alpha \in \mathbb{C} \ \big(p(\alpha) = 0\big)$.

Ze Zvalg odvodíme existenci a tvar ireducibilních rozkladů v $\mathbb{R}[x]$.

**Důsledek 15.3.4 (ired. rozklady)** *Nechť $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q(x) \neq 0$. Pak*

$$q(x) = c \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{m_i}}_{\text{koř. činitele typu 1}} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{l} a_i(x)^{n_i}}_{\text{koř. činitele typu 2}} ,$$

*kde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, je vedoucí koeficient polynomu $q(x)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, prázdné $\prod := 1$, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ jsou všechny různé reálné kořeny polynomu $q(x)$ a $a_i(x)$ jsou vzájemně různé* IT*y.*

**Důkaz.** $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu $q(x) \Rightarrow$ komplexně sdružené číslo $\overline{\alpha} = a - bi$ je též kořenem, protože $q(x)$ je reálný (úloha 15.3.5). Pokud $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tj. pokud $b \neq 0$, pak

$$a_\alpha(x) := (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2a \cdot x + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$$

je IT: $(-2a)^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$.

Je-li $q(x)$ konstantní polynom, důsledek platí s rozkladem $q(x) = c$. Pokud $q(x)$ není konstantní, podle věty 15.3.3 má kořen $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$q(x) = (x - \alpha) q_1(x)$$

(úloha 15.3.6). Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, je $q_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ (úlohya 15.3.6). Odštěpili jsme tak jeden kořenový činitel $x - \alpha$ typu 1. Pokud $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, je $q_1(x) = (x - \overline{\alpha}) s_1(x)$ (úloha 15.3.6). Pak

$$q(x) = (x - \alpha) q_1(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) s_1(x) = a_\alpha(x) s_1(x) .$$

Opět $s_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ a odštěpili jsme tak jeden kořenový činitel $a_\alpha(x)$ typu 2. Pokud $q_1(x)$, resp. $s_1(x)$, je nekonstantní, aplikujeme na něj stejný postup a pak pokračujeme stejným způsobem. Nakonec odštěpování kořenových faktorů skončí u konstantního polynomu $c$ a pro $q(x)$ dostaneme uvedený rozklad. □

**Úloha 15.3.5** *Dokažte, že kořeny reálného polynomu tvoří komplexně sdružené dvojice.*

**Úloha 15.3.6** *Doplňte podrobnosti v krocích důkazu výše.*

Rozklad libovolné RF na parciální zlomky získáme pomocí následující identity.

**Tvrzení 15.3.7 (Bachetova identita)** *Polynomy $p, q \in \mathbb{R}[x]$ nemají společný kořen, tj. pro žádné $z \in \mathbb{C}$ neplatí, že $p(z) = q(z) = 0$. Pak existují takové polynomy $r, s \in \mathbb{R}[x]$, že*

$$r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1 .$$

**Důkaz.** Nechť $p(x)$ a $q(x)$ jsou, jak uvedeno, a

$$S := \{r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) \mid r(x),\, s(x) \in \mathbb{R}[x]\} \ .$$

Vezmeme polynom $t(x) \in S$, $t(x) \neq 0$, nejmenšího stupně. Libovolný prvek $a(x) \in S$ jím dělíme se zbytkem:

$$a(x) = t(x) \cdot b(x) + c(x) \ ,$$

kde $b(x), c(x) \in \mathbb{R}[x]$ a $\deg c(x) < \deg t(x)$ nebo $c(x) = 0$. Ale $c(x) = a(x) - b(x) \cdot t(x) \in S$ (úloha níže). Polynom $c(x)$ je tedy nulový a $a(x) = b(x)t(x)$, takže $t(x)$ dělí každý prvek v $S$. Ale $p(x), q(x) \in S$ a $t(x)$ je oba dělí. Protože $p(x)$ a $q(x)$ nemají společný kořen, podle věty 15.3.3 je $t(x)$ nenulový konstantní polynom. Búno $t(x) = 1$ (úloha 15.3.9). Tedy $1 \in S$ a jsme hotovi. □

**Úloha 15.3.8** *Proč $c(x)$ leží v $S$?*

**Úloha 15.3.9** *Proč je búno $t(x) = 1$?*

**Věta 15.3.10 (parciální zlomky)** *Každá reálná* RF $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *se jmenovatelem $q(x)$ rozloženým podle důsledku 15.3.4, má vyjádření*

$$r(x) = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma_{i,j}x + \delta_{i,j}}{a_i(x)^j} \ ,$$

*kde $s(x) \in \mathbb{R}[x]$, $k$, $l$, $m_i$, $n_i$, $\alpha_i$ a $a_i(x)$ jsou jako v důsledku 15.3.4 a $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$, $\delta_{i,j}$ jsou v $\mathbb{R}$.*

**Důkaz.** Bachetovu identitu dělíme součinem $p(x)q(x)$ a dostaneme

$$\frac{1}{p(x)q(x)} = \frac{s(x)}{p(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} \ .$$

Opakujeme to a vidíme, že pro každých $n$ reálných polynomů $q_1(x), \ldots, q_n(x)$, z nichž žádné dva $q_i(x)$ a $q_j(x)$, $i \neq j$, nemají společný komplexní kořen, existuje $n$ reálných polynomů $s_1(x), \ldots, s_n(x)$, že

$$\frac{1}{q_1(x)q_2(x)\ldots q_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i(x)}{q_i(x)} \ .$$

Nyní nechť $r(x) = p(x)/q(x)$ je RF a $q(x)$ je rozložen jako v důsledku 15.3.4. Poslední vysazenou identitu použijeme pro $n := k + l$, $q_1(x) := (x - \alpha_1)^{m_1}, \ldots, q_k(x) := (x - \alpha_k)^{m_k}$, $q_{k+1}(x) := a_1(x)^{n_1}, \ldots, q_{k+l}(x) := a_l(x)^{n_l}$ a dostaneme takové reálné polynomy $b_1(x), \ldots, b_k(x)$, $c_1(x), \ldots, c_l(x)$, že

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i(x)}{(x-\alpha_i)^{m_i}} + \sum_{i=1}^{l} \frac{c_i(x)}{a_i(x)^{n_i}} \ .$$

V každém z výše uvedených $k+l$ zlomků čitatel dělíme jmenovatelem se zbytkem: $b_i(x) = (x-\alpha_i)^{m_i} \cdot s_i(x) + d_i(x)$ a $c_i(x) = a_i(x)^{n_i} \cdot s_{i+k}(x) + d_{i+k}(x)$, kde $d_i(x), s_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ a každý zbytek $d_i(x)$ je buď nulový polynom nebo má stupeň menší než jmenovatel (což je $m_i$, resp. $2n_i$). S označením $s(x) := \sum_{i=1}^{k+l} s_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ poslední vysazenou rovnost přepíšeme jako

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i(x)}{(x-\alpha_i)^{m_i}} + \sum_{i=1}^{l} \frac{d_{k+i}(x)}{a_i(x)^{n_i}} \ .$$

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ opakovaně dělíme $d_i(x)$ polynomem $x-\alpha_i$ se zbytkem a vyjádříme $i$-tý sčítanec v prvním součtu ve shora uvedené podobě. Totéž uděláme pro každý sčítanec ve druhém součtu. Například $d_{k+1}(x)/a_1(x)^{n_1}$ se rovná

$$\frac{a_1(x) \cdot e(x) + \gamma_{1,n_1} x + \delta_{1,n_1}}{a_1(x)^{n_1}} = \frac{e(x)}{a_1(x)^{n_1-1}} + \frac{\gamma_{1,n_1} x + \delta_{1,n_1}}{a_1(x)^{n_1}} \ ,$$

pak vydělíme polynom $e(x)$ polynomem $a_1(x)$ se zbytkem a tak postupujeme dále. Toto provedeme ve všech $k+l$ zlomcích. □

• *Důkaz věty 15.3.1 o tvaru* $\int r(x)$. Danou racionální funkci $r(x)$ vyjádříme součtem parciálních zlomků jako v předchozí větě:

$$r(x) = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma_{i,j} x + \delta_{i,j}}{a_i(x)^j} \ .$$

Použijeme linearitu PF a integrujeme každý sčítanec zvlášť. První dva členy jsou snadné: $\int s(x)$ je polynom (na jakémkoli netriviálním reálném intervalu $I$), $\int \beta/(x-\alpha)^j = -\beta/((j-1)(x-\alpha)^{j-1})$ pro $j \geq 2$ a $\int \beta/(x-\alpha) = \beta \log(|x-\alpha|)$, kde tyto PF platí na libovolném netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. Jsou to příspěvky k $\int r(x)$ prvních dvou typů ve větě 15.3.1.

Zintegrujeme třetí člen a vypočítáme PF tvaru

$$\int \frac{\gamma x + \delta}{(x^2 + bx + c)^j} \ ,$$

kde $j \in \mathbb{N}$ a $\gamma, \delta, b, c \in \mathbb{R}$ splňují $b^2 - 4c < 0$. Pomocí $d := \sqrt{c - b^2/4} > 0$ a $e := (\delta - \gamma b/2)/d^{2j-1}$ zapíšeme poslední RF jako

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma x + \delta}{(x^2 + bx + c)^j} &= \frac{\gamma}{2} \cdot \underbrace{\frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^j}}_{T := (\ldots)'/(\ldots)^j} + \frac{\delta - \gamma b/2}{(x^2 + bx + c)^j} \\
&= \frac{\gamma}{2} \cdot T + e \cdot \underbrace{\frac{1/d}{\left((x/d + b/2d)^2 + 1\right)^j}}_{U := (\ldots)'/((\ldots)^2+1)^j} \\
&= \frac{\gamma}{2} \cdot T + e \cdot U \ .
\end{aligned}$$

Integrací substitucí máme, že $\int T = 1/\big((j-1)(x^2+bx+c)^{j-1}\big)$ pro $j \geq 2$ a $\int T = \log(x^2+bx+c)$ pro $j = 1$ (na libovolném netriviálním reálném intervalu $I$). Tím dostáváme příspěvky k $\int r(x)$ prvního a třetího typu ve větě 15.3.1.

Nakonec spočítáme $\int U$. Integrací substitucí máme, že $\int U = I_j(x/d+b/2d)$ (na libovolném netriviálním reálném intervalu $I$), kde

$$I_j = I_j(y) := \int \frac{1}{(y^2+1)^j} \ .$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ integrací per partes a derivováním složených funkcí dostaneme vztah

$$\begin{aligned} I_j &= \int y' \cdot \frac{1}{(y^2+1)^j} = \frac{y}{(y^2+1)^j} + 2j \int \frac{(y^2+1)-1}{(y^2+1)^{j+1}} \\ &= \frac{y}{(y^2+1)^j} + 2j \cdot I_j - 2j \cdot I_{j+1} \ . \end{aligned}$$

Máme tedy rekurenci $I_1 = \arctan y$ (tabulka výše) a

$$I_{j+1} = \frac{y}{2j \cdot (y^2+1)^j} - (1 - 1/2j) \cdot I_j, \ j \in \mathbb{N} \ .$$

Z toho vyplývá, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je

$$I_j(y) = u(y) + r \cdot \arctan y \ ,$$

kde $u(y) \in \mathbb{Q}(y)$ je RF a $r \in \mathbb{Q}$. Protože $\int U = I_j(x/d+b/2d)$, poslední příspěvek k $\int r(x)$ je prvního a čtvrtého typu ve větě 15.3.1. □

**Úloha 15.3.11** *Nalezněte primitivní funkci*

$$\int \frac{1}{x^4+1} \ .$$

*Návod:* $x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2$.

# Kapitola 16

# Liouville–Rosenlichtova věta

V této kapitole dokážeme, že antiderivace funkcí $\mathrm{e}^{-x^2}$ a $1/\log x$, existující díky spojitosti, nejsou elementární. Dostaneme se k tomu v oddílu 16.2, kde znovu zavedeme elementární funkce, jinak a šířeji než v definici 5.4.4. Důkazy si žádají aparát diferenciální algebry, který vybudujeme v oddílu 16.1. Hlavním nástrojem a vlastně i výsledkem celé kapitoly je Liouville–Rosenlichtova věta 16.1.1. V kapitole postupujeme, tu volněji, tu těsněji, podle článku [142] M. Rosenlichta.

## 16.1 Liouville–Rosenlichtova věta

Zavedeme algebraický aparát pro formulaci následující věty a tu pak dokážeme. Větu s kořeny před polovinou 19. století uvádíme v moderní podobě přesně podle [142, str. 968].

**Věta 16.1.1 (Liouville–Rosenlicht)** *Nechť $F$ je diferenciální pole charakteristiky $0$ a $\alpha \in F$. Má-li rovnice*

$$y' = \alpha$$

*řešení v nějakém elementárním diferenciálním rozšíření pole $F$ a toto rozšíření má stejné podpole konstant jako $F$, existují konstanty $c_1, \ldots, c_n \in F$ a prvky $u_1, \ldots, u_n, v \in F$, že*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \frac{u_i'}{u_i} \,.$$

O francouzském matematikovi Josephu Liouvilleovi a americkém matematikovi Maxwellu Rosenlichtovi píšeme více v oddílu C.1.

Než se pustíme do diferenciální algebry, osvěžíme si několik věcí z „obyčejné“ komutativní algebry. *Polem* zde rozumíme komutativní těleso. *Izomorfismus polí*

zapisujeme pomocí symbolu $\cong$. Pole $F$ má *charakteristiku* 0, pokud

$$1_F + 1_F + \cdots + 1_F \neq 0_F$$

pro každý konečný součet jedniček v $F$. Pole $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ mají charakteristiku 0, konečné pole $\mathbb{Z}_p$ zbytků modulo prvočíslo $p$ ani nekonečné pole $\mathbb{Z}_p(x)$ racionálních funkcí nad $\mathbb{Z}_p$ charakteristiku 0 nemá. O všech polích v této kapitole lze předpokládat, že mají charakteristiku 0.

Značení $F \subset G$ pro pole $F$ a $G$ znamená, že $F$ *je podpole pole* $G$, takže $0_F = 0_G$, $1_F = 1_G$ a zúžení sčítání a násobení v $G$ na $F \times F$ je sčítání a násobení v $F$. V této souvislosti spíše mluvíme o *rozšíření polí* $F \subset G$.

Předpokládáme, že čtenář je seznámený s konstrukcí okruhu polynomů $F[x]$ nad polem $F$ a s aritmetikou v něm. Polynom v $F[x]$ je *nenulový*, pokud má alespoň jeden nenulový koeficient, jinak je *nulový*. Nenulový polynom nad $F$ je *monický*, je-li jeho vedoucí koeficient $1_F$. V rozšíření polí $F \subset G$ je prvek $a \in G$ *algebraický nad* $F$, pokud $p(a) = 0_G$ pro nějaký nenulový polynom $p \in F[x]$. Má-li $p(x)$ nejmenší možný stupeň (mezi polynomy nad $F$ s kořenem $a$) a je monický, je jednoznačně určený a nazýváme ho *minimálním polynomem* (algebraického prvku $a$ nad polem $F$). *Stupeň* $\deg a \in \mathbb{N}$ *(algebraického) prvku* $a \in G$ *(nad* $F$*)* pak je stupeň jeho minimálního polynomu nad $F$.

**Definice 16.1.2 (jednoduché algebr. rozšíření)** *Nechť $F \subset G$ je rozšíření polí & prvek $a \in G$ je algebraický nad $F$. Jako*

$$F(a)_{\mathrm{alg}},\ F \subset F(a)_{\mathrm{alg}} \subset G\ ,$$

*označíme nejmenší podpole pole $G$ obsahující $F$ i $a$. Nazveme ho jednoduchým algebraickým rozšířením pole $F$.*

$F(a)_{\mathrm{alg}}$ existuje, je to průnik všech podpolí pole $G$ obsahujících $F$ i $a$. Takto se definuje obecněji jednoduché rozšíření $F(a)$ pro libovolný prvek $a \in G$, i nealgebraický nad $F$ *(transcendentní nad* $F$*)*, v rozšíření polí $F \subset G$, ale nás zde zajímají hlavně algebraická rozšíření. Následující standardní popis jednoduchých algebraických rozšíření nedokazujeme.

**Tvrzení 16.1.3 (jednoduchá algebr. rozšíření)** *Nechť $F \subset G$ je rozšíření polí & prvek $a \in G$ stupně $d \in \mathbb{N}$ je algebraický nad $F$. Pak*

$$F(a)_{\mathrm{alg}} \cong F[x]/(p(x))\ ,$$

*kde $p \in F[x]$ je minimální polynom prvku $a$ nad $F$. Prakticky to znamená, že $F(a)_{\mathrm{alg}}$ je pole zbytků polynomů v $F[x]$ modulo polynom $p(x)$. Tyto zbytky bijektivně reprezentují polynomy v $F[x]$ stupně menšího než $d$.*

Zde $(p(x)) = \{qp \mid q \in F[x]\}$ označuje hlavní ideál okruhu $F[x]$ generovaný polynomem $p(x)$.

Pole $F$ je *algebraicky uzavřené*, pokud každý polynom v $F[x]$ má kořen v $F$. V oddílu 2.8 se dokazuje algebraická uzavřenost pole $\mathbb{C}$. Snadno vidíme, že pak každý nenulový polynom $p(x)$ v $F[x]$ má faktorizaci

$$p(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \ ,$$

kde $c \in F \setminus \{0_F\}$ je jeho vedoucí koeficient, $n$ je jeho stupeň a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou ne nutně různé prvky v $F$. Řekneme, že pole $\overline{F}$ v rozšíření polí $F \subset \overline{F}$ je *algebraický uzávěr pole* $F$, pokud $\overline{F}$ je algebraicky uzavřené a každý prvek $a \in \overline{F}$ je algebraický nad $F$. Dá se dokázat, že každé pole má algebraický uzávěr a ten je až na izomorfismus polí jednoznačný. Například pole $\mathbb{C}$ je algebraickým uzávěrem pole $\mathbb{R}$.

**Definice 16.1.4 (konjugáty prvku)** *Nechť $F \subset G$ je rozšíření polí, $\overline{F}$ je algebraický uzávěr pole $F$ & prvek $a \in G$ stupně $n \in \mathbb{N}$ je algebraický nad $F$. Konjugáty prvku $a$ (nad $F$) jsou prvky $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ v $\overline{F}$ z faktorizace*

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

*minimálního polynomu $p \in F[x]$ prvku $a$ nad $F$ v $\overline{F}[x]$.*

Můžeme předpokládat, že $\alpha_1 = a$. Dá se dokázat, že pro pole $F$ charakteristiky 0 jsou konjugáty prvku vždy vzájemně různé.

**Definice 16.1.5 (diferenciální pole)** *Diferenciální pole $F$ je algebraická struktura*

$$F = (0_F, 1_F, +, \cdot, ') \ ,$$

*kde $(0_F, 1_F, +, \cdot)$ je pole a $' \colon F \to F$ je zobrazení, takzvaná derivace (pole $F$), které pro každé dva prvky $x, y \in F$ splňuje, že*

$$(x + y)' = x' + y' \ \ a \ \ (xy)' = x'y + yx' \ .$$

Tato abstraktní derivace se v řadě ohledů chová jako klasická derivace funkce z kapitoly 10. Není těžké odvodit, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in F$ je

$$\left(x^n\right)' = n_F x^{n-1} x' \ ,$$

a že pro každé $x, y \in F$, $y \neq 0_F$, je

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2} \ .$$

Podobně přenecháváme čtenářce i důkaz následující identity.

**Tvrzení 16.1.6 (logaritmická derivace)** *$F$ buď diferenciální pole, $n \in \mathbb{N}$, a $x = x_1 x_2 \dots x_n$, kde $x_i \in F$ a $x_i \neq 0_F$. Pak*

$$\frac{x'}{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i'}{x_i} \ .$$

**Definice 16.1.7 (konstanty)** *Prvek $x \in F$ diferenciálního pole $F$ nazveme konstantou, pokud $x' = 0_F$.*

Lehce se vidí, že $0_F$ a $\pm 1_F$ jsou vždy konstanty a že pro konstanty $x, y \in F$ jsou konstantami i $x + y$, $xy$ a, pro $y \neq 0_F$, i $x/y$. Konstanty tak vytvářejí podpole pole $F$.

**Definice 16.1.8 (exp a log)** *Nechť $F$ je diferenciální pole a $x, y \in F$, $x \neq 0_F$. Řekneme, že prvek $x$ je exponenciálou prvku $y$ a že prvek $y$ je logaritmem prvku $x$, pokud*

$$\frac{x'}{x} = y' \ .$$

Pro dvě diferenciální pole $F$ a $G$ zápis $F \subset G$ znamená, že $G$ je diferenciálním rozšířením $F$. Tedy $F$ je podpole pole $G$ a zúžení derivace pole $G$ na $F$ je derivace pole $F$.

**Tvrzení 16.1.9 (rozšíření derivace)** *Nechť*

$$F \subset F(a)_{\mathrm{alg}} =: G$$

*je jednoduché algebraické rozšíření pole $F$, které je i diferenciální pole. Pak lze derivaci pole $F$ jednoznačné rozšířit na $G$ tak, že se z $G$ stane diferenciální pole.*

**Důkaz.**

□

*Důkaz věty 16.1.1.* Bla □

## 16.2 Antiderivace $\int \mathrm{e}^{-x^2}$ a $\int 1/\log x$

Z Liouville–Rosenlichtovy věty v předchozím oddílu odvodíme dva důsledky.

**Důsledek 16.2.1 (o $\int \mathrm{e}^{-x^2}$)** *Žádná antiderivace funkce*

$$\mathrm{e}^{-x^2} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

*není elementární funkce.*

**Důsledek 16.2.2 (o $\int 1/\log x$)** *Žádná antiderivace funkce*

$$1/\log x \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

*není elementární funkce.*

Pochopitelně nejprve zavedeme množinu elementárních funkcí. Budou to funkce typu

$$f\colon I \setminus Z \to \mathbb{C}\,,$$

kde $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdný otevřený interval a $Z \subset I$ je diskrétní množina, to jest množina bez limitního bodu v $I$.

**Definice 16.2.3 (meromorfní funkce)**

# Kapitola 17

# Přednáška 12. Riemannův integrál

V posledních třech přednáškách se podíváme na dva klasické integrály a na jejich použití. Ve dvanácté se budeme věnovat nejklasičtějšímu z nich, Riemannovu integrálu. V podkapitole 17.1 ho třemi způsoby definujeme (tvrzení 17.1.2) a v tvrzení 17.1.9 dokážeme jeho aditivitu.

Podkapitola 17.2 je věnována existenčním otázkám Riemannova integrálu.

## 17.1 Definice Riemannova integrálu

• *Riemannův integrál.* Rozvineme teorii Riemannových součtů z předminulé přednášky. Jak víme, pro reálná čísla $a < b$ je dělení intervalu $[a, b]$ s body dvojice $(\overline{a}, \overline{t})$, kde

$$\begin{aligned} \overline{a} &= (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b),\ k \in \mathbb{N},\ \text{a} \\ \overline{t} &= (t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_k)\ \text{s}\ t_i \in [a_{i-1},\, a_i]\ \forall\, i \in [k]\ . \end{aligned}$$

Dále $\|\overline{a}\| = \max(\{a_i - a_{i-1} \mid i \in [k]\})$. Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Riemannův součet pro $f$ a $(\overline{a}, \overline{t})$ je

$$R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)\ .$$

**Definice 17.1.1 (Riemannův integrál)** *Funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, je riemannovsky integrovatelná, symbolicky $f \in \mathrm{R}(a, b)$, pokud*

$$\exists\, c\ \forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\ \forall\, (\overline{a}, \overline{t})\ \big(\|\overline{a}\| < \delta \Rightarrow |R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - c| < \varepsilon\big)\ .$$

*Pak píšeme*

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f = c \quad \textit{nebo} \quad (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = c$$

*a řekneme, že (Riemannův) integrál funkce $f$ přes interval $[a, b]$ se rovná $c$.*

Když je jasné, o jaký integrál jde, upřesnění (R)… vynecháme. Význam symbolu $\int_a^b f$ opět mírně rozšíříme: vždy $\int_a^a f := 0$ a $\int_b^a f := -\int_a^b f$ pro $f \in \mathrm{R}(a,b)$.

**Tvrzení 17.1.2** ($f \in \mathrm{R}(a,b) \iff \dots$) *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Následující tři tvrzení jsou logicky ekvivalentní.*

1. $f \in \mathrm{R}(a,b)$.
2. *(Cauchyova podmínka)* $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\ \forall\, (\overline{a},\overline{t})\, \forall\, (\overline{b},\overline{u})$ *platí, že*
$$\|\overline{a}\|,\ \|\overline{b}\| < \delta \Rightarrow |R(\overline{a},\ \overline{t},\ f) - R(\overline{b},\ \overline{u},\ f)| < \varepsilon\ .$$
3. *(Heineho definice)* $\forall$ *posloupnost* $\big((\overline{a_n},\overline{t_n})\big)$ *platí, že*
$$\lim \|\overline{a_n}\| = 0 \Rightarrow \textit{posloupnost } \big(R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f)\big) \textit{ konverguje}\ .$$

*Platí-li 1 a 3, pak* $\int_a^b f = \lim R(\overline{a_n},\overline{t_n},f)$.

**Důkaz.** Implikace $1 \Rightarrow 2$. Nechť tedy $c = \int_a^b f$. Tato implikace lehce vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti
$$|R(\overline{a},\ \overline{t},\ f) - R(\overline{b},\ \overline{u},\ f)| \le |R(\overline{a},\ \overline{t},\ f) - c| + |c - R(\overline{b},\ \overline{u},\ f)|\ .$$
Implikace $2 \Rightarrow 3$. Nechť platí Cauchyova podmínka 2 a $\big((\overline{a_n},\overline{t_n})\big)$ je libovolná posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s body, v níž norma dělení jde k 0. Pak $\big(R(\overline{a_n},\overline{t_n},f)\big)$ je Cauchyova a tedy konvergentní. □

**Úloha 17.1.3** *Dokažte zbývající implikaci $3 \Rightarrow 1$.*

Příště uvidíme další ekvivalentní definici riemannovské integrovatelnosti, Darbouxovu.

• *Vlastnosti* (R) $\int_a^b$. Dokážeme pár vlastností tohoto integrálu.

**Tvrzení 17.1.4 (konečně mnoho změn)** *$f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{R}(a,b)$ a $g$ se od $f$ liší jen v konečně mnoha hodnotách. Potom $g \in \mathrm{R}(a,b)$ a $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

**Důkaz.** $f$ a $g$ buďte, jak uvedeno, a nechť $g$ se od $f$ liší právě v $c_1,\dots,c_k \in [a,b]$. Nechť posloupnost $\big((\overline{a_n},\overline{t_n})\big)$ splňuje, že $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$. Pak
$$\lim R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f) = \int_a^b f$$
podle předchozího tvrzení. Ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ se
$$R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ g) = R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f) + O(k \cdot \|\overline{a_n}\|)$$
a implicitní konstantu v $O$ lze vzít jako $\max_{i\in[k]} |g(c_i) - f(c_i)|$ (úloha 17.1.5). Díky $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ též
$$\lim R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ g) = \int_a^b f$$
a díky předchozímu tvrzení jsme hotovi. □

**Úloha 17.1.5** *Dokažte tvrzení o $O$ v předešlém důkazu.*

**Úloha 17.1.6** *Dokažte, že pokud $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \notin \mathrm{R}(a,b)$ a $g$ se od $f$ liší jen v konečně mnoha hodnotách, pak též $g \notin \mathrm{R}(a,b)$.*

**Úloha 17.1.7** *Ukažte, že tvrzení 17.1.4 pro Newtonův integrál neplatí.*

Ovšem viz pozdější poznámka o $(\mathrm{N_e}) \int$. Pomocí tvrzení 17.1.4 rozšíříme $(\mathrm{R}) \int_a^b$ na libovolný netriviální omezený interval.

**Definice 17.1.8 (obecný** $(\mathrm{R}) \int_a^b f$**)** *$a < b$ a $f\colon I \to \mathbb{R}$, kde $I = (a,b)$ nebo $(a,b]$ nebo $[a,b)$. Nechť $f^*\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je libovolné rozšíření funkce $f$. Definujeme*

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f := (\mathrm{R}) \int_a^b f^* \,,$$

*pokud pravá strana existuje.*

Pro jednoduchost zápisu v následujícím tvrzení vynecháme symboly restrikcí $f \mid [a,b]$ a $f \mid [b,c]$.

**Tvrzení 17.1.9 (aditivita)** *$a < b < c$ jsou reálná čísla a $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$. Pak*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, c) \iff f \in \mathrm{R}(a,\, b) \wedge f \in \mathrm{R}(b,\, c)\,.$$

*Když obě strany ekvivalence platí, pak $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$. Nechť jsou dány $f \in \mathrm{R}(a,c)$ a $\varepsilon$. Pro $f \mid [a,b]$ dokážeme Cauchyho podmínku tvrzení 17.1.2. Buďte dána dělení s body $(\overline{a}, \overline{t})$ a $(\overline{b}, \overline{u})$ intervalu $[a,b]$ splňující, že $\|\overline{a}\|, \|\overline{b}\| < \delta$, kde $\delta$ zaručuje splnění Cauchyho podmínky v $\int_a^c f$ pro $\varepsilon$. Nechť $\overline{a_0}$ a $\overline{b_0}$ jsou taková rozšíření těchto dělení na dělení intervalu $[a,c]$, že $\|\overline{a_0}\|$, $\|\overline{b_0}\| < \delta$ a že body dělení $\overline{a_0}$ a v $\overline{b_0}$ obsažené v $[b,c]$ se shodují. Body $\overline{t}$ a $\overline{u}$ také rozšíříme libovolnými identickými body $t_i = u_i \in [b,c]$ do bodů $\overline{t_0}$ a $\overline{u_0}$. Pak

$$\begin{aligned} |R(\overline{a_0},\, \overline{t_0},\, f) - R(\overline{b_0},\, \overline{u_0},\, f)| &\overset{(1)}{=} |R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - R(\overline{b},\, \overline{u},\, f)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

(úloha 17.1.10). Důkaz Cauchyho podmínky pro $f \mid [b,c]$ je podobný. Identita $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ plyne sloučením dělení intervalů $[a,b]$ a $[b,c]$ s normami jdoucími k 0 do dělení intervalu $[a,c]$ (opět s normami jdoucími k 0) a pomocí části 3 tvrzení 17.1.2.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $f \in \mathrm{R}(a,b) \cap \mathrm{R}(b,c)$. Podle tvrzení 17.2.1 níže je $f$ omezená. Omezující konstantu označíme jako $d > 0$. Nechť $(\overline{a}, \overline{t})$ je libovolné dělení intervalu $[a,c]$ s body. $\overline{a}$ rozdělíme na dělení $\overline{a_1}$ a $\overline{a_2}$ intervalů $[a,b]$ a $[b,c]$ splňující $\|\overline{a_1}\|, \|\overline{a_2}\| \le \|\overline{a}\|$. Body $\overline{t_1}$ a $\overline{t_2}$ zvolíme následovně. Pokud $b \in \overline{a}$, rozdělení provedeme zřejmým způsobem. Pokud $b \notin \overline{a}$, dělení $\overline{a_1}$ a $\overline{a_2}$ získáme rozdělením

toho intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ z $\overline{a}$, že $b \in (a_{i-1}, a_i)$, na dva intervaly $[a_{i-1}, b]$ a $[b, a_i]$ a $\overline{t_1}$ a $\overline{t_2}$ získáme výběrem dvou libovolných bodů ve dvou nových intervalech. Pak

$$R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) \overset{(2)}{=} R(\overline{a_1},\, \overline{t_1},\, f) + R(\overline{a_2},\, \overline{t_2},\, f) + O(\|\overline{a}\| d)$$

(úloha 17.1.11). Odtud lehce vidíme, že splnění Cauchyho podmínky pro $f$ na $[a, c]$ vyplývá z jejího splnění pro $f$ na $[a, b]$ a na $[b, c]$. Identita $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ plyne stejným způsobem jako pro opačnou implikaci. □

**Úloha 17.1.10** *Proč platí rovnost (1)?*

**Úloha 17.1.11** *Proč platí rovnost (2)?*

**Úloha 17.1.12** *Dokažte následující tvrzení.*

**Tvrzení 17.1.13 ($\Leftarrow$ pro Newtonův $\int$)** *Nechť $A < C < B < D$ jsou v $\mathbb{R}^*$, $f\colon (A, D) \to \mathbb{R}$ a nechť $f \in \mathrm{N}(A, B) \cap \mathrm{N}(C, D)$. Pak i $f \in \mathrm{N}(A, D) \cap \mathrm{N}(C, B)$ a*

$$(\mathrm{N}) \int_A^D f = (\mathrm{N}) \int_A^B f + (\mathrm{N}) \int_C^D f - (\mathrm{N}) \int_C^B f \,.$$

Zde je čtvrtá definici plochy oblasti $G_{\leq f}$ pod grafem funkce $f$.

**Definice 17.1.14 (opět $A_f$)** *Nechť $f \in \mathrm{R}(a, b)$. Plochu $A_f$ oblasti $G_{\leq f}$ pod grafem funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (nebo funkce $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$, ...) definujeme jako*

$$A_f := (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

## 17.2 Existence Riemannova integrálu

• *Neexistence Riemannova integrálu.* Nejprve ale dva výsledky o jeho neexistenci. Jak víme, pro $M \subset \mathbb{R}$ je funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ omezená, pokud existuje konstanta $c$, že $\forall\, x \in M\, \big(|f(x)| < c\big)$. Jinak je $f$ neomezená.

**Tvrzení 17.2.1 (o neomezených funkcích)** *Neomezené funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nejsou riemannovsky integrovatelné.*

**Důkaz.** Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je neomezená. Ukážeme, že pro každé $n$ existstuje $(\overline{a}, \overline{t})$ (dělení intervalu $[a, b]$ s body), že

$$\|\overline{a}\| < 1/n \;\wedge\; |R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| > n \,.$$

To popírá Cauchyovu podmínkou riemannovské integrovatelnosti funkce $f$.

Z neomezenosti $f$ a z kompaktnosti $[a, b]$ vyplývá, že existuje konvergentní posloupnost $(b_n) \subset [a, b]$ s limitou $\lim b_n = \alpha \in [a, b]$ a s $\lim |f(b_n)| = +\infty$. Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Jako $\overline{a}$ vezmeme libovolné dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_k)$ intervalu

$[a, b]$ s $\|\overline{a}\| < 1/n$, ale takové, že existuje *jediný* index $j \in [k]$, že $\alpha \in [a_{j-1}, a_j]$. Pak vybereme libovolné body $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ pro každé $i \neq j$ a uvážíme neúplný Riemannův součet

$$s := \sum_{i=1,\, i\neq j}^{k} (a_i - a_{i-1}) f(t_i) \ .$$

Nyní vybereme zbývající bod $t_j \in [a_{j-1}, a_j]$ tak, že

$$|(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| > |s| + n \ .$$

To lze, protože $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro každé dostatečně velké $n$. Pak definujeme $\overline{t}$ jako sestávající ze všech těchto bodů a pomocí trojúhelníkové nerovnosti $|u + v| \geq |u| - |v|$ dostaneme, že

$$|R(\overline{a},\, \overline{t},\, f)| \geq |(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| - |s| > n \ ,$$

jak se požadovalo. □

**Tvrzení 17.2.2 (hodně nespojité funkce nemají** (R) $\int_a^b$**)** *Nechť je funkce*

$$f \colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

*nespojitá v každém bodě nějakého podintervalu* $[c, d] \subset [a, b]$ *s* $c < d$. *Pak* $f$ *není riemannovsky integrovatelná.*

Například Dirichletova funkce $d \colon [0, 1] \to \{0, 1\}$, daná jako $d(x) = 0$ pro racionální $x$ a $d(x) = 1$ pro iracionální $x$, je všude nespojitá, takže není riemannovsky integrovatelná.

**Úloha 17.2.3** *Dokažte přímo, že Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná.*

• *Důkaz tvrzení 17.2.2 pomocí Baireovy věty.* Nechť $a < b$ jsou reálná čísla. Množina $M \subset [a, b]$ je *řídká (v* $[a, b]$*)*, pokud pro každé okolí $U(c, \varepsilon)$ s $c \in [a, b]$ existuje takové okolí $U(d, \delta) \subset U(c, \varepsilon) \cap [a, b]$, že $U(d, \delta) \cap M = \emptyset$. Libovolně blízko libovolného bodu $c \in [a, b]$ tedy v $[a, b]$ nalezneme netriviální interval disjunktní s množinou $M$.

**Věta 17.2.4 (Baireova věta v** $\mathbb{R}$**)** *Jsou-li* $a < b$ *reálná čísla a*

$$[a,\, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \ ,$$

*některá množina* $M_n$ *není řídká.*

**Důkaz.** Nechť v $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je každá množina $M_n$ řídká, odvodíme spor. $M_1$ je řídká $\Rightarrow \exists\, [a_1, b_1] \subset [a,b]$, že $a_1 < b_1$ a $[a_1, b_1] \cap M_1 = \emptyset$. $M_2$ je řídká $\Rightarrow$ $\exists\, [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, že $a_2 < b_2$ a $[a_2, b_2] \cap M_2 = \emptyset$, atd. Takto získáme takovou posloupnost vnořených intervalů

$$[a,\, b] \supset [a_1,\, b_1] \supset [a_2,\, b_2] \supset \cdots \supset [a_n,\, b_n] \supset \dots\ ,$$

že

$$\forall\, n \left(a_n < b_n \wedge [a_n, b_n] \cap M_n = \emptyset\right)\ .$$

Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a,b]$. Tato limita existuje a leží v $[a,b]$, protože posloupnost $(a_n)$ je neklesající a je zdola omezená číslem $a$ a shora číslem $b$. Dokonce $a_n < b_m$ pro každé $n$ a každé $m$, takže $\alpha \in [a_n, b_n]$ pro každé $n$. Pak ale $\alpha \notin M_n$ pro každé $n$, ve sporu s tím, že $\alpha \in [a,b]$. □

O francouzském matematikovi R.-L. Bairem píšeme více v podpříloze C.1.

**Důkaz tvrzení 17.2.2.** Nechť $f$, $a$, $b$, $c$ a $d$ jsou, jak je uvedeno. Ukážeme, že $\exists\, \varepsilon\, \forall\, n\, \exists\, (\overline{a}, \overline{t})\, \exists\, (\overline{a}, \overline{u})$, že

$$\|\overline{a}\| < 1/n \ \wedge\ R(\overline{a},\, \overline{t},\, f) - R(\overline{a},\, \overline{u},\, f) > \varepsilon\ ,$$

v rozporu s Cauchyovou podmínkou riemannovské integrovatelnosti funkce $f$.

Pro $j \in \mathbb{N}$ definujeme množinu $M_j \subset [c,d]$ jako

$$\{x \in [c,\, d] \mid \forall\, \delta\, \exists\, y,\, z \in U(x,\delta) \cap [c,\, d]\, \big(f(y) - f(z) > 1/j\big)\}\ .$$

Protože na $[c,d]$ je funkce $f$ nespojitá, $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = [c,d]$. Podle Baireovy věty existuje takové $m \in \mathbb{N}$, že $M_m$ není v $[c,d]$ řídká. To znamená, že existuje takový podinterval $[c_1, d_1] \subset [c,d]$, že $c_1 < d_1$ a pro každé okolí $U(e,\delta)$ protínající $[c_1, d_1]$ průnik obsahuje bod z $M_m$.

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Jako $\overline{a}$ vezmeme jakékoli dělení intervalu $[a,b]$ s $\|\overline{a}\| < 1/n$ a takové, že body $c_1$ a $d_1$ leží v $\overline{a}$. Pro intervaly $[a_{i-1}, a_i]$ z $\overline{a}$ s vnitřky disjunktními s $[c_1, d_1]$ vybereme body $t_i = u_i \in [a_{i-1}, a_i]$ libovolně. Pokud $[a_{i-1}, a_i] \subset [c_1, d_1]$, můžeme vybrat takové body $t_i, u_i \in [a_{i-1}, a_i]$, že $f(t_i) - f(u_i) > 1/m$ (protože $M_m$ je hustá v $[c_1, d_1]$). Pak definujeme tice $\overline{t}$, resp. $\overline{u}$, jako sestávající ze všech těchto bodů $t_i$, resp. $u_i$. Z toho vyplývá, že rozdíl $R(\overline{a}, \overline{t}, f) - R(\overline{a}, \overline{u}, f)$ se rovná

$$\sum_{[a_{i-1},\, a_i] \subset [c_1,\, d_1]} (a_i - a_{i-1})(f(t_i) - f(u_i)) \overset{(1)}{>} \frac{1}{m} \sum_{[a_{i-1},\, a_i] \subset [c_1,\, d_1]} (a_i - a_{i-1})$$
$$\overset{(2)}{=} \frac{d_1 - c_1}{m}\ .$$

Můžeme tedy položit $\varepsilon := (d_1 - c_1)/m$. □

**Úloha 17.2.5** *Proč v důkazu platí nerovnost (1) a rovnost (2)?*

• *Lebesgueova věta.* Existuje mocné kritérium — Lebesgueova věta níže — s jehož pomocí se obvykle snadno určí, zda je daná funkce riemannovsky integrovatelná nebo ne. Věta používá dvě definice.

# Kapitola 18

# Přednáška 13. Upgrade Riemannova integrálu: Henstock–Kurzweilův integrál

V kapitole založené na poslední třinácté přednášce nejprve popíšeme další ekvivalentní definici Riemannova integrálu, která je založená na takzvaných dolních a horních součtech pro danou funkci a dané dělení intervalu. Pak popíšeme vylepšení Riemannova integrálu Henstock–Kurzweilovým integrálem, který dokáže zintegrovat každou derivaci. To dokážeme ve větě 18.2.6. Uvedeme verze vzorců pro integraci per partes a substitucí pro Riemannův integrál. Substituci řeší odpovídajícím způsobem Preissova a Uhrova věta 18.3.4, kterou dokážeme v podkapitole 20.4. Závěrem kapitoly uvedeme několik aplikací Riemannova integrálu ve vzorcích pro délku grafu, plochu mezi dvěma grafy a objem rotačního tělesa a v sumačních formulích, které aproximují či přímo vyjadřují konečné součty pomocí integrálů.

## 18.1 Darbouxova definice Riemannova integrálu

• *Riemannův integrál podle J.-G. Darbouxe.* Uvedeme další ekvivalentní definici Riemannova integrálu. Pro reálná čísla $a < b$ a dělení $P = (a_0, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ si označíme $I_i := [a_{i-1}, a_i]$ a $|I_i| := a_i - a_{i-1}$. Pro funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme součty

$$s(P,\, f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \inf(f[I_i]) \;\text{ a }\; S(P,\, f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \sup(f[I_i])$$

po řadě *dolním* a *horním součtem (pro dělení $P$ a funkci $f$)*. Infima a suprema bereme opět v $(\mathbb{R}^*, <)$ a tedy

$$s(P, f) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ a } S(P, f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} .$$

**Úloha 18.1.1** *Pro každou funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a každé dělení $P$ intervalu $[a, b]$ platí, že*

$$f \text{ je shora neomezená} \iff S(P, f) = +\infty$$

*a že*

$$f \text{ je zdola neomezená} \iff \forall P\colon s(P, f) = -\infty .$$

**Úloha 18.1.2 (monotonie d. a h. součtů)** *Nechť $P \subset Q$ jsou dělení intervalu $[a, b]$ a nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak*

$$s(P, f) \le s(Q, f) \text{ a } S(P, f) \ge S(Q, f) .$$

Jako pomocné tvrzení uvedeme a dokážeme vlastně nejjednodušší definici Riemannova integrálu.

**Tvrzení 18.1.3 (4. definice R. integrálu)** *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak*

$$f \in \mathrm{R}(a, b) \iff \exists\, c\, \forall\, \varepsilon\, \exists\, P\, \forall\, \bar{t}\colon |c - R(P, \bar{t}, f)| < \varepsilon .$$

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$ je triviální z definice Riemannova integrálu, stačí položit $c := \int_a^b f$.

Dokážeme implikaci $\Leftarrow$. Lehce se vidí (viz důkaz tvrzení 17.2.1), že $f$ je omezená. Nechť $d > 0$ je nějaká konstanta omezující $|f|$. Podle předpokladu implikace vezmeme číslo $c \in \mathbb{R}$ a pro dané $\varepsilon$ vezmeme dělení

$$P = (a_0, \ldots, a_k)$$

intervalu $[a, b]$, že pro každé dělící body $\bar{t}$ platí uvedená nerovnost. Ukážeme, že pro každé dělení $Q$ intervalu $[a, b]$ s malou normou $\Delta(Q)$ se pro libovolné testovací body $\overline{u}$ z $Q$ i $R(Q, \overline{u}, f)$ málo liší od $c$. Odtud plyne, že $f \in \mathrm{R}(a, b)$ a že $c = \int_a^b f$.

Nechť tedy

$$Q = (b_0, \ldots, b_l)$$

a $\overline{u}$ jsou nějaké testovací body z $Q$. Můžeme předpokládat, že

$$\Delta(Q) < \min_{1 \le i \le k} (a_i - a_{i-1}) .$$

Pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ definujeme bod $t_i := u_j$ pro některý bod $u_j$ minimalizující hodnoty

$$\{f(u_j) \mid [b_{j-1}, b_j] \cap [a_{i-1}, a_i] \neq \emptyset\} .$$

Nechť $X$ je množina těch intervalů $[b_{j-1}, b_j]$, že interval $(b_{j-1}, b_j)$ obsahuje (nutně jen jeden) bod z $P$. Pak

$$R(Q,\, \overline{u},\, f) + \sum_{[b_{j-1},\, b_j] \in X} (b_j - b_{j-1}) f(u_j) \geq R(P,\, \overline{t},\, f) > c - \varepsilon\ .$$

Zde první nerovnost platí, protože všechny intervaly $[a_{i-1}, a_i]$ jsou současně pokryty intervaly $[b_{j-1}, b_j]$ tak, že každý $[b_{j-1}, b_j]$ je použit jednou, kromě intervalů v $X$, které jsou použity dvakrát. Druhá nerovnost platí díky vlastnosti dělení $P$. Tedy, protože $|X| \leq k$,

$$R(Q,\, \overline{u},\, f) > c - \varepsilon - k\Delta(Q)d\ .$$

Podobně se volbou maximalizujících $u_j$ v $t_i := u_j$ a odečtením sumy přes $[b_{j-1},\, b_j] \in X$ dokáže nerovnost $R(Q, \overline{u}, f) < c + \varepsilon + k\Delta(Q)d$. Tedy

$$|R(Q,\, \overline{u},\, f) - c| < \varepsilon + k\Delta(Q)d < 2\varepsilon\ ,$$

pokud $\Delta(Q) < \varepsilon/kd$, jak jsme slíbili. □

**Úloha 18.1.4** *Proč je $|X| \leq k$?*

Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $\mathcal{D} = \mathcal{D}(a, b)$ označuje množinu všech dělení intervalu $[a, b]$. Pak

$$\underline{\int_a^b} f := \sup(\{s(P,\, f) \mid P \in \mathcal{D}\}) \in \mathbb{R}^* \ \text{ a } \ \overline{\int_a^b} f := \inf(\{S(P,\, f) \mid P \in \mathcal{D}\}) \in \mathbb{R}^*$$

(infima a suprema opět bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$) je po řadě takzvaný *dolní* a *horní integrál (funkce $f$ přes interval $[a, b]$).*

**Tvrzení 18.1.5 ($\underline{\int} \leq \overline{\int}$)** *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak pro každá dvě dělení $P, Q \in \mathcal{D}(a, b)$ je*

$$s(P, f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(Q, f)\ .$$

**Důkaz.** Nechť $f$ je, jak uvedeno, a nechť $P$ a $Q$ jsou dělení intervalu $[a, b]$. Už známe trik se společným zjemněním $R := P \cup Q$. Pak totiž $P, Q \subset R$ a tedy, podle úlohy 18.1.2,

$$s(P,\, f) \leq s(R,\, f) \leq S(R,\, f) \leq S(Q,\, f), \ \text{ a tak } \ s(P,\, f) \leq S(Q,\, f)\ .$$

Nyní už stačí použít fakt, že v každém lineárním uspořádání $(X, \prec)$ pro každé dvě množiny $A, B \subset X$ s $A \preceq B$ platí nerovnost $\sup(A) \preceq \inf(B)$, když tyto prvky existují. □

**Úloha 18.1.6** *Dokažte fakt o lineárních uspořádáních použitý na konci důkazu.*

Následující tvrzení tak podává ekvivalentní definici Riemannova integrálu pomocí dolních a horních součtů. Je to asi nejčastější definice Riemannova integrálu v matematické literatuře. My jsme ji ale v minulé přednášce nezvolili jako základní proto, že kvůli jevu popsanému úlohou 18.1.1 se nám z logického hlediska tato definice jeví jako méně vhodná než zvolená základní definice 17.1.1. Individuální Riemannovy součty $R(P, \bar{t}, f)$ na rozdíl od dolních a horních součtů $s(P, f)$ a $S(P, f)$ nedetekují neomezenost funkce $f$ a nesvádějí proto k vyloučení neomezených funkcí v definici Riemannova integrálu hned od počátku, jak se to často při definici dolními a horními součty děje. Tím se trochu logicky zatemňuje role neomezených funkcí a nelze se pak divit čtenáři, když dospěje k závěru, že neomezené funkce byly v definici Riemannova integrálu vyloučeny jen „legislativně“. Myslíme si, že tvrzení 17.2.1 má být výsledek, věta o Riemannově integrálu, a nemá být součástí definice.

**Věta 18.1.7 (Riemannova def. = Darbouxova def.)** *Funkce* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *je*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, b) \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}\,.$$

*V kladném případu se pak* $(\mathrm{R}) \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f \in \mathrm{R}(a, b)$. Pak je $f$ omezená a infima v $s(P, f)$ a suprema v $S(P, f)$ jsou konečná. Můžeme je tak libovolně těsně aproximovat funkčními hodnotami a dostaneme, že pro každé $\varepsilon$ a každé $P \in \mathcal{D}(a, b)$ existují testovací body $\bar{t}$ z $P$, že

$$|s(P,\, f) - R(P,\, \bar{t},\, f)| < \varepsilon\,,$$

a že pro každé $\varepsilon$ a každé $P \in \mathcal{D}(a, b)$ existují testovací body $\bar{t}$, že

$$|S(P,\, f) - R(P,\, \bar{t},\, f)| < \varepsilon\,.$$

Odtud podle tvrzení 18.1.5 zde a definice 17.1.1 v minulé přednášce plyne implikace i poslední část tvrzení.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $I := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$, tedy je $f$ omezená, a je dáno $\varepsilon$. Podle tohoto předpokladu a podle tvrzení 18.1.5 vezmeme taková $P, Q \in \mathcal{D}(a, b)$, že $s(P, f) \le I \le S(Q, f)$ a $0 \le S(Q, f) - s(P, f) < \varepsilon$. Položíme $R := P \cup Q$. Podle tvrzení 18.1.2 a 18.1.5 je

$$s(P,\, f) \le s(R,\, f) \le I,\; R(R,\, \bar{t},\, f) \le S(R,\, f) \le S(Q,\, f))$$

pro každé testovací body $\bar{t}$ z $R$. Tedy i $|R(R, \bar{t}, f) - I| < \varepsilon$ a $f \in \mathrm{R}(a, b)$ podle tvrzení 18.1.3. $\square$

**Úloha 18.1.8** *Existuje funkce* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, *že* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \pm\infty$. *Je riemannovsky integrovatelná?*

## 18.2 Henstock–Kurzweilův integrál

• *Správná definice Riemannova integrálu — Henstock–Kurzweilův integrál.* Ale definice 17.1.1 Riemannova integrálu stále není ta správná definice. Minule jsme viděli, že

$$(\mathrm{N}) \int_0^1 1/\sqrt{x} = 2 \ ,$$

ale že

$$(\mathrm{R}) \int_0^1 1/\sqrt{x}$$

neexistuje, protože integrand $1/\sqrt{x}$ je neomezený. Neschopnost Riemannova integrálu zintegrovat neomezené funkce je jeho vážný nedostatek. V roce 1957 český matematik *Jaroslav Kurzweil (1926–2022)* a o něco později anglický matematik *Ralph Henstock (1923–2007)* upravili podmínku $\Delta(P) < \delta$ a vylepšili tím Riemannův integrál tak, aby dokázal zintegrovat neomezené funkce. Uvedeme definici jejich integrálu a dokážeme o něm základní větu. Nutná změna v definici 17.1.1 je opticky malá, ale podstatná.

Pro interval $I \subset \mathbb{R}$ nazveme každou funkci

$$\delta_c \colon I \to (0, +\infty)$$

*kalibrem (na $I$).* Dělení $P = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ spolu s testovacími body $\overline{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$, nazveme *$\delta_c$-jemnými*, pokud

$$\forall\, i = 1,\, 2,\, \dots,\, k \colon a_i - a_{i-1} < \delta_c(t_i) \ .$$

**Úloha 18.2.1** *Je-li $P$ dělení intervalu $[a, b]$ s $\Delta(P) < \delta$, pak pro libovolné testovací body $\overline{t}$ jsou $P$ a $\overline{t}$ $\delta_c$-jemné pro konstantní kalibr $\delta_c(x) = \delta$.*

**Tvrzení 18.2.2 (Cousinovo lemma)** *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$. Pro každý kalibr*

$$\delta_c \colon [a,\, b] \to (0, +\infty)$$

*existují $\delta_c$-jemné dělení $P \in \mathcal{D}(a, b)$ s testovacími body $\overline{t}$. Dokonce každý konečný systém*

$$\{[a_i,\, b_i] \mid i \in I\}$$

*vzájemně disjunktních podintervalů $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ s takovými testovacími body $t_i \in [a_i, b_i]$, že $b_i - a_i < \delta_c(t_i)$ pro každé $i \in I$, lze rozšířit přidáním intervalů a testovacích bodů na $\delta_c$-jemné dělení intervalu $[a, b]$ s testovacími body $\overline{t}$.*

**Důkaz.** Množina

$$M := [a, b] \setminus \bigcup_{i \in I} (a_i,\, b_i)$$

je kompaktní, je totiž omezená a uzavřená (je průnik konečně mnoha uzavřených množin), a proto podle důsledku 9.4.5 lze z jejího (otevřeného) pokrytí

$$M \subset \bigcup_{x \in M} U(x,\, \delta_c(x)/2)$$

vybrat konečné podpokrytí $U(x_i, \delta_c(x_i)/2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Intervaly $[a_i, b_i]$, $i \in I$, doplníme vhodnými uzavřenými podintervaly $[c_i, d_i]$ s

$$x_i \in [c_i,\, d_i] \subset (x_i - \delta_c(x_i),\, x_i + \delta_c(x_i))$$

do dělení intervalu $[a, b]$. Testovací body $\bar{t}$ jsou $t_i$, $i \in I$, a $x_1, \ldots, x_n$. Výsledek je $\delta_c$-jemný. □

**Úloha 18.2.3** *Popište, jak se volí intervaly $[c_i, d_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Následuje definice Henstock–Kurzweilova integrálu. Předešlé tvrzení ukazuje, že implikaci v jeho definici lze vždy splnit netriviálně, platným předpokladem. Definice je tedy korektní a nedopouští se logického faulu typu počítání limity funkce v bodě, který není limitním bodem definičního oboru.

**Definice 18.2.4 (Henstock–Kurzweilův integrál)** *Řekneme, že funkce*

$$f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

*je integrovatelná podle Henstocka a Kurzweila, symbolicky psáno $f \in \mathrm{HK}(a, b)$, pokud existuje takové číslo $L \in \mathbb{R}$, že pro $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta_c$, kde $\delta_c$ je kalibr na $[a, b]$, že pro každé dělení $P$ intervalu $[a, b]$ a testovací body $\bar{t}$ z $P$ platí, že*

$$P \text{ a } \bar{t} \text{ jsou } \delta_c\text{-jemné} \Rightarrow |R(P,\, \bar{t},\, f) - L| < \varepsilon\ .$$

*Pak také píšeme*

$$(\mathrm{HK}) \int_a^b f = L \quad \textit{nebo} \quad (\mathrm{HK}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = L\ .$$

*Řekneme, že Henstock–Kurzweilův integrál funkce $f$ přes $[a, b]$ se rovná $L$.*

**Úloha 18.2.5** *Zřejmě* $\mathrm{R}(a, b) \subset \mathrm{HK}(a, b)$.

Následující větu jsme i s důkazem převzali z učebnice [112, str. 96–97]. Ukazuje, že Henstock–Kurzweilův integrál je už konečně správný partner Newtonova integrálu, protože zintegruje každou derivaci mající Newtonův integrál.

**Věta 18.2.6 (HK. $\int$ a N. $\int$)** *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, funkce*

$$F\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

*je spojitá a $F' = f$ na $(a, b)$ (hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ jsou irelevantní). Pak funkce $f \in \mathrm{HK}(a, b)$ a*

$$(\mathrm{HK}) \int_a^b f = F(b) - F(a) = (\mathrm{N}) \int_a^b f\ .$$

**Důkaz.** Pro dané $\varepsilon$ a $x \in (a,b)$ existuje vzhledem k rovnosti $F'(x) = f(x)$ taková hodnota $\delta_c(x) > 0$, že pro každé $y \in [a,\, b]$ platí, že

$$y \in U(x,\, \delta_c(x)) \Rightarrow |F(y) - F(x) - f(x)(y-x)| \le \varepsilon \cdot |y - x| \ . \qquad (*)$$

Dále existují takové hodnoty $\delta_c(a) > 0$ a $\delta_c(b) > 0$, že

$$|f(a)\delta_c(a)| < \varepsilon \ \text{ a } \ |f(b)\delta_c(b)| < \varepsilon$$

a že

$$|F(y) - F(a)| < \varepsilon \ \text{ a } \ |F(z) - F(b)| < \varepsilon$$

pro každé $y \in [a, a + \delta_c(a))$ a každé $z \in (b - \delta_c(b), b]$. Nechť dělení $P = (a_0, \dots, a_k) \in \mathcal{D}(a,b)$ spolu s testovacími body $\bar{t}$ jsou $\delta_c$-jemné. Pak pro každý testovací bod a interval $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ s $t_i \ne a, b$ je

$$\begin{aligned}
&|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} |F(a_i) - F(t_i) - \\
&- f(t_i)(a_i - t_i)| + |F(t_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(t_i - a_{i-1})| \\
&\overset{(*)}{\le} \varepsilon|a_i - t_i| + \varepsilon|t_i - a_{i-1}| = \varepsilon(a_i - a_{i-1}) \ .
\end{aligned}$$

Když $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ s $t_i \in \{a, b\}$, pak

$$\begin{aligned}
&|F(a_i) - F(a_{i-1}) - f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \\
&\overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} |F(a_i) - F(a_{i-1})| + |f(t_i)(a_i - a_{i-1})| \overset{\text{Dále ex. } \dots}{<} 2\varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

protože $i = 1$ a $t_1 = a$ nebo $i = k$ a $t_k = b$. Podle těchto dvou odhadů máme, že

$$\begin{aligned}
&|F(b) - F(a) - R(P,\, \bar{t},\, f)| \overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} \\
&\le \sum_{i=1}^{k} |F(a_i) - F(a_{i-1}) - (a_i - a_{i-1})f(t_i)| < \varepsilon(b-a) + 4\varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

a tak $F(b) - F(a) = (\mathrm{HK}) \int_a^b f$. □

Konečně už tedy můžeme zintegrovat funkci $x^{-1/2}$.

**Důsledek 18.2.7** *Nechť* $1/\sqrt{0} := 1$. *Pak* $(\mathrm{HK}) \int_0^1 1/\sqrt{x} = 2$.

## 18.3 Per partes a substituce pro $(\mathrm{R}) \int_a^b f$

• *Integrace per partes a substitucí pro* $(\mathrm{R}) \int_a^b f$. Uvedeme už třetí verze těchto dvou integračních vzorců. První byly pro primitivní funkci, druhé pro Newtonův integrál a tyto jsou pro Riemannův integrál. Substituce se nyní ukazuje být překvapivě netriviální. V následující větě jsou hodnoty $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ a $g(b)$ libovolné.

**Věta 18.3.1 (per partes pro R. $\int$)** *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, funkce*

$$F,\, G,\, f,\, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$$

*splňují na $(a,b)$, že $F' = f$ a $G' = g$, a $Fg, fG \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak platí rovnost*

$$\int_a^b Fg = \big[FG\big]_a^b - \int_a^b fG\ .$$

**Důkaz.** Podle linearity Riemannova integrálu i $fG + Fg \in \mathrm{R}(a,b)$. Z této linearity, z $(FG)' = fG + Fg$ na $(a,b)$ a ze Zvana 2 (věta 15 přednášky 12) máme, že

$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\int_a^b fG + (\mathrm{R})\int_a^b Fg &= (\mathrm{R})\int_a^b (fG + Fg)\\ &= (\mathrm{N})\int_a^b (fG + Fg) = \big[FG\big]_a^b\ ,\end{aligned}$$

což je jen úprava dokazované rovnosti. □

**Úloha 18.3.2**

Jednoduchý, ale ne zcela uspokojivý vzorec pro riemannovskou integraci substitucí je tento.

**Věta 18.3.3 (R. $\int$ substitucí)** *Nechť $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $[a,b]$ spojitou derivaci $G'$ a $f\colon G[\,[a,b]\,] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak platí rovnost Riemannových integrálů*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)G'\ .$$

**Důkaz.** Pro $x \in G[\,[a,b]\,]$ uvážíme funkci

$$F(x) := \int_{G(a)}^{x} f$$

(podle výsledků v minulé přednášce je dobře definovaná). Podle Zvana 1 (věta 16 minulé přednášky) a derivace složené funkce je funkce $F(G)$ na $[a,b]$ primitivní k $f(G)G'$. Podle Zvana 2 (věta 15 minulé přednášky) a definice funkce $F$ se (díky $F(G(a)) = 0$)

$$\int_a^b f(G)G' = \big[F(G)\big]_a^b = F(G(b)) - F(G(a)) = \int_{G(a)}^{G(b)} f\ .$$

□

Neuspokojivé ale je, že tu pracujeme vlastně jen s Newtonovými integrály a že tato věta je už obsažená v části 1 věty 5 o substituci v Newtonově integrálu

v přednášce 11. Větu o substituci pouze pro Riemannův integrál dokázal teprve v r. 1961 H. Kestelman. Uvedeme ji zde ve vylepšené podobě (s ekvivalencí pro riemannovskou integrovatelnost), s kterou přišli v r. 1970 čeští matematici D. Preiss a J. Uher[1].

**Věta 18.3.4 (Preissova a Uhrova)** *Nechť je $g \in \mathrm{R}(a,b)$, pro $x \in [a,b]$ nechť $G(x) := \int_a^x g$ a $f\colon G[\,[a,b]\,] \to \mathbb{R}$ je omezená. Pak $f$ je riemannovsky integrovatelná na intervalu $G[\,[a,b]\,]$, právě když $f(G)g \in \mathrm{R}(a,b)$, a v pozitivním případu platí rovnost Riemannových integrálů*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)g\ .$$

Pro důkaz viz původní článek `https://eudml.org/doc/19168` nebo nověji `https://arxiv.org/abs/1105.5938` a `https://arxiv.org/abs/1904.07446`.

## 18.4 Použití integrálů

• *Použití integrálů ve vzorcích pro délky, plochy a objemy.* Pomocí symbolu $|uv|$ (vždy $\geq 0$) označíme délku rovinné úsečky s konci $u, v \in \mathbb{R}^2$.

**Definice 18.4.1 (délka grafu)** *Řekneme, že $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má rektifikovatelný graf, je-li supremum*

$$\begin{aligned}\ell(f) := \sup\big(\{\textstyle\sum_{i=1}^k \big|\big(a_{i-1}, f(a_{i-1})\big)\,\big(a_i, f(a_i)\big)\big| \mid \\ \mid (a_0,\,\ldots,\,a_k) \in \mathcal{D}(a,\,b)\}\big)\end{aligned}$$

*konečné. Číslo $\ell(f)$ pak nazveme délkou grafu funkce $f$.*

Toto supremum je vlastně supremem délek lomených čar vepsaných grafu $G_f$.

Následujícím vzorcem pro délku grafu jsme schopni spočítat třeba délku obvodu obdélníka a vyrovnat se tak matematice na základní škole. Obvod stačí rozdělit na čtyři úsečky a svislé z nich otočit o $\pi/2$ (či jen o $\varepsilon$), aby vznikly čtyři grafy funkcí.

**Věta 18.4.2 (délka grafu)** *Nechť spojitá $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $(a,b)$ vlastní $f' \in \mathrm{R}(a,b)$. Funkce $f$ pak má rektifikovatelný graf s délkou*

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}\ .$$

[1] Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál, *Čaopis pěst. mat.* **95** (1970), 345–347.

**Důkaz.** Nechť $g := \sqrt{1+(f')^2}$. Pomocí výsledků dosažených v minulé přednášce snadno vidíme, že Riemannův integrál $\int_a^b g$ existuje. Suma v definici 19.1.4, kterou označíme jako $K(P, f)$, zjemněním dělení $P = (a_0, \dots, a_k)$ neklesne, tudíž pro každou posloupnost $(P_n) \subset \mathcal{D}(a, b)$ s $\lim \Delta(P_n) = 0$ se

$$\lim K(P_n,\, f) = \ell(f)$$

nebo pro nerektifikovatelný graf se tato limita vždy rovná $+\infty$. Ale

$$K(P,\, f) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \sqrt{1 + [(f(a_i) - f(a_{i-1}))/(a_i - a_{i-1})]^2}$$

a podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě se

$$\frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = f'(t_i)$$

pro nějaké $t_i \in (a_{i-1}, a_i)$. Označme tyto testovací body $\bar{t}$. Tedy pro $(P_n)$ jako výše se

$$\int_a^b g = \lim_{n\to\infty} R(P_n,\, \overline{t(n)},\, g) = \lim_{n\to\infty} K(P_n, f) = \ell(f)\ .$$

□

Tento vzorec lze rozšířit na křivky tvaru $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Plochu rovinné oblasti jsme nedefinovali nezávisle na integrálu, totéž pro objem v $\mathbb{R}^3$, a tak dva následující vzorce jsou — alespoň v těchto našich přednáškách — na rozdíl od délky grafu jen na úrovni definic.

**Definice 18.4.3 (plocha mezi grafy)** *Nechť $f, g \in \mathrm{R}(a, b)$ a $f \le g$ na $[a, b]$. Pak*

$$\begin{aligned} &\textit{plocha}\big(\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,\, b] \wedge f(x) \le y \le g(x)\}\big) \\ &:= \int_a^b (g - f)\ . \end{aligned}$$

Pro nezápornou funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definujeme *rotační těleso vzniklé rotací $G_f$ kolem osy $x$* jako

$$V(a,\, b,\, f) := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,\, b] \wedge y^2 + z^2 \le f(x)^2\}\ .$$

**Definice 18.4.4 (objem rotačního tělesa)** *Nechť funkce $f$ je v $\mathrm{R}(a, b)$ a je nezáporná. Pak*

$$\textit{objem}\big(V(a,\, b,\, f)\big) := \pi \int_a^b f^2\ .$$

V intuitivním pohledu — nebo jako mnemotechnika pro zapamatování — plyne Riemannův integrál

$$\int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

pro objem tělesa $V(a, b, f)$ ze vzorce $\pi r^2$ pro plochu kruhu s poloměrem $r > 0$. Pro $x$ probíhající $[a, b]$ integrál sečte objemy

$$\pi \cdot f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

tenkých kruhových koláčů s poloměry $f(x)$ a tloušťkou $\mathrm{d}x$. Jako cvičení zkuste podobnou úvahou odvodit vzorec pro povrch, to jest plochu povrchu, tělesa $V(a, b, f)$. Pak můžete vypočítat povrch koule $V(-r, r, \sqrt{r^2 - x^2})$ s poloměrem $r > 0$.

• *Odhady součtů pomocí integrálů.* Jsou užitečné třeba v analytické teorii čísel, kde se součty tvaru $\sum_{n \in X} f(n)$, pro nějakou množinu $X \subset \mathbb{Z}$ a funkci $f(x)$ danou analytickou formulí, často vyskytují. Začneme jednoduchým odhadem s širokým oborem platnosti.

**Tvrzení 18.4.5 ($\sum f(n)$ pro monot. funkci)** *Nechť $a < b$ jsou celá čísla a $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Pak*

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = (\mathrm{R}) \int_a^b f + \theta(f(b) - f(a)) \, ,$$

*pro nějaké číslo $\theta \in [0, 1]$.*

**Důkaz.** Integrál existuje díky monotonii funkce $f$ podle věty 14 minulé přednášky. Předpokládáme, že $f$ je neklesající, případ nerostoucí $f$ se řeší podobně. Teď tedy dokazujeme nerovnosti

$$0 \leq \sum_{a < n \leq b} f(n) - \int_a^b f \leq f(b) - f(a) \, .$$

Pro $b = a + 1$ platí: suma se rovná $f(a + 1)$ a protože pro $x \in [a, a + 1]$ je $f(a) \leq f(x) \leq f(a + 1)$, podle monotonie $(\mathrm{R}) \int$ (kterou jsme ale asi explicitně neuvedli) je $f(a) = f(a) \cdot 1 \leq \int_a^{a+1} f \leq f(a + 1) \cdot 1 = f(a + 1)$. Sečtením těchto nejjednodušších nerovností s mezemi $a = m, b = m+1$ pro $m = a, a+1, \ldots, b-1$ dostaneme obecný případ. □

Třeba pro harmonická čísla $H_n := \sum_{i=1}^n 1/i$ odtud dostaneme pro $n \geq 3$ odhad

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = 1 + \int_1^n 1/x + \theta(1/n - 1) = [\log x]_1^n + \delta \\ &= \log n + \delta, \ 1/n \leq \delta \leq 1 \, . \end{aligned}$$

**Důsledek 18.4.6 (integrální kritérium)** *Předpokládáme, že $m \in \mathbb{N}$ a že funkce $f\colon [m, +\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí. Potom řada*

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \quad \textit{konverguje} \iff \lim_{n\to\infty} \int_m^n f < +\infty \,.$$

**Důkaz.** Jak víme, uvedené Riemannovy integrály existují díky monotonii $f$. Podle předešlého tvrzení pro každé celé číslo $N \geq m+2$ máme identitu

$$\sum_{n=m}^{N} f(n) = f(m) + \int_m^N f + \underbrace{\theta(f(N) - f(m))}_{\in[-f(m),\,0]} \,.$$

Odtud pro $N \to \infty$ vyplývá uvedená ekvivalence. □

Například řada $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n \log n$ diverguje, tj. má součet $+\infty$, protože

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{\mathrm{d}y}{y \log y} = \lim_{n\to\infty} \big[\log(\log y)\big]_2^n = +\infty \,.$$

Stejnou metodou se naopak pro každé reálné $c > 1$ snadno dokáže konvergence řady $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\log n)^c$.

Uvedeme variantu tvrzení 18.4.5 pro funkce s integrovatelnou derivací, kdy se dostane přesnější odhad součtu ve tvaru identity. Připomínáme, že $\lfloor a \rfloor$ je dolní celá část čísla $a \in \mathbb{R}$, největší $m \in \mathbb{Z}$ s $m \leq a$. Zavedeme značení $\langle a \rangle := a - \lfloor a \rfloor - \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

**Věta 18.4.7 ($\sum f(n)$ pro funkci s derivací)** *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a funkce $f \in \mathrm{R}(a,b)$ má na $(a,b)$ derivaci $f' \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak platí formule (integrály jsou Riemannovy)*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f + \underbrace{\int_a^b \langle x \rangle f'(x)}_{T} - \big[\langle x \rangle f(x)\big]_a^b \,.$$

**Důkaz.** [2]Formule je aditivní v intervalech $[a,b)$, tedy stačí uvažovat jen případ, že $m \leq a < b \leq m+1$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Integrace per partes (věta 18.3.1) pak dává, že

$$T = \int_a^b (x - m - 1/2) f'(x) = \big[(x - m - 1/2) f(x)\big]_a^b - \int_a^b f \,.$$

Po dosazení tohoto do pravé strany formule z ní zbude jen $(\lfloor b \rfloor - m) f(b)$. Pro $b < m+1$ to je 0, v souladu s levou stranou. Pro $b = m+1$ to je $f(m+1)$, opět v souladu s levou stranou. □

Pro harmonická čísla touto formulí odvodíme zpřesnění odhadu z věty 5.1.11.

[2]E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford 1986, str. 13–14.

**Důsledek 18.4.8 (asymptotika harmonických čísel)** *Platí asymptotika*

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \gamma + O(1/n) \quad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

**Důkaz.**

□

Přednášku a celý semestr zakončíme Abelovou sumační formulí, která se často používá. Pro posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$ položíme

$$A(x) := \sum_{n \le x} a_n \ ,$$

s prázdnou sumou definovanou jako 0.

**Věta 18.4.9 (Abelova[3] sumace)** *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a < b$ jsou kladná reálná čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce mající na $(a,b)$ vlastní derivaci $f' \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak platí formule*

$$\sum_{a<n\le b} a_n f(n) = \big[A(x)f(x)\big]_a^b - \underbrace{\int_a^b A(x)f'(x)}_{T} \ .$$

**Důkaz.** Použijeme Titchmarshův trik z předchozího důkazu. Formule je zase aditivní v intervalech $[a,b)$, tedy opět stačí uvažovat jen případ, že $m \le a < b \le m+1$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$. Zvana 2 (věta 15 minule) pak dává, že

$$T = \int_a^b A(m)f'(x)\,\mathrm{d}x = A(m)\big[f(x)\big]_a^b \ .$$

Po dosazení tohoto do pravé strany formule z ní zbude $(A(b) - A(m))f(b)$. Pro $b < m+1$ to je 0, v souladu s levou stranou. Pro $b = m+1$ to je $a_{m+1}f(m+1)$, opět v souladu s levou stranou. □

# Kapitola 19

# Přednáška 14. Použití integrálů

V kapitole založené na poslední čtrnácté přednášce ukážeme, k čemu jsou vlastně (Riemannovy) integrály dobré. V podkapitole 19.1

## 19.1 Délka grafu funkce

Začneme s jednorozměrnou veličinou, délkou, a ukážeme, jak ji spočítat Riemannovým integrálem. Nejprve tuto délku samozřejmě definujeme. V této kapitole vždy $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$.

• *Definice délky grafu funkce.* Pro funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid a \le x \le b\} \subset \mathbb{R}^2$$

její graf. Pro dva body v rovině $u, v \in \mathbb{R}^2$ spojené úsečkou $uv$ označíme pomocí $|uv| \in [0, +\infty)$ její obvyklou eukleidovskou délku. Pro $u = (u_x, u_y)$ a $v = (v_x, v_y)$ se tedy

$$|uv| = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}\ .$$

Pro funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_k)$ intervalu $[a,b]$ definujeme součet

$$\begin{aligned} L(\overline{a},\, f) \quad &:= \quad \sum_{i=1}^{k} \big|\big(a_{i-1}, f(a_{i-1})\big)\,\big(a_i, f(a_i)\big)\big| \\ &= \quad \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (f(a_i) - f(a_{i-1}))^2}\ . \end{aligned}$$

Je to celková (eukleidovská) délka lomené čáry s body zlomu $(a_i, f(a_i))$, která spojuje koncové body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ grafu $G_f$.

**Tvrzení 19.1.1 (o vepsaných čarách)** *Když je $f$ jako výše a $\overline{a} \subset \overline{b}$ jsou dělení intervalu $[a, b]$, pak $L(\overline{a}, f) \leq L(\overline{b}, f)$.*

**Úloha 19.1.2** *Dokažte to.*

**Úloha 19.1.3** *Popište funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, pro něž mají všechny součty $L(\overline{a}, f)$ pro všechna dělení $\overline{a}$ tutéž hodnotu.*

**Definice 19.1.4 (délka grafu $\ell(G_f)$)** *Délka grafu funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je*

$$\ell(G_f) := \sup\big(\{L(\overline{a},\ f) \mid \overline{a} \text{ je dělení intervalu } [a,\ b]\}\big) \in (0,\ +\infty) \cup \{+\infty\}$$

*(supremum bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$).*

**Věta 19.1.5 (vlastnosti délky)** *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Je-li $G_f$ úsečka $uv$ pak $\ell(G_f) = |uv|$.*
2. *Když $a < c < b$, $g := f \mid (a, c)$ & $h := f \mid (c, b)$, pak*
$$\ell(G_g) + \ell(G_h) = \ell(G_f)\ .$$
3. *Posun ani otočení $G_f$ nezmění $\ell(G_f)$.*
4. *Zvětšení $G_f$ poměrem $c > 0$ zvětší $\ell(G_f)$ také poměrem $c$.*

**Důkaz.**

□

• *Spojitá funkce s nekonečně dlouhým grafem.* Vymyslet takovou funkci není moc těžké,

**Tvrzení 19.1.6** *Spojitá a omezená funkce $f\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) := x \sin(1/x)\colon [-1, 0) \to \mathbb{R} \ \text{ a } \ f(0) := 0\ ,$$

*má nekonečně dlouhý graf, $\ell(G_f) = +\infty$.*

**Důkaz.** Spojitost a omezenost této funkce jsou dokázány v úloze 19.1.7. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvážíme toto dělení $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_{2n})$ intervalu $[-1, 0]$: $a_0 = -1$,

$$a_j = -\frac{1}{j\pi/2} \text{ pro } j \in [2n - 1]$$

a $a_{2n} = 0$. Pak $L(\overline{a}, f) > (2/\pi)\big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\big)$. Tedy $\ell(G_f) = +\infty$ díky divergenci harmonické řady. □

**Úloha 19.1.7** *Dokažte spojitost a omezenost předešlé funkce.*

• *Vzorec pro délku grafu funkce.* Dá se totiž spočítat integrálem.

**Věta 19.1.8 (vzorec pro $\ell(G_f)$)** *Funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, $D(f) \supset (a,b)$ & $f' \in \mathrm{R}(a,b)$. Pak platí rovnost*

$$\ell(G_f) = (\mathrm{R}) \int_a^b \sqrt{1+(f')^2} \in (0,\, +\infty)\ .$$

**Důkaz.** Nechť $g := \sqrt{1+(f')^2}$. Víme, že $g \in \mathrm{R}(a,b)$ (úloha níže). Pro dané $\varepsilon$ vezmeme $\delta$, že pro každé dělení s body $(\bar{b}, \bar{t})$ intervalu $[a,b]$ s $\|\bar{b}\| < \delta$ je

$$\left| \int_a^b g - R(\bar{b},\, \bar{t},\, g) \right| < \varepsilon\ .$$

Nechť $\bar{b}$ je dělení intervalu $[a,b]$, že

$$\ell(G_f) - \varepsilon < L(\bar{b},\, f) \le \ell(G_f)\ .$$

Pomocí tvrzení 19.1.1 můžeme vždy $\bar{b} = (b_0, \dots, b_k)$ zjemnit tak, že $\|\bar{b}\| < \delta$. Ale

$$L(\bar{b},\, f) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - b_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\tfrac{f(b_i)-f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}}\right)^2}\ .$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě se

$$\frac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = f'(t_i)$$

pro nějaké body $t_i \in (b_{i-1}, b_i)$, $i \in [k]$. Označíme je jako $\bar{t}$. Tedy $L(\bar{b}, f) = R(\bar{b}, \bar{t}, g)$ a ze dvou vystavených systémů nerovností plyne, že

$$\left| \int_a^b g - \ell(G_f) \right| < 2\varepsilon\ .$$

Tedy $\int_a^b g = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2} = \ell(G_f)$. □

## 19.2 Plocha mezi grafy

## 19.3 Objem rotačního tělesa

## 19.4 Součty a integrály

# Kapitola 20

# Integrály a sumy

## 20.1 Nevlastní Riemannovy integrály

Připomeňme si, že $0! = 1$.

**Tvrzení 20.1.1 (Eulerovy integrály)** *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost*

$$\int_0^{+\infty} x^n \cdot \mathrm{e}^{-x} = n! \quad (= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) \,.$$

**Důkaz.**

□

## 20.2 Stirlingův vzorec

## 20.3 Riemannův–Stieltjesův integrál

## 20.4 Důkaz Preissovy a Uhrovy věty

## 20.5 Eulerova–MacLaurinova sumační formule

# Příloha A

# Literární teorie množin

*V Borgesově díle se objevuje stále znovu motiv zrodu skutečného z ideálního. Poustevník v rozbořeném chrámu stvoří člověka z materie svého nočního snění, kniha o bratrstvu Růže a Kříže způsobí vznik tohoto bratrstva ve skutečnosti, dychtivost tlönských žáků, kteří provádějí archeologický průzkum, vytvoří zlatou masku, a nakonec imaginární Tlön promění Zemi v Tlön skutečný.*

M. Ajvaz, [5, str. 9]

V první příloze vyložíme autorův pohled na formalizovanou teorii množin. Je založen na jeho přesvědčení, že nespočetné množiny neexistují a jsou jen fikcemi. Přesně a rigorózně k nim můžeme přistupovat jen jako k postavám příběhů vyprávěných formulemi jazyka teorie množin. Existují tedy stejně jako existují třeba Hilda Stratmannová, Josef Švejk, Billy Pilgrim a Ivan Děnisovič Šuchov. Formule jazyka teorie množin zapíšeme pomocí šipek mezi vrcholy v takzvaném šipkovém světě, což je nekonečná spočetná množina, jejíž existenci přijímáme.

V podpříloze A.1 tedy dokážeme existenci šipkového světa. To je jistý orientovaný multigraf $S = (S, E)$ se spočetnou množinou vrcholů $S$, kterým říkáme symboly, a se šipkami $E \subset S \times S$. Přesněji, $E$ je multimnožina, v níž se prvky mohou konečněkrát opakovat. Předpokládá se, že z každého symbolu $s$ vychází jen konečně mnoho šipek $(s, t) \in E$, které jsou lineárně uspořádány. Každý symbol $s$ v $S$ tak má přiřazeno slovo

$$\overline{a}(s) = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in S^k,\ k \in \mathbb{N}_0\ ,$$

nad abecedou $S$, jehož písmena $t_i$ jsou konce šipek jdoucích z $s$. Řekneme, že $S$ je *šipkový svět*, pokud pro každé slovo $u \in S^*$ existuje právě jeden symbol $s \in S$, že $\overline{a}(s) = u$. V šipkovém světě se pohodlně pracuje s abecedami a slovy nad nimi, jak v podpříloze A.1 vysvětlíme. Zavedeme také nekřížící se uzávorkování. V podpříloze A.2 definujeme jazyk teorie množin: jistou abecedu a formule nad ní. Ty bereme jako zapsané pomocí šipek a symbolů šipkového světa. V podpříloze A.3 dokážeme rigoróznost obvyklého úsporného zápisu dlouhých

formulí pomocí zkratek. V podpříloze A.4 popíšeme pomoci jazyka teorie množin její axiomy a věty.

## A.1 Šipkový svět, slova, znaky a závorky

*Šipkový graf* je dvojice

$$\big(S,\ (\overline{a}(s) \mid s \in S)\big)$$

složená ze spočetné množiny *symbolů* $S$ a ze systému konečných, i prázdných, seznamů $\overline{a}(s) = (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in S^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, odkazů ze symbolů $s \in S$ na jiné symboly $s_i \in S$. Tyto odkazy si lze představovat jako šipky jdoucí ze symbolu $s$ do symbolů $s_i$, $i \in [k]$. Množina těchto šipek je lineárně uspořádaná..

**Definice A.1.1 (šipkový svět).** *Šipkový graf*

$$S = \big(S,\ (\overline{a}(s) \mid s \in S)\big)$$

*nazveme šipkovým světem, pokud pro každé slovo $u \in S^*$ existuje právě jeden symbol $s \in S$, že $\overline{a}(s) = u$. Místo $(\overline{a}(s) \mid s \in S)$ pak můžeme psát $\{\overline{a}(s) \mid s \in S\}$.*

**Věta A.1.2 (existence šipkového světa).** *Šipkový svět existuje.*

**Důkaz.** Začneme jediným symbolem $s_\emptyset$ bez odkazů, takže $\overline{a}(s_\emptyset) := \emptyset$, a položíme $S_0 := \{s_\emptyset\}$. Jsou-li pro $n \in \mathbb{N}_0$ již definovány konečné množiny symbolů $S_0$, $S_1$, $\ldots$, $S_n$, položíme $T := \bigcup_{i=0}^{n} S_i$, vezmeme konečnou množinu

$$T^{\leq n+1} := \bigcup_{i=0}^{n+1} T^i$$

všech slov nad $T$ délek nejvýše $n+1$ a definujeme konečnou množinu různých symbolů

$$S_{n+1} := \{s_t \mid t \in T^{\leq n+1}\}$$

se seznamy odkazů $\overline{a}(s_t) := t$ pro $t \in T^{\leq n+1}$. Řada těchto symbolů byla definována již dříve, ale některé jsou nové. Není těžké vidět, že pro $S := \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ je $(S, \{\overline{a}(s) \mid s \in S\})$ šipkový svět. □

**Úmluva A.1.3 (fixujeme šipkový svět)** *V dalším fixujeme nějaký šipkový svět*

$$S = (S,\ \{\overline{a}(s) \mid s \in S\})\ .$$

**Definice A.1.4 (abecedy, slova)** *Abecedou se rozumí každá neprázdná množina symbolů $A \subset S$. Slovem nad abecedou $A$ se rozumí každý takový symbol $u \in S$, že $\overline{a}(u) \subset A$, to jest $\overline{a}(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, s $u_i \in A$ pro každé $i \in [k]$. Abecedou slov nad $A$ se rozumí abeceda*

$$A^* := \{u \in S \mid u \textit{ je slovo nad } A\} \subset S\ .$$

Pokud tedy $u \in A^*$ a $\overline{a}(u) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, píšeme i jen

$$u = a_1\, a_2\, \ldots\, a_k\ .$$

Jak víme, délku slova $u$ označujeme pomocí $|u| = k$. Pro $k = 0$ je slovo prázdné, označované jako $\emptyset$, a pro $k = 1$ hrozí nebezpečí záměny $a_1 = (a_1)$ jako prvku $A^*$ s $a_1 \in A$, to jest záměny jediného symbolu, do nějž symbol $s$ posílá svou jedinou šipku, se samotným symbolem $s$. Doufejme, že tento rozdíl bude v každém kontextu jasný. Konstrukce abecedy slov nad danou abecedou je základní konstrukcí matematické logiky: formule jsou jistá slova nad logickými symboly a proměnnými, důkazy jsou jistá slova nad formulemi a demonstrace nezávislosti různých tvrzení na axiomech jsou často založeny na manipulacích se slovy nad důkazy.

**Metadefinice A.1.5 (znaky)** *Symboly v $S$ označujeme pomocí znaků, které jsou dvou druhů, totiž syntaktické konstanty a syntaktické proměnné. Syntaktická konstanta je s označovaným symbolem navždy a neodlučitelně spjata. Různé syntaktické konstanty vždy označují různé symboly. Syntaktické proměnné označují nezávisle na sobě (není-li řečeno jinak, například že označované symboly jsou navzájem různé) libovolné symboly v dané abecedě. Různé výskyty téže syntaktické proměnné označují v daném kontextu či argumentu (pochopitelně ale ne absolutně) týž symbol.*

Jedná se o metadefinici, protože popisuje vztahy mezi naším světem, v němž přebývají znaky (napsané na papíře, materializované pixely na monitoru notebooku, ...), a (imaginárním, myšleným, ...) světem symbolů. Obyčejné definice se zabývají pouze světem symbolů. Například abeceda

$$A := \{\, (,\ ),\ *\,\} \subset S$$

je tříprvková a její tři symboly jsou označeny syntaktickými konstantami „(“, „)“ a „$*$“. Jsou-li znaky $x$ a $y$ syntaktické proměnné pro $A$, rovnosti

$$x = *\ \text{ a }\ x = y$$

po řadě znamenají, že v dané úvaze syntaktická proměnná $x$ označuje symbol (označený syntaktickou konstantou) $*$ a obě syntaktické proměnné označují týž symbol v $A$.

Definujeme tři operace na slovech nad danou abecedou, totiž spojení, substituci a nahrazení. Definujeme rovněž vztah podslova a řídkého podslova.

**Definice A.1.6 (operace spojení).** *Nechť $A \subset S$ je abeceda a*

$$u = a_1 a_2 \ldots a_m \ \text{ a }\ v = b_1 b_2 \ldots b_n$$

*s $m, n \in \mathbb{N}_0$ jsou dvě slova nad $A$. Jejich spojení*

$$w = uv = a_1\, a_2\, \ldots\, a_m\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_n$$

*je slovo $w = c_1 c_2 \ldots c_{m+n}$ nad $A$ dané jako $c_i = a_i$ pro $i \in [m]$ a $c_i = b_{i-m}$ pro $i \in [m+n] \setminus [m]$.*

Tato operace na $A^*$ je asociativní a $\emptyset$ je jejím neutrálním prvkem, ale obecně není komutativní. Můžeme ji iterovat, jsou-li $u_i \in A^*$ s $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$, slova, jejich spojení $w$ v tomto pořadí vznikne $k-1$ spojeními dvou slov:

$$w = u_1\, u_2\, \ldots\, u_k := u_1\, (u_2(\ldots(u_{k-2}\, (u_{k-1}\, u_k))\ldots))\ .$$

**Definice A.1.7 ((řídké) podslovo)** *Nechť $A \subset S$ je abeceda a*

$$u = a_1 a_2 \ldots a_m \quad a \quad v = b_1 b_2 \ldots b_n$$

*s $m, n \in \mathbb{N}_0$ jsou dvě slova nad $A$. Pokud existuje taková podmnožina*

$$X := \{i_1 < i_2 < \cdots < i_m\} \subset [n]\ ,$$

*že $b_{i_j} = a_j$ pro každé $j \in [m]$, řekneme, že slovo $u$ je řídkým podslovem slova $v$ a píšeme, že $u = v \,|\, X$. Je-li $X$ interval, to jest $X = \{i, i+1, \ldots, i+m-1\}$, nazveme $u$ podslovem slova $v$.*

Obě relace, podslova i řídkého podslova, jsou reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrické, ale pochopitelně obecně nikoli symetrické.

**Definice A.1.8 (vnořené (řídké) podslovo)** *Nechť $A \subset S$ je abeceda,*

$$u = a_1 a_2 \ldots a_m \quad a \quad v = b_1 b_2 \ldots b_n$$

*s $m, n \in \mathbb{N}_0$ jsou dvě slova nad $A$ a $X \subset [n]$. Pokud $u = v \,|\, X$, nazveme dvojici $(u, X)$ vnořeným řídkým podslovem slova $v$. Je-li $X$ interval, nazveme ji vnořeným podslovem slova $v$.*

**Definice A.1.9 (operace substituce)** *Nechť $A \subset S$ je abeceda,*

$$u = a_1 a_2 \ldots a_m \quad a \quad v$$

*s $m \in \mathbb{N}_0$ jsou dvě slova nad $A$ a $I \subset [m]$ je neprázdný interval. Položíme $i := \min I$, $j := \max I$, $u_1 := u \,|\, [i-1]$, $u_2 := u \,|\, \{j+1, j+2, \ldots, m\}$ a slovo*

$$\mathrm{subs}[v,\, u,\, I] := u_1\, v\, u_2$$

*nazveme slovem vzniklým substitucí slova $v$ do slova $u$ na místo $I$. Pro $I = \emptyset$ definujeme* $\mathrm{subs}[v,\, u,\, I] := u$.

## A.2 Formule v množinovém jazyce

Připomínáme úmluvu A.1.3 a definujeme množinou abecedu.

**Definice A.2.1 (množinová abeceda)** *Množinová abeceda je abeceda*

$$M = L \cup V := \{\,(\ \ )\ \neg\ \ \rightarrow\ \ \forall\ \ \in\ \ =\,\} \cup V \subset S\ ,$$

*která je disjunktním sjednocením sedmiprvkové abecedy $L$ logických symbolů a spočetné abecedy $V$ (množinových) proměnných. Symboly v $L$ jsou označeny uvedenými syntaktickými konstantami a jsou to levá závorka (, pravá závorka ), negace $\neg$, implikace $\rightarrow$, obecný kvantifikátor $\forall$, náležení $\in$ a rovnost $=$. Symboly proměnných ve $V$ jsou označeny syntaktickými konstantami*

$$V = \{x,\, y,\, z,\, t,\, t',\, x_1^c,\, x_2^c,\, \dots\}\,.$$

Exponent v $x_i^c$ připomíná, že jde o syntaktickou konstantu. Zdůrazněme i, že znak $x$ je syntaktickou konstantou označující pevně daný symbol v abecedě $V$ takzvaných (množinových) proměnných. Na symboly abecedy $M$ budeme odkazovat pomocí syntaktických proměnných

$$\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, p,\, p_1,\, p_2,\, \dots, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \dots\,.$$

Závorky ) a ( jsou často podceňované, třebaže mají klíčovou roli ve struktuře formulí. Je ovšem pravda, že takzvaná polská čili prefixová notace matematické logiky se obejde bez závorek. Negace $\neg$ je *unární spojka (pro jednu formuli)*, implikace $\rightarrow$ je *binární spojka (pro dvě formule)*, $\forall$ je obecný *kvantifikátor (pro proměnnou a formuli)* a $\in$ a $=$ jsou *binární predikáty (pro dvě proměnné)*. Neúnosně dlouhé množinové formule (formule definujeme za chvíli) v praxi zkracujeme pomocí rozšíření množinové abecedy $M$ do *rozšířené množinové abecedy* $M'$ přidáním nových spojek, kvantifikátorů a predikátů.

**Definice A.2.2 (rozšíření abecedy)** *Rozšířením $M' \supset M$ množinové abecedy rozumíme abecedu $M' \subset S$ vzniklou z $M$ přidáním nových binárních spojek, kvantifikátorů a predikátů. $M'$ má tedy tutéž podabecedu proměnných jako $M$.*

V praxi si vystačíme s $\neg$ a nepřidáváme žádné nové unární spojky, přidáváme ovšem nové binární spojky $\wedge$, $\vee$ a $\leftrightarrow$, nový kvantifikátor $\exists$ a mnoho nových predikátů nejrůznějších arit (nejen binární). Pak například pro formule $u$ a $v$ můžeme každou (pod)formuli tvaru

$$(\neg\,(u \rightarrow (\neg\, v))) \;\text{ zkrátit náhradou (pod)formulí }\; (u \wedge v)$$

pomocí nově přidané binární spojky konjunkce $\wedge$. Přesnou teorii takových zkracování vyložíme v následující podkapitole (přečtěte si ji, jinde podobnou teorii nenajdete), v této podkapitole teď přejdeme k definici formulí a podformulí. Nejprve ale zavedeme ještě jeden druh rozšíření množinových abeced.

**Definice A.2.3 (nulární predikáty)** *Pro každou rozšířenou množinovou abecedu $M'$ klademe*

$$M'_0 := M' \cup \{q_1,\, q_2,\, q_3\} \subset S\,,$$

*kde tři syntaktické konstanty $q_i$ označujeme jako nulární predikáty.*

Tyto predikáty nemají žádné proměnné, tj. mají aritu 0, a poslouží nám při zkracování formulí a podformulí, ale i v definicích schemat axiomů, jako schematické proměnné pro podformule. Lze je chápat jako syntaktické proměnné pro formule. Jsou tři proto, že více jich nebudeme potřebovat.

**Definice A.2.4 (atomické formule)** *Nechť $A \in \{M', M'_0\}$, takže abeceda $A$ je rozšířená množinová abeceda, případně s nulárními predikáty. Atomickou formulí nad $A$ rozumíme každé slovo*

$$(\, p_i \, \alpha_1 \, \alpha_2 \, \ldots \, \alpha_i \,)$$

*nad $A$ délky $i+3$, kde $i \in \mathbb{N}_0$, $p_i \in A$ je $i$-ární predikát a $\alpha_j \in V$ jsou proměnné.*

V praxi ale místo toho kanonického značení atomických formulí budeme často používat odlišné *praktické značení*. Například píšeme $(x \in y)$ místo $(\in x\, y)$, $\mathrm{fun}[x]$ místo $(\mathrm{fun}\, x)$ (tento unární predikát říká, že $x$ je funkce) a podobně. Pro nulární predikát $p$ vždy píšeme prostě $p$ místo kanonického $(p)$. Toto jsou ale jediné případy, kdy ve formulích pomíjíme závorky, jinak je vždy ponecháváme na místě.

**Definice A.2.5 (generující slova)** *Nechť $A \in \{M', M'_0\}$. Generujícím slovem nad abecedou $A$ rozumíme každé takové slovo*

$$g = a_1 \, a_2 \, \ldots \, a_k \in (A^*)^*, \;\; k \in \mathbb{N} \, ,$$

*že pro každé písmeno $a_i \in A^*$ v $g$ nastává jeden ze čtyř následujících případů.*

1. *Písmeno $a_i$ je atomická formule nad $A$.*
2. *$i \geq 2$ a $a_i$ je slovo $(\neg\, a_j)$ délky $|a_j| + 3$ nad $A$ pro nějaké $j \in [i-1]$.*
3. *$i \geq 2$ a $a_i$ je slovo $(a_j \, \beta \, a_l)$ délky $|a_j| + |a_l| + 3$ nad $A$ pro nějakou binární spojku $\beta \in A$ a nějaká $j, l \in [i-1]$.*
4. *$i \geq 2$ a $a_i$ je slovo $(\gamma \, \alpha \, a_j)$ délky $|a_j| + 4$ nad $A$ pro nějaký kvantifikátor $\gamma \in A$, proměnnou $\alpha \in V$ a nějaké $j \in [i-1]$.*

**Definice A.2.6 (formule)** *Nechť $A \in \{M', M'_0\}$. Formule (nad $A$) je každé takové slovo $u \in A^*$, které je posledním písmenem nějakého generujícího slova $g$ nad abecedou $A$. Pak řekneme, že $g$ je generující slovo formule $u$. Množinu formulí nad $A$ označíme jako* $\mathrm{form}_A$.

Což je ekvivalentní definici, že formule jsou právě písmena generujících slov.

**Definice A.2.7 (podformule)** *Nechť $A \in \{M', M'_0\}$ a $u, v \in \mathrm{form}_A$. Je-li $u$ podslovo slova $u$, řekneme, že $u$ je podformule formule $v$. Je-li $(u, I)$ vnořené podslovo slova $u$, řekneme, že $(u, I)$ je vnořená podformule formule $v$.*

Všimněte si, že jednoznačnosti tvrzené v následující větě jsou všechny triviální, s výjimkou případu 3.

**Věta A.2.8 (o jednoznačném čtení)** *Nechť $A \in \{M', M'_0\}$ a $u \in \mathrm{form}_A$. Formule $u$ má právě jeden ze čtyř následujících tvarů.*

1. *Existuje jediné* $i \in \mathbb{N}_0$, *jediný* $i$*-ární predikát* $p_i \in A$ *a jediné proměnné* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \in V$, *že*

$$u \text{ je } (p_i\, \alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_i)\ .$$

2. *Existuje jediná formule* $v$ *nad* $A$, *že*

$$u \text{ je } (\neg\, v)\ .$$

3. *Existují jediné dvě formule* $v$ *a* $v'$ *nad* $A$ *a jediná binární spojka* $\beta \in A$, *že*

$$u \text{ je } (v\, \beta\, v')\ .$$

4. *Existuje jediná formule* $v$ *nad* $A$, *jediná proměnná* $\beta \in V$ *a jediný kvantifikátor* $\alpha \in A$, *že*

$$u \text{ je } (\alpha\, \beta\, v)\ .$$

**Důkaz.**

□

## A.3 Zkracování množinových formulí

## A.4 Axiomy a věty v $\mathbf{ZFC}_S$

# Příloha B

# Hyperreálná čísla

# Příloha C

# Trocha historie

V prvním oddílu uvádíme krátké životopisné medailony. Téměř vždy v nich čerpáme z článků ve Wikipedii. Druhý oddíl obsahuje stručné přehledy historie některých matematických pojmů a výsledků, hlavně z matematické analýzy.

## C.1 Životopisné medailony

*N. H. Abel, Archimédés, V. I. Arnold, P. Bachman, R.-L. Baire, B. Balcar, F. Bernstein, J. Binet, H. Blumberg, B. Bolzano, G. Cantor, A.-L. Cauchy, G. Darboux, R. Dedekind, P. Dirichlet, L. Euler, M. Fekete, A. O. Gelfond, A. Grothendieck, J. Hadamard, P. Halmos, G. Hardy, E. Heine, Ch. Hermite, D. Hilbert, K. Kuratowski, J. Kurzweil, E. Landau, G. Leibniz, J. Liouville, A. De Morgan, I. Newton, M. Oresme, W. Van Orman Quine, B. Riemann, M. Rolle, M. Rosenlicht, W. Rudin, B. Russel, Th. Schneider, T. Skolem, A. Sochor, P. Štěpánek, A. Tarski, I. M. Vinogradov, B. L. van der Waerden, J. Wallis, K. Weierstrass, E. Weyr a L. Wittgenstein*

**Niels H. Abel (1802–1829)**

NA se narodil ve vesnici Nedstrand

Literatura: [2] (komentovaný překlad memoiru NA o neřešitelnosti rovnic pátého stupně) a [127, 128] (biografie NA od jeho krajana, norsko-amerického matematika Ø. Oreho)

**Archimédés ze Syrakus (asi** $-287$ **až asi** $-212$**)**

Bla

Literatura: [48] (v Čapkově apokryfu *Archimédova smrt* se dočteme o posledních chvílích AS), [84] (ve scéně obléhání Syrakus Římany hraje AS Nasser Memarzia), [123] (o přepisu traktátu AS objeveném v r. 1908)

**Vladimir I. Arnold (1937–2010)**

VA se narodil v Oděse v SSSR (nyní Ukrajina)

Literatura: [7, 8] (čtivé, zajímavé a svérázné miniatury z matematické analýzy, dokážete rozluštit název první z nich?)

**Paul G. H. Bachman (1837–1920)**

PB se narodil v Berlíně

Literatura:

**René-Louis Baire (1874–1932)**

RLB se narodil v Paříži

Literatura:

**Bohuslav Balcar (1943–2017)**

BB se narodil v Turnově, střední školu navštěvoval v Hradci Králové a v r. 1965 absolvoval MFF UK v Praze diplomovou prací *Systémy generátorů v teorii množin.* V letech 1975–1988 pracoval jako „samostatný matematik“ v podniku ČKD Polovodiče, kde mu bylo v r. 1977 konečně povoleno obhájit „kandidátskou“ (tj. pro titul CSc. $\sim$ dnešní Ph.D.) práci *Teorie polomnožin.* V r. 1989 přešel do Matematického ústavu AV ČR a od r. 1991 působil také v Centru pro teoretická studia UK a AV ČR.

Literatura: [20] (učebnice teorie množin v češtině), [40] (pocta BB k 65. narozeninám) a [140] (parte BB vydané MÚ AV ČR)

**Felix Bernstein (1878–1956)**

FB se narodil v Halle

Literatura:

**Jacques P. M. Binet (1786–1856)**

JB se narodil v Rennes v Bretagni

Literatura:

**Henry Blumberg (1886–1950)**

HB se narodil v Žagarė v severní Litvě (v rámci Ruské říše). Městečko, které se poprvé zmiňuje ve 13. století, má nyní asi jeden až dva tisíce obyvatel. Kolem r. 1914 mělo 14 000 obyvatel. Druhého října 1941 příslušníci Einsatzgruppe A vyvraždili všechny jeho židovské obyvatele ([203, 204]). Rodina HB naštěstí dávno předtím v r. 1891 emigrovala do Ameriky. HB studoval na Kolumbijské univerzitě v New Yorku a pak na Univerzitě v Göttingen, kde v r. 1912 získal doktorát pod vedením E. Landaua za práci *On the algebraic properties of linear homogeneous differential equations.* V letech 1913–1918 působil na Univerzitě

v Nebrasce, 1918–1925 na Univerzitě v Illinois a od r. 1925 až do smrti na Univerzitě v Ohio.

Literatura: [33] (původní článek HB s výsledkem po něm nazvaným) a [81] (položka projektu Geni o HB, obsahuje fotografii HB)

### Bernard Bolzano (1781–1848)

BB se narodil v Praze italskému obchodníku se starožitnostmi Bernardu Pompeiusovi (1737–1816) a německé matce Cecilii Maurerové (1754–1821). V r. 1804 se mu nepodařilo získat místo profesora matematiky na pražské univerzitě, uvolněné odchodem jeho bývalého učitele Stanislava Vydry (1741–1804) do penze. R. 1805 byl vysvěcen na kněze a brzy poté promován doktorem filozofie. Mezi lety 1805–1819 byl univerzitním kazatelem. V roce 1819, na Štědrý den, mu bylo znemožněno dekretem císaře Františka I. učit a tři týdny poté byl z učitelského úřadu pro své reformátorské názory nakonec suspendován a byla mu přiřčena penze (renta) ve výši 300 zlatých na rok. Původní plat byl 800 zlatých ročně. Proces, který proti BB vedla církevní vyšetřovací komise, se vlekl až do konce roku 1825. Nakonec podlehl tuberkulóze. BB je pohřben na Olšanských hřbitovech (Hřbitov III., oddělení 10).

Přesnou výstavbu matematické analýzy předvedl BB v pracích *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (1810), *Der binomische Lehrsatz* (1816) a *Rein analytischer Beweis* (1817), kde se například objevuje $\varepsilon$-$\delta$ definice limity a je zmíněna vlastnost nejmenší horní meze reálné množiny. Pokusil se také, do značné míry úspěšně, sestrojit spojitou funkci bez derivace. Jeho spis *Paradoxien des Unendlichen* vyšel posmrtně r. 1851 a ovlivnil G. Cantora.

P. Vopěnka píše ([176, str. 48]): „Když byla spisovatelka Karolina Světlá malá, ukázal jí její otec BB se slovy: „To je kněz, který uzřel Boha.“.“ Plechová vysvětlující cedule na rohu Bolzanovy ulice v Praze praví: „Bernard Bolzano (5. 10. 1781 - 18. 12. 1848) Český, německy píšící kazatel, kněz, filosof a matematik, profesor na univerzitě v Praze. Za nejvyšší princip považoval obecné blaho.“

Literatura: [25] (článek ve Wikipedii), [34] (soubor Bolzanových kázání pro univerzitní studenty), [35] (*Paradoxy nekonečna* v češtině), [176, 1.3] (Bolzanovo pojetí nekonečna a množin), [201] (komentář překladatele O. Zicha k *Paradoxům nekonečna*).

### Georg Cantor (1845–1918)

GC se narodil v Petrohradu v Rusku

Literatura: [200] (obsahuje např. fotografii Cantorova pomníku na sídlišti v Halle)

### Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

ALC se narodil

Literatura: [100, str. 184] (ALC se také zabýval astronomií, teorií disperze světla a elasticitou krystalů)

**Gaston Darboux (1842–1917)**

GD se narodil v Nîmes

Literatura:

**Richard Dedekind (1831–1916)**

RD se narodil v Braunschweigu

Literatura:

**(Johann) Peter (Gustav Lejeune) Dirichlet (1805–1859)**

Předkové PD přišli z belgického města Richelet, odtud také pochází jeho nezvyklé jméno (le jeune de Richelet = mladík z Richelet).

Literatura:

**Leonhard Euler (1707–1783)**

LE se narodil v Basileji

Literatura: [67] (životopis LE v němčině) [100, str. 244–5] (LE významně přispěl k nebeské i obecné mechanice, také zabýval se optikou, balistikou a stavbou lodí) a [169] (po obecném úvodu podává zevrubný přehled matematiky LE ve speciálních oblastech: hodnoty zeta funkce, Eulerova a Maclaurinova sumace, divergentní řady a integrály, Eulerovy součiny).

**Michael Fekete (1886–1957)**

MF se narodil

Literatura:

**Aleksandr Osipovič Gel'fond (1906–1968)**

AOG se narodil v Saint Petersburgu (tj. Leningradu, Petrohradu) v Rusku.

Literatura:

**Alexander Grothendieck (1928–2014)**

AG se narodil v Berlíně

Literatura:

**Jacques Hadamard (1865–1963)**

JH se narodil

Literatura: [117] (zajímavý odborný životopis JH)

**Paul R. Halmos (1916–2006)**

PH se narodil v Budapešti

Literatura:

### Godfrey H. Hardy (1877–1947)

GH se narodil v učitelské rodině ve vesnici Cranleigh v hrabství Surrey v jihovýchodní Anglii. V r. 1896 vstoupil jako devatenáctiletý do Trinity Colledge (Kolej Nejsvětější Trojice, na níž předtím studoval například IN) Univerzity v Cambridge. Magisterský titul získal v r. 1903, v té době to byl nejvyšší akademický titul na anglických univerzitách. V letech 1906–1919 působil na Univerzitě v Cambridge, 1919–1931 byl v Oxfordu a pak se zase vrátil do Cambridge.

*Obrana matematikova* [79] GH je bohatým zdrojem hardyovských aforismů a historek. Třeba ([79, str. 126]), že

> Pro skutečného matematika platí jeden uklidňující závěr. Skutečná matematika nemá na válku žádný vliv. Nikdo ještě neobjevil válečný záměr, kterému by posloužila teorie čísel nebo relativity, a je nepravděpodobné, že se to v blízké době někomu povede. [přeložil J. Moník]

Kéž by to byla pravda. Čtenář by si ale neměl odtud odnést představu o GH jen jako o naivním profesorovi — kdo z nás se někdy naprosto, ale opravdu naprosto, nemýlí? GH byl velikánem a do značné míry zakladatelem analytické teorie čísel. Asymptotika

$$p(n) \sim \frac{\mathrm{e}^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}} \quad (n \to \infty)$$

pro počet rozkladů čísla $n \in \mathbb{N}$, objevená GH a S. Ramanujanem, je jedním z nejvýznamnějších matematických výsledků.

Literatura: [75] (učebnice matem. analýzy GH z r. 1908), [78] (zajímavá kniha GH o tzv. divergentních řadách, tj. o tom, jak zobecnit součet řady), [79] (úvahy GH o matematice, obsahuje osobní 40-ti stránkové vzpomínky C. P. Snowa na GH), [80] (komentovaná a opoznámkovaná *Obrana* GH), [77] (kniha GH o matematice S. Ramanujana), [91] (biografie S. Ramanujana, v jehož životě GH sehrál významnou roli), [115] (film na motivy [91], GH hraje Jeremy Irons a SR Dev Patel)

### Eduard Heine (1821–1881)

EH se narodil v Berlíně jako osmé dítě

Literatura:

### Charles Hermite (1822–1901)

ChH se narodil v Dieuze

Literatura:

**David Hilbert (1862–1943)**

DH se narodil v Königsbergu (tj. Královci, Kaliningradu) nebo ve Wehlau

Literatura:

**Kazimierz Kuratowski (1896–1980)**

KK se narodil (podobně jako o pět let mladší Tarski) ve Varšavě ležící tehdy formálně v tzv. Kongresovce, fakticky ovšem v Ruském impériu. V r. 1913/14 absolvoval jeden školní rok na technice v Glasgowě, protože nechtěl studovat doma v ruštině. V létě ale přišla válka. V r. 1915 Varšavu dobyla rakousko-uherská armáda a KK mohl přejít na studium matematiky na tamní univerzitě v polštině. V letech 1927–33 byl profesorem na polytechnice ve Lvově a v letech 1934–39 na Varšavské Univerzitě. Jak KK v Polsku, tedy vlastně v Generálním gouvernementu (již název je dostatečně hrozivý), přežil 2. světovou válku česká, anglická ani polská Wikipedie neuvádějí, kromě zmínky, že přednášel na „podzemní“ univerzitě. Od roku 1952 byl členem Polské akademie věd, mezi lety 1948 a 1967 byl ředitelem jejího matematického ústavu.

KK byl hlavně topologem. Jeho nejznámější výsledek se řadil do topologie euklidovské roviny, ale dnes ho klasifikujeme jako výsledek v teorii grafů. Podle *Kuratowskiho věty* je graf rovinný, to jest má rovinné nakreslení, právě když neobsahuje jako podgraf ani dělení grafu $K_5$ (graf na pěti vrcholech se všemi deseti hranami) ani dělení grafu $K_{3,3}$ (bipartitní graf s třívrcholovými partitami a všemi devíti hranami).

Literatura: [103] (vzpomínky na polské matematiky a matematiku v první polovině 20. století), [62] (zhodnocení topologického díla KK)

**Jaroslav Kurzweil (1926–2022)**

JK se narodil v rodině úředníka Pražské úvěrní banky

Literatura:

**Edmund Landau (1877–1938)**

EL se narodil

Literatura:

**Gottfried W. Leibniz (1646–1716)**

GL se narodil

Literatura: [21, kap. 7] (epilog knihy je věnovaný GL a IN, tento dějepis matem. analýzy končí GL a IN), [37, kap. XIX] (cca 25 stran věnovaných GL a IN), [61, kap. 9] (přes 35 stran o matem. analýze GL), [68] (životopis GL v němčině), [100, str. 458–9] (od GL pochází pojem kinetické energie a vzorec pro ni)

**Joseph Liouville (1809–1882)**

JL se narodil v Saint-Omer

Literatura: [114] (odborná biografie JL) a [192] (popis a přehled tzv. Liouvilleovy metody pro dokazování pomocí indukce identit pro počty vyjádření přirozených čísel jako součtů čtverců, v první kapitole je krátká biografie JL)

**Augustus De Morgan (1806–1871)**

ADM se narodil v Madurai v Indii

Literatura:

**Isaac Newton (1642/43–1727)**

IN se narodil

Literatura: [3] (životopis IN), [7] (zajímavé pohledy na dílo IN, např. v příloze o tzv. Lemmatu XXVIII v *Principiích*), [21, kap. 7] (epilog knihy je věnovaný GL a IN), [37, kap. XIX] (cca 25 stran věnovaných GL a IN), [61, kap. 8] (přes 40 stran o matem. analýze IN), [100, str. 530–1] (*Principia* byla zásadním zvratem ve fyzikálním pohledu na svět), [124] (přeložené výňatky z díla IN s komentáři) a [199] (nová historie Vědecké revoluce, jejímž čelným aktérem IN byl).

**Mikuláš Oresme (1310-1320–1382)**

MO (Nicolas d'Oresme) se narodil v Normandii.

Literatura:

**Willard Van Orman Quine (1908–2000)**

WQ se narodil ve městě Akron v americkém státu Ohio

Literatura:

**Bernhard Riemann (1826–1866)**

BR se narodil ve vesnici Breselenz

Literatura:

**Michel Rolle (1652–1719)**

MR se narodil v obci Ambert v departementu Puy-de-Dôme v regionu Auvergne.

Literatura:

**Maxwell Rosenlicht (1924–1999)**

MR se narodil v Brooklynu

Literatura:

**Walter Rudin (1921–2010)**

WR se narodil ve Vídni v židovské rodině. Po anšlusu Rakouska v r. 1938 odešel s rodinou do Francie a pak do Velké Británie, kde sloužil v Britském královském námořnictvu. Po válce WR odešel do USA, kde většinu kariéry působil na Wisconsinské univerzitě v Madisonu. Od r. 1957 žil spolu se svou ženou, topoložkou Mary Ellen R., a dětmi v domě navrženém F. L. Wrightem ([181]).

Literatura: [143, 144, 145] („familiarly known to students as *Baby Rudin*, *Papa Rudin* and *Grandpa Rudin*“ ([180])).

**Bertrand Russel (1872–1970)**

Filosof, matematik, logik a také veřejný intelektuál BR se narodil v Trellechu v Monmouthshire ve Walesu v aristokratické rodině. Nicméně již v r. 1876 spolu s o sedm let starším bratrem Rafaelem (1865–1931) byli úplnými sirotky. Vychovávala je hlavně babička z otcovy strany, hraběnka Russelová (1815–1898). Od r. 1890 BR studoval matematiku na Trinity Colledge v Cambridge. Členem této koleje se stal v r. 1895. V r. 1903 v knize *The Principles of Mathematics* předložil vedle svého známého paradoxu i tezi, že matematika a logika splývají. V letech 1910–13 spolu s N. Whiteheadem vydali třísvazkové *Principia Mathematica*. Za první světové války působil aktivně jako pacifista. O filosofické a politické činnosti BR a jeho bohatém životě se lze dočíst více v [26].

Literatura: [26] (článek o BR v anglické Wikipedii) a [146] (soubor esejů BR, obsahuje jeho životopisný medailon)

**Theodor Schneider (1911–1988)**

TS se narodil ve Frankfurtu nad Mohanem v Německu.

Literatura:

**Thoralf Skolem (1887–1963)**

TS se narodil v Sanværu v Norsku.

Literatura:

**Antonín Sochor (1942–2008)**

Vystudoval Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy.

Literatura:

**Petr Štěpánek (1943–2012)**

PŠ se narodil v Pardubicích a dětství prožil v lékařské rodině v České Třebové. V šedesátých letech 20. století vystudoval MFF UK Praha. Na této škole byl vedoucím Katedry teoretické informatiky a matematické logiky. Kromě teorie množin se zabýval i teoretickou informatikou a umělou inteligencí. Ve volbách roku 1992 byl zvolen za koalici ODS-KDS do české části Sněmovny národů

(volební obvod Praha), poslancem ve Federálním shromáždění byl do zániku Československa v prosinci 1992. Je pohřben v Praze na Podolském hřbitově.

Literatura: [20] (populární učebnice teorie množin v češtině), [133] (článek o PŠ v české Wikipedii, obsahuje fotografii PŠ) a [158] (pocta PŠ k 60. narozeninám)

### Alfred Tarski (1901–1983)

AT se narodil jako Alfred Teitelbaum (Tajtelbaum) ve Varšavě Rose Prussackové (1879–1942) a Ignacymu Teitelbaumovi (1869–1942). V nově samostatném Polsku studoval od r. 1918 na Varšavské Univerzitě. Nejprve biologii, ale pod vlivem S. Leśniewskiho brzy přešel na matematiku. V letech 1923–1939 byla podstatným zdrojem jeho příjmů výuka matematiky na středních školách. V srpnu 1939 odplul jednou z posledních lodí před vypuknutím války do Ameriky, aby na Kongresu pro jednotu věd na Harvardově Univerzitě pronesl přednášku, což mu s velkou pravděpodobností zachránilo život. Se ženou a dětmi, které zůstaly ve Varšavě, se shledal až v r. 1946. V Americe působil od r. 1942 až do konce kariéry na Kalifornské univerzitě v Berkeley.

Uvedeme (a přeložíme) první odstavec životopisu [43] AT.

> Alfred Tarski byl jedním z největších logiků všech dob. Stejně jako jeho současník Kurt Gödel i Tarski proměnil tvář logiky ve dvacátém století, zvláště svými pracemi věnovanými pojmu pravdy a teorii modelů. Na rozdíl od samotářského a tajnosnubného Gödela hrál Tarski svou roli koryfeje ze všech sil, nejen svými fundamentálními výsledky, ale i zapáleným propagováním logiky, ztotožněním se s touto disciplínou a svou charismatickou výukou.

Literatura: [43] (odborný životopis AT), [57] (AT tu epizodicky vystupuje pod svým původním jménem), [163] (stěžejní práce AT o pravdě) a [165] (populární výklad Tarského teorie pravdy z jeho pera)

### Ivan M. Vinogradov (1891–1983)

IMV se narodil ve vesnici Miloljub poblíž obce Velikije Luki v Pskovské gubernii v Rusku.

Literatura:

### Bartel L. van der Waerden (1903–1996)

BW se narodil Amsterodamu.

Literatura:

### John Wallis (1616–1703)

JW se narodil

Literatura:

**Karl Weierstrass (1815–1897)**

KW se narodil

Literatura:

**Eduard Weyr (1852–1903)**

Český (podle [60] rakouský) matematik EW se narodil v Praze, kde pak prožil většinu života. Navštívil ale také Göttingen, Paříž a Berlín. Jeho otec František (1820–1889) byl profesorem matematiky a fyziky na německé reálce v Praze a bratr Emil (1848–1894) byl také významným matematikem. Synovec František (1879–1951), syn Emila, byl právník a statistik a zakladatel tzv. normativní teorie práva (viz jeho paměti [188, 189, 190]). Od r. 1876 byl EW profesorem na české polytechnice a po dvě období i jejím rektorem. Jeho jmenování řádným profesorem České univerzity překazila smrt.

Roku 1902 EW vydal učebnici analýzy [187]. Byla odhalena jako plagiát a kompilát založený na učebnicích P. Tanneryho (1843–1904), A. Genocchiho (1817–1889) a J. Serreta (1819–1885). Upozornil na to, a s EW pak urputně polemizoval, J. V. Pexider (1874–1914), talentovaný český matematik, jehož život předčasně skončil v psychiatrické léčebně v Kateřinkách ([23]).

Je zajímavé srovnat údaje o EW ve třech mutacích Wikipedie [58, 59, 60]. Podle anglické je EW dodnes známý jako objevitel jistých kanonických forem čtvercových matic nad algebraicky uzavřenými tělesy a jeho článek *Sur l'équation des lignes géodésiques* byl v r. 1893 přednesen, ne ale osobně EW, na prvním Mezinárodním kongresu matematiků v Chicagu.

Literatura: [22] (odborný životopis EW), [24] (česká matematika a čeští matematici za starého Rakouska), [58, 59, 60] (Wikipedie) a [187] (nešťastná učebnice diferenciálního počtu EW).

**Ludwig Wittgenstein (1889–1951)**

LW se narodil ve Vídni Karlovi a Leopoldině Wittgensteinovým. Karl byl velkopodnikatel a rodina patřila k nejbohatším v Rakousko-Uhersku. Jméno, resp. profil, Leopoldiny žijí (žily?) v názvu, resp. emblému, huti Poldi Kladno (Karl založil a vlastnil kladenské železárny). LW se svého podílu na rodinném bohatství vzdal a život prožil spartánským způsobem. Jeho bratr Paul (1887–1961) byl známý jednoruký klavírní virtuos. LW studoval v Berlíně strojnictví a pak u B. Russela v Cambridge filosofii. Za první světové války sloužil v rakouské armádě. Po válce vydal v r. 1922 známý *Tractatus Logico-Philosophicus*. V něm, jak se domníval, vyřešil všechny filosofické problémy. Stáhl se do ústraní a učil na elementární úrovni na rakouském venkově. Tuto životní dráhu musel opustit, protože bil žáky. V r. 1929 se vrátil do Cambridge a o deset let později se tam stal profesorem. Za druhé světově války pracoval mimo jiné v nemocnici. Po válce se krátce vrátil na univerzitu a v r. 1947 rezignoval na akademickou činnost. LW je jedním z nejvlivnějších filosofů 20. století, zcela proměnil filosofii jazyka.

Literatura o LW je rozsáhlá, zde uvedeme jen malý výběr: [51] (kniha o LW akcentující českou stopu), [69] (diskuse o problému tzv. soukromého jazyka), [121] (životopis LW), [194] (*Filosofická zkoumání* LW), [195] (jak víme, že něco s jistotou víme?), [196] (pozdní LW, vyvracející raného LW), [193, 197] (raný LW) a [198] (z pozůstalosti LW).

## C.2 Stručné dějiny některých pojmů a výsledků

V jedné z nejzajímavějších knih o historii matematiky [152] J. Stillwell píše o dějepisech matematické analýzy následující ([152, str. 159]).

> Much has been written on the history of calculus, and some particularly useful books are Boyer (1959), Baron (1969), and Edwards (1979).[1] However, historians tend to harp on the question of logical justification and to spend a disproportionate amount of time on the way it was handled in the 19th century. This not only obscures the boldness and vigor of early calculus, but it is overly dogmatic about the way in which calculus should be justified. Apart from the justification already available in the 17th century (the method of exhaustion), there is also a 20th-century justification (the theory of infinitesimals of Robinson (1966)[2]), and the sheer diversity of foundations for calculus suggests that we have not yet got to the bottom of it.

**Číslo**

Pojem čísla se objevuje

Literatura:

**Množina**

Pojem množiny se objevuje

Literatura: [176, zejména první část „I Great Illusion of Twentieth Century Mathematics“] (kniha je prvním, bohužel posmrtným, představením osobitého pojetí matematiky u P. Vopěnky v angličtině, její další části jsou „II New Theory of Sets and Semisets“, „III Infinitesimal Calculus Reaffirmed“ a „IV Making Real Numbers Discrete“), [200] (čtivě psaná kniha o nekonečnu)

**Základní věta algebry**

Základní věta algebry

Literatura:

[1] Zde, po řadě, [37, 21, 61].
[2] Zde [141].

# Příloha D

# Návody k řešením úloh

Otazník místo návodu k řešení znamená, že řešení není autorovi učebnice známo.

**Úloha 1.1.1** Nechť $(a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ má položky $a_{i,j} \geq 0$. Ukážeme, že celkový součet po řádcích $R = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ se rovná supremu

$$A = \sup \left( \{ \textstyle\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} \mid I \subset \mathbb{N}^2 \text{ je konečná} \} \right) ,$$

branému v $(\mathbb{R}^*, <)$. Tato rovnost platí stejně pro celkový součet po sloupcích. Zřejmě $A \leq R$. Nechť $c < R$ je libovolné. Pak existuje $m$, že $c < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$. Podobně nahlédneme, že pak existují $n_1, \ldots, n_m$ v $\mathbb{N}$, že stále $c < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}$. Tedy $R \leq A$ a $R = A$.

**Úloha 1.2.1** alfa, beta, velká gama, gama, velká delta, delta, epsilon, zéta, éta, velká théta, théta, varthéta, ióta, kappa, velká lambda, lambda, mí, ný, velké ksí, ksí, omikron, velké pí, pí, ró, velké sigma, sigma, tau, velké ypsilon, ypsilon, velké fí, fí, varfí, chí, velké psí, psí, velká omega, omega. Neuvedené kapitálky se shodují s latinkou, např. $A$ pro $\alpha$, $H$ pro $\eta$ apod.

**Úloha 1.2.2** Nalevo je N, právě když $\varphi$ je P, ale $\psi$ je N. Což je totéž, jako že $\neg\psi$ je P a $\neg\varphi$ je N, což je ekvivalentní neplatnosti pravé strany.

**Úloha 1.2.3** Když neexistuje individuum $a$ v oboru formy $\varphi(x)$, aby platil výrok $\varphi(a)$, znamená to, že pro každé individuum $a$ z tohoto oboru výrok $\varphi(a)$ neplatí a platí výrok $\neg\varphi(a)$. Podobně se dokáže druhá tautologie.

**Úloha 1.2.5** Odpověď záleží na tom, jaké rovnosti mezi prvky této množiny nastávají. Jsou-li všechny různé, má $M$ pět různých prvků. Pokud $a = b = 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ a pokud $a \neq \{a\}$, což axiom fundovanosti zaručuje, má $M$ jen dva různé prvky.

**Úloha 1.2.7** Prázdné množině $\emptyset$.

**Úloha 1.2.9** $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} : \ n > 1 \wedge \forall\, l, m \in \mathbb{N} \big( lm = n \Rightarrow (l = 1 \vee m = 1) \big) \}$.

**Úloha 1.2.10** Pokud $M \in M$, pak $M \notin M$. Pokud $M \notin M$, pak $M \in M$.

**Úloha 1.2.11** $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \iff (\varphi \iff \psi)$ je tautologie.

**Úloha 1.2.12** To hned plyne z axiomu extenzionality. $A$ a $B$ jsou podle definice disjunktní, právě když nemají společný prvek, tedy právě když je jejich průnik prázdná množina.

**Úloha 1.2.13** Průnik prázdné množiny $A$ není definovaný. $\forall\, b \in A\,\big(x \in b\big)$ vlastně znamená $\forall\, b\,\big(b \in A \Rightarrow x \in b\big)$. Pro prázdnou množinu $A$ tato implikace platí vždy, pro libovolné $x$, protože její předpoklad není nikdy splněn. Průnik prázdné množiny by tedy měla být množina všech množin. Víme, že tento koncept vede ke sporu.

**Úloha 1.2.14** Ne, tato rovnost rozhodně vždy neplatí. Jsou-li například $A$ a $B$ disjunktní, pak $|A \setminus B| = |A|$.

**Úloha 1.2.15** $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a $|\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| = 2^n$.

**Úloha 1.2.17** Platí-li pravá strana ekvivalence, platí i levá díky axiomu extenzionality. Nechť $X = (A, B) = (C, D)$. Podle definice dvojice je $X$ buď jednoprvková množina, jejíž jediný prvek je jednoprvková množina $\{Y\}$ (složky dvojice se rovnají), anebo $X$ je dvouprvková množina, jejíž jeden prvek je jednoprvková množina $\{Y\}$ a druhý je dvouprvková množina $\{Y, Z\}$ (složky dvojice jsou různé). Použijeme opakovaně axiom extenzionality. V prvním případu se $Y = A = B = C = D$. Ve druhém se $Y = A = C$, tudíž se $Z = B = D$.

**Úloha 1.2.19** Plyne to z axiomu extenzionality, z předešlé úlohy a z toho, že každá uspořádaná $k$-tice $A$ má $|A| = k$ prvků.

**Úloha 1.3.4** Implikace $\Leftarrow$ je triviální. Nechť jsou funkce $(A, B, f)$ a $(C, D, g)$ shodné, takže $f = g$ a $f$ je funkcionální relace mezi $A$ a $B$ i mezi $C$ a $D$. Pro libovolný prvek $a \in A$ pro nějaký $b \in B$ je $(a, b) \in f$. Ovšem také $(a, b) \in C \times D$, takže $a \in C$ a $A \subset C$. Úplně stejně je $C \subset A$ a $A = C$.

**Úloha 1.3.5** Ani jedna rovnost obecně neplatí.

**Úloha 1.3.6** Právě když $X = Y$.

**Úloha 1.3.7** Pro prostotu, konstantnost a identičnost to je pravda, pro surjektivitu a bijektivnost ne.

**Úloha 1.3.8** Obě značení se mohou objevit současně, jen když funkce $f$ je injekce, a pak souhlasí.

**Úloha 1.3.9** Protože $f^{-1}\colon f[X] \to X$ je bijekce, máme $(f^{-1})^{-1}\colon X \to f[X]$, takže pro $f[X] \neq Y$ se $(f^{-1})^{-1}$ a $f$ množinově liší. Jsou ale vždy shodné. Ovšem platí, že $((f^{-1})^{-1})^{-1}\colon f[X] \to X$, takže $((f^{-1})^{-1})^{-1}$ a $f^{-1}$ se množinově rovnají.

**Úloha 1.3.10** Je to pravda.

**Úloha 1.3.11** Nechť $f$ a $g$ jsou injekce a $f(g)(x) = f(g)(y)$. Tedy $f(g(x)) = f(g(y))$ a $g(x) = g(y)$. Tedy $x = y$ a $f(g)$ je injekce. Nechť $g\colon X \to Y$ a $f\colon Y \to B$ jsou surjekce a $b \in B$. Protože $f$ je surjekce, existuje $y \in Y$, že $f(y) = b$. Protože $g$ je surjekce, existuje $x \in X$, že $g(x) = y$. Tedy $f(g)(x) = f(g(x)) = f(y) = b$ a $f(g)$ je surjekce. Jsou-li $g\colon X \to Y$ a $f\colon A \to B$ neprázdné surjekce a, například, $Y \cap A = \emptyset$, pak $f(g)\colon \emptyset \to B$ není surjekce.

**Úloha 1.3.12** Obor hodnot funkce $f(g(h))$ vlevo i funkce $f(g)(h)$ vpravo se rovná oboru hodnot $Y$ funkce $f$. Stačí tedy dokázat, že $f(g(h)) = f(g)(h)$ jako množiny. Což platí, obě množiny se rovnají množině těch dvojic $(x, y) \in M(h) \times Y$, že existují $a \in M(g)$ & $b \in M(f)$, že $h(x) = a$, $g(a) = b$ a $f(b) = y$.

**Úloha 1.3.13** Vezmeme $Y = h[X]$, $g(x) = h(x)$ a $f = \mathrm{id}_Y$.

**Úloha 1.3.14** Když $f$ je bijekce, pak inverz $g = f^{-1}$ má požadované vlastnosti. Nechť naopak zobrazení $g\colon Y \to X$ je, jak uvedeno. Protože $g(f)(x) = x$, funkce $f$ je prostá. Protože $M(f(g)) = Y$, funkce $f$ je na.

**Úloha 1.3.15** Právě když definiční obor je prázdná nebo jednoprvková množina.

**Úloha 1.3.18** Nechť $R$ je relace ekvivalence na $A \neq \emptyset$ (pro prázdnou $A$ vše platí triviálně) a $[a]_R$ je blok ekvivalence. Patrně $a \in [a]_R$, takže prvky v $A/R$ jsou neprázdné a $\bigcup A/R = A$. Nechť $a, b \in A$, $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ a $c \in [a]_R$. Existuje tedy prvek $d \in [a]_R \cap [b]_R$. Z $cRa$, $aRd$ a $dRb$ tranzitivitou $R$ plyne, že $cRb$ a tedy $c \in [b]_R$. Takže $[a]_R \subset [b]_R$. Opačná inkluze se ukáže stejně, takže $[a]_R = [b]_R$. Prvky v $A/R$ jsou tedy vzájemně disjunktní.

Pokud $b, c \in [a]_R$, pak $bRa$ a $cRa$, takže ($R$ je relace ekvivalence) i $bRc$. Pokud $bRc$, $b \in [a]_R$ a $c \in [a']_R$, pak $bRa$, $cRa'$, takže $aRa'$. Tedy $[a]_R = [a']_R$ a $b, c$ leží ve společném bloku.

**Úloha 1.3.19** Nechť $X$ je rozklad množiny $Y \neq \emptyset$ a $R = Y/X$. Pro $y \in Y$ vezmeme blok $Z \in X$ s $y \in Z$. Tedy $yRy$ a $R$ je reflexivní. Pro $y, y' \in Y$ s $yRy'$ existuje blok $Z \in X$, že $y, y' \in Z$. Tedy i $y'Ry$ a $R$ je symetrická. Nechť $y, y', y'' \in Y$ s $yRy'$ a $y'Ry''$. Existují tedy bloky $Z, Z' \in X$, že $y, y' \in Z$ a $y', y'' \in Z'$. Pak ale $Z \cap Z' \neq \emptyset$ a tedy $Z = Z'$. Takže i $yRy''$ a $R$ je tranzitivní.

Podle definice je jasné, že $x, y \in Z \in X$, právě když $x(Y/X)y$.

**Úloha 1.3.20** Nechť $R$, $A \neq \emptyset$ a $B$ jsou, jak je uvedeno. Dokážeme první rovnost. Víme, že $C = A/R$ je rozklad množiny $A$, tedy $S = A/C$ je relace ekvivalence na $A$. Ukážeme, že $S = R$. Nechť $a, b \in A$. Pak $aSb$, právě když existuje blok $D \in C$, že $a, b \in D$. Jak víme z úlohy 1.3.18, $a, b$ leží ve společném bloku rozkladu $C$, právě když $aRb$. Tedy $S = R$.

Dokážeme druhou rovnost. Víme, že $S = A/B$ je relace ekvivalence na $A$, tedy $C = A/S$ je rozklad množiny $A$. Ukážeme, že $C = B$. Opět $a, b \in A$ leží společně v nějakém jeho bloku, právě když $aSc$. Což ale nastává, právě když $a, b$ leží společně v nějakém bloku rozkladu $B$. Tedy $C = B$.

**Úloha 1.4.2** Vždy $a \leq a$, protože $a = a$. Tranzitivita $\leq$ plyne z tranzitivity $<$ a totéž platí pro trichotomii.

**Úloha 1.4.3** Současně neplatí ani $a < b$ a $a = b$, ani $b < a$ a $a = b$, protože $<$ je ireflexivní. Nelze ani $a < b$ a $b < a$, protože pak tranzitivita $<$ dává opět spor s ireflexivitou.

**Úloha 1.4.4.** Když $m$ a $n$ jsou dvě maxima množiny $B$, je $n \leq m$ i $m \leq n$, takže $m = n$. Podobně pro minima.

**Úloha 1.4.5** Nechť $(A, <)$ je lineární uspořádání a $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, je neprázdná konečná množina. Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ prvek $b_i$ postupně porovnáváme v $<$ pomocí trichotomie s předchozími prvky $b_1, \ldots, b_{i-1}$. Dostaneme tak nějakou permutaci $\pi$ množiny $[n]$, v níž $b_{\pi(1)} < b_{\pi(2)} < \cdots < b_{\pi(n)}$. Pak $b_{\pi(1)} = \min(B)$ a $b_{\pi(n)} = \max(B)$.

**Úloha 1.4.7** Plyne to hned z jednoznačnosti maxim a minim.

**Úloha 1.4.8** Nechť $c = \sup(B)$. Pak $c$ je horní mez $B$. Nechť $a < c$. Protože $c$ je nejmenší horní mez $B$, prvek $a$ už není horní mez $B$ a existuje uvedené $b$. Naopak mějme $c$ uvedenými vlastnostmi. Říkají vlastně, že $c$ je nejmenší horní mez množiny $B$, takže $c = \sup(B)$.

Podobně se dokáže ekvivalence, že $c \in A$ je infimum množiny $B$, právě když $c \leq b$ pro každé $b \in B$ a pro každé $a \in A$ s $c < a$ existuje $b \in B$, že $b < a$.

**Úloha 1.5.1** Reflexivita i symetrie jsou jasné. Dokážeme tranzitivitu. Nechť $a/b \sim c/d$ a $c/d \sim e/f$. Tedy $ad = bc$ a $cf = de$. Pak ale $adf = bcf = bde$, tedy $adf = bde$. Nenulové $d$ lze zkrátit ($\mathbb{Z}$ je obor integrity) a $af = be$, tedy $a/b \sim e/f$.

**Úloha 1.5.3** Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$. Protozlomek $p_\alpha \in \alpha$ dostaneme zkrácením libovolného protozlomku $\frac{m}{n} \in \alpha$ do základního tvaru. Tato funkce $\alpha \mapsto p_\alpha$ je hledaná bijekce. Je jednoznačná, protože dva různé prvky v $Z_{\mathrm{z}}$ jsou neekvivalentní v relaci $\sim$. Dokážeme to. Když $\frac{k}{l}, \frac{m}{n} \in Z_{\mathrm{z}}$ jsou v základním tvaru a $\frac{k}{l} \sim \frac{m}{n}$, pak $kn = ml$. Každá mocnina prvočísla dělící $k$ tedy dělí $m$ a naopak. Podle Základní věty aritmetiky se $k = m$ a tedy i $l = n$.

**Úloha 1.5.5** Když $0_X$ a $0'_X$ jsou dva aditivní neutrální prvky, pak díky komutativitě sčítání je $0_X = 0_X + 0'_X = 0'_X + 0_X = 0'_X$. Podobně pro násobení. Když $\alpha + \beta = 0_X$ a $\alpha + \gamma = 0_X$, pak díky asociativitě a komutativitě sčítání se $\gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta = \beta$. Podobně pro multiplikativní inverzy.

**Úloha 1.5.6** Vezmeme sčítání a násobení v $\mathbb{Z}$ modulo 2: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 \cdot 1 = 1$ a $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$. Je to konečný obor integrity, takže těleso.

**Úloha 1.5.8** V každém okruhu $R_{\mathrm{O}}$ platí rovnost $0_R x = 0_R$. Plyne přičtením $-(0_R x)$ k rovnosti $0_R x = (0_R + 0_R)x = 0_R x + 0_R x$ získané distributivitou a neutralitou $0_R$. Tudíž $-x = (-1_R)x$. Položíme $x - y = x + (-y)$. Pak $(x + y)(x - y) = (x + y)(x + (-1_R)y) = x^2 + (-1_R)xy + xy + (-1_R)y^2 = x^2 - y^2$. Tedy $(-x)^2 = x^2$, protože $0_R = (x + (-x))(x - (-x)) = x^2 - (-x)^2$. Kdyby v uspořádaném tělese $T_{\mathrm{UT}}$ bylo $1_T < 0_T$, přičtením $-1_T$ dostaneme $0_T < -1_T$. Druhý axiom uspořádání pak dává $0_T < (-1_T)^2 = 1_T^2 = 1_T$. Tedy vždy $0_T < 1_T$. Přičítáním $1_T$ dostáváme, že $0_T < 1_T < 1_T + 1_T < 1_T + 1_T + 1_T < \dots$. Tedy $T$ je nekonečné.

**Úloha 1.5.10** $0 \cdot 1 \neq 1 \cdot 1$.

**Úloha 1.5.12** Nechť $(A, <)$ je lineární uspořádání. Pak $\sup(\emptyset) = \min(H(\emptyset)) = \min(A)$, když toto minimum existuje. Pro shora neomezenou podmnožinu $B$ není $\sup(B)$ definováno, protože $H(B) = \emptyset$.

**Úloha 1.5.13** Funkce $a \mapsto -a$ převádí infima na suprema.

**Úloha 1.5.14** $T_{\mathrm{UT}}$ buď úplné uspořádané těleso. Uvážíme podmnožinu $\mathbb{N}_T = \{1_T + 1_T + \dots + 1_T \mid n \in \mathbb{N} \text{ sčítanců}\}$. Stačí ukázat, že $\mathbb{N}_T$ není shora omezená. Kdyby byla, položíme $s = \sup(\mathbb{N}_T)$. Podle definice suprema existuje $x \in \mathbb{N}_T$, že $s - 1_T < x \leq s$. Pak ale $s < x + 1_T \in \mathbb{N}_T$, což je spor.

**Úloha 1.5.17** Z $b \geq a$ by vynásobením číslem $2b$ plynulo, že $2b^2 \geq 2ba > a^2$, ve sporu s rovností $a^2 = 2b^2$. Když $a \in \mathbb{N}$ je sudé (resp. liché), pak $a = 2c$ (resp. $a = 2c - 1$) pro nějaké $c \in \mathbb{N}$ a $a^2 = (2c)^2 = 2 \cdot 2c^2$ (resp. $a^2 = (2c - 1)^2 = 2 \cdot (2c^2 - 2c + 1) - 1$) je sudé (resp. liché). Když $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ splňují rovnost $a^2 = 2b^2$, pak i $a \neq 0$ a $(\pm a)^2 = 2(\pm b)^2$.

**Úloha 1.5.19** Pro zlomky $s, r > 0$ s $s^2 > 2$ nerovnost $(s - r)^2 > 2$ platí, pokud $s^2 - 2 > 2sr - r^2$, tedy např. pro každé kladné $r < (s^2 - 2)/2s$. Pro zlomky $r, s$ s $s^2 < 2$, $s > 0$ a $r \in (0, 1)$ (pak $r^2 < r$) nerovnost $(s + r)^2 < 2$ platí, pokud $2sr + r^2 < 2 - s^2$, tedy např. pro každé kladné $r < \min(1, (2 - s^2)/(2s + 1))$.

**Úloha 1.6.1** Reflexivita a symetrie relace $\sim$ jsou triviální. Tranzitivita snadno plyne pomocí trojúhelníkové nerovnosti.

**Úloha 1.6.2** Stačí dokázat, že když posloupnosti $(a_n)$ a $(b_n)$ v $C$ jsou shodné podle definice, pak splňují i tuto formálně silnější podmínku. Nechť tedy $|a_n - b_n| \leq 1/2k$ pro každé velké $n$. Protože $(a_n)$ je Cauchyova, pro každé velké $m$ a $n$ platí, že $|a_m - a_n| \leq 1/2k$. Podle trojúhelníkové nerovnosti pro každé velké $m$ a $n$ je $|a_m - b_n| \leq |a_m - a_n| + |a_n - b_n| \leq 1/2k + 1/2k = 1/k$.

**Úloha 1.6.10** Snadno se ověří, že pro každé dva zlomky $a$ a $b$ platí, že $f(a - b) = f(a) - f(b)$, $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ a že $a < b$, právě když $f(a) < f(b)$.

**Úloha 1.6.11** Pro $z = 0$ nerovnost $x < y$ přejde v rovnost $xz = 0 = 0 = yz$.

**Úloha 1.6.13** Když $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b$ jsou zlomky, pak $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost. Důkaz je stejný.

**Úloha 1.7.2** Nechť $X$ je neprázdná konečná množina (pro prázdnou to platí triviálně s prázdným zobrazením $f$). Axiomem výběru postupně vybíráme prvky $f(1) \in X$, $f(2) \in X \setminus \{f(1)\}$, $f(3) \in X \setminus \{f(1), f(2)\}$, ... dokud to jde, to jest dokud zbývající množina je neprázdná. Protože $X$ je konečná množina, nepodaří se nám v $f$ sestrojit injekci z $\mathbb{N}$ do $X$. V jistém kroku $m \in \mathbb{N}$ vyčerpáme prvky v $X$ a dostaneme bijekci $f\colon [m] \to X$. Hodnoty $f(n) \in X$ pro $n > m$ doplníme libovolně.

**Úloha 1.7.3** Tuto bijekci jsme nalezli v předešlém důkazu.

**Úloha 1.7.6** Funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ daná jako $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 2$, $f(5) = -2$, $f(6) = 3$, ... je bijekce.

**Úloha 1.7.8** $Y = \emptyset$.

**Úloha 1.7.9** Nechť $f\colon \mathcal{P}(X) \to X$ je injekce. Pak máme inverz $f^{-1}\colon f[\mathcal{P}(X)] \to \mathcal{P}(X)$ a definujeme množinu $Y = \{x \in f[\mathcal{P}(X)] \mid x \notin f^{-1}(x)\}$ $(\subset X)$. Pro prvek $y = f(Y)$ dostaneme z $y \overset{?}{\in} Y$ známý spor.

**Úloha 1.7.12** Je to celkem jasné.

**Úloha 1.7.15** Tyto dvojice (různé od kladné a záporné nuly) jsou jednoznačně určené ciframi před maximálním úsekem devítek.

**Úloha 1.7.18** Hodnoty funkce $f$ mimo $Y$ přesměrujeme do $Y$ a tím dostaneme $f_0$. Bijekce $g$ je jasná. Funkce $h$ je surjekce, protože surjekce jsou všechny tři funkce $f_0$, $F^{-1}$ a $g$ a složenina na sebe navazujících surjekcí je surjekce (úloha 1.3.11).

**Úloha 3.1.1** Existuje kladné reálné číslo epsilon, že pro každé kladné reálné číslo delta existují taková dvě reálná čísla $a$ a $b$ z množiny $M$, že $a$ a $b$ jsou blíže než delta, ale funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ jsou vzdálené alespoň epsilon.

**Úloha 3.1.2** Nerovnost stačí dokázat pro $n = 2$, pro větší $n$ se použije indukce. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolná reálná čísla. Mají-li stejné znaménko nebo je-li alespoň jedno z nich nula, pak $|a+b| = |a|+|b|$. Mají-li různá znaménka, pak $|a+b| \leq \max(\{|a|, |b|\}) \leq |a| + |b|$.

**Úloha 3.1.5** $+\infty$, $-\infty$, $-\infty$ a nedefinováno.

**Úloha 3.1.6** $(\mathbb{R}, <)$ jsme rozšířili přidáním nekonečen tak, že $-\infty \not< -\infty$ i $+\infty \not< +\infty$ a rozšířená relace $<$ je tedy ireflexivní. Její tranzitivita je také jasná. Například

z $-\infty < a$ a $a < +\infty$ máme podle definice, že $-\infty < +\infty$. Podobně ostatní případy. Trichotomie se v rozšíření také zachovala.

**Úloha 3.1.8** Tyto množiny jsou $\emptyset$ a $\{-\infty\}$.

**Úloha 3.1.12** Okolí bodů a nekonečen jsou intervaly a tedy konvexní množiny.

**Úloha 3.1.13** Pro $A, B \in \mathbb{R}$ stačí vzít $\varepsilon < \frac{B-A}{2}$. Pokud $A = -\infty$ a $B = +\infty$, vezmeme $\varepsilon$ libovolně. Pokud $A = -\infty$ a $B \in \mathbb{R}$, vezmeme $\varepsilon < \frac{1}{|B|+1}$.

**Úloha 3.1.14** To plyne hned z definic okolí.

**Úloha 3.1.15** Opět to plyne hned z definic okolí.

**Úloha 3.1.18** Kromě $V_4$ jsou všechny ostatní vlastnosti robustní.

**Úloha 3.1.20** Patrně

$$\frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{n^{-1/6} - 1}{n^{-1/4}} \to \frac{0-1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

díky kladnosti odmocniny $n^{-1/4}$.

**Úloha 3.2.2** Reflexivita plyne z volby $m_n = n$. Tranzitivita je celkem jasná při použití „vynechávacího“ pojetí podposloupností.

**Úloha 3.2.3** Jsou to třeba posloupnosti $(0, 1, 0, 1, \dots)$ a $(1, 0, 1, 0, \dots)$.

**Úloha 3.2.7** Nechť $(b_n)$ a $(a_n)$ jsou uvedené posloupnosti a je dáno $\varepsilon$. Existuje tedy $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon)$. Pak existuje $n_1$, že $n \geq n_1 \Rightarrow m_n \geq n_0$. Pak pro každé $n \geq n_1$ je $b_n = a_{m_n} \in U(L, \varepsilon)$ a $\lim b_n = L$.

**Úloha 3.2.8** Lehce se vidí, že posloupnost $(m_n) \subset \mathbb{N}$ dosvědčující, že $(b_n) \preceq^* (a_n)$, má rostoucí podposloupnost.

**Úloha 3.2.9** Koeficient u $a^j b^{n-j}$ je roven počtu způsobů, jak v součinu $(a+b)^n$ zvolit $j$ činitelů, v nichž vybereme číslo $a$. Ve zbylých $n-j$ činitelích vybereme číslo $b$. Počet $j$-prvkových podmnožin $n$-prvkové množiny je právě $\binom{n}{j}$.

**Úloha 3.2.11** Plyne to negací limity $n^{1/n} \to 1$.

**Úloha 3.3.1** Pokud takové $c$ existuje, pro každé $n$ je $-c \leq a_n \leq c$ a $(a_n)$ je omezená zdola i shora, takže je omezená podle definice. Nechť je naopak $(a_n)$ omezená podle definice, takže $d \leq a_n \leq c$ pro každé $n$ a nějaká čísla $d$ a $c$. Potom $|a_n| \leq \max(\{|d|, |c|\})$ pro každé $n$.

**Úloha 3.3.2** Posledních pět týkajících se omezenosti.

**Úloha 3.3.5.** Pokud $(a_n)$ např. neklesá od $n = m$ a $b_n = a_n$ pro každé $n \geq n_0$, pak $(b_n)$ neklesá od $n = \max(\{m, n_0\})$.

**Úloha 3.3.6** Pokud např. $(a_n)$ neroste, pak pro každé $n$ platí implikace $a_m > a_n \Rightarrow m < n$, takže $(a_n)$ kvazineroste. Podobně pro neklesající posloupnost.

**Úloha 3.3.7** Je to například posloupnost $(1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, \dots)$. Kvazineklesá, ale žádný koncový úsek není monotónní.

**Úloha 3.3.8** Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je kvazimonotónní, právě když

$$\forall\, l\, \exists\, m \left(n > m \Rightarrow a_n \geq a_l\right) \vee \forall\, l\, \exists\, m \left(n > m \Rightarrow a_n \leq a_l\right).$$

**Úloha 3.3.11** Pokud $(a_n)$ např. kvazineklesá od $n = m$ a $b_n = a_n$ pro každé $n \geq n_0$, pak $(b_n)$ kvazineklesá od $n = \max(\{m, n_0\})$.

**Úloha 3.3.13** Zobecnění říká, že pro každé (konečné či nekonečné) LU $(X, <)$ každá posloupnost $(a_n)$ v $X$ má monotónní podposloupnost. Důkaz je téměř stejný.

**Úloha 3.3.16** Lehce se vidí, že limita $c$ této podposloupnosti splňuje nerovnosti $a \leq c \leq b$.

**Úloha 3.3.18** Pokud v dané cauchyovské posloupnosti $(a_n)$ nahradíme členy $a_1$ až $a_m$ hodnotami $a'_1$ až $a'_m$, vzniklá posloupnost $(a'_n)$ je stále cauchyovská, protože index $n_0$ lze vždy vzít větší než $m$.

**Úloha 3.3.19** Nechť $(a_n)$ je Cauchyova. Pak existuje $n_0$, že pro každé $m, n \geq n_0$ je $|a_m - a_n| \leq 1$. Podle $\Delta$-ové nerovnosti pro každé $n$ je $|a_n| \leq 1 + \max(\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|\})$ a posloupnost $(a_n)$ je omezená.

**Úloha 3.3.21** Je to například posloupnost $(1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots)$ konečných zkrácení desetinného rozvoje čísla $\sqrt{2}$.

**Úloha 3.3.22** V důkazu jsme použili B.–W. větu, jejíž důkaz je založen na existenci vlastní limity omezené monotónní posloupnosti. A pro to potřebujeme existenci suprema, resp. infima, příslušné množiny reálných čísel.

**Úloha 3.3.23** černý

**Úloha 3.3.24** Tenkrát na Východě bylo pro příslušný slovník nutné navštívit knihkupectví nebo knihovnu. Jiná možnost byla zeptat se někoho ze Slovenska.

**Úloha 3.3.26** Ukážeme, že $f(n)$ je superaditivní funkce. Slova, která splňují obě podmínky nazveme přípustnými. Nechť je $m, n \in \mathbb{N}$, $a_1 \dots a_{f(m)}$ je přípustné slovo nad abecedou $[m]$ s maximální délkou a $b_1 \dots b_{f(n)}$ je přípustné slovo nad abecedou $\{m+1, \dots, m+n\}$ s maximální délkou. Konkatenace

$$u = a_1 \dots a_{f(m)} b_1 \dots b_{f(n)}$$

je přípustné slovo nad abecedou $[m+n]$, takže $f(m) + f(n) \leq f(m+n)$. Jak víme, že $u$ neobsahuje *abba*? Díky tomu, že se slovo *abba* nedá napsat jako konkatenace dvou slov nad disjunktními abecedami.

**Úloha 3.3.27** Argumentuje se jako v předešlé úloze. Klíčové opět je, že slovo *abab* nelze napsat jako konkatenaci dvou slov nad disjunktními abecedami.

**Úloha 3.3.28** Ovšem slovo *aabb* lze napsat jako konkatenaci dvou slov nad disjunktními abecedami, *aabb* = *aa bb*, a předešlý argument užívající Feketeho lemma nelze použít.

**Úloha 3.3.29** Ukážeme, že pro každé pevné $k$ je funkce $r_k(n)$ subaditivní. Množinu $A \subset \mathbb{Z}$ neobsahující AP délky $k$ nazveme přípustnou. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $A \subset [m+n]$ je přípustná množina maximální velikosti $|A| = r_k(m+n)$. Lehce se vidí, že množiny

$$A' = [m] \cap A \text{ a } A'' = \{x \in [n] \mid x + m \in A\}$$

jsou přípustné (neobsahování AP délky $k$ se dědí na podmnožiny a zachovává posunem). Tedy $r_k(m+n) = |A| = |A'| + |A''| \leq r_k(m) + r_k(n)$.

**Úloha 4.1.1** Na rovnosti $a = (a+b) + (-b)$ & $a = (a-b) + b$ použijeme obyčejnou $\Delta$-ovou nerovnost a výsledky upravíme.

**Úloha 4.1.3** 1. Nechť $|a_n| \leq d$ pro každé $n$, $L = -\infty$ a je dáno $c < 0$. Patrně pro každé velké $n$ je $b_n \leq c - d$. Tedy pro každé velké $n$ je $a_n + b_n \leq d + c - d = c$ a $a_n + b_n \to -\infty$. Případ, že $L = +\infty$ je podobný.

2. Nechť $|a_n| \leq d$ pro každé $n$, $b_n \to 0$ a je dáno $\varepsilon$. Patrně pro každé velké $n$ je $|b_n| \leq \varepsilon/d$. Tedy pro každé velké $n$ je $|a_n b_n| \leq d(\varepsilon/d) = \varepsilon$ a $a_n b_n \to 0$.

3. Nechť $a_n$, $c$, $L = +\infty$ a $b_n$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $d > 0$. Patrně pro každé velké $n$ je $b_n \geq d/c$. Tedy pro každé velké $n$ je $a_n b_n \geq c \cdot (d/c) = d$ a $a_n b_n \to +\infty = L$. Další případy jsou podobné.

4. Nechť $|a_n| \leq d$ pro každé $n$, $b_n \to \pm\infty$ a je dáno $\varepsilon$. Patrně pro každé velké $n$ je $|b_n| \geq d/\varepsilon$. Tedy pro každé velké $n$ je $|a_n/b_n| = |a_n| \cdot (1/|b_n|) \leq d(1/(d/\varepsilon)) = \varepsilon$ a $a_n/b_n \to 0$.

5. Nechť $a_n$, $c$ a $b_n$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $d > 0$. Patrně pro každé velké $n$ je $0 < b_n \leq c/d$. Tedy pro každé velké $n$ je $a_n/b_n \geq c/(c/d) = d$ a $a_n/b_n \to +\infty$. Další případy jsou podobné.

6. Nechť $a_n$, $c$, $L = -\infty$ a $b_n$ jsou, jak uvedeno, a je dáno $d < 0$. Patrně pro každé velké $n$ je $b_n <\leq dc$. Tedy pro každé velké $n$ je $b_n/a_n \leq (dc)/c = d$ a $b_n/a_n \to -\infty = L$. Další případy jsou podobné.

**Úloha 4.1.5** 1. Pro $A \in \mathbb{R}$ vezmeme $a_n = n$, $b_n = -n + A$. Pro $A = +\infty$ vezmeme $a_n = n$, $b_n = -\sqrt{n}$. Pro $A = -\infty$ vezmeme $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = -n$.

2. Pro $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vezmeme $a_n = \operatorname{sgn}(A)/n$, $b_n = n|A|$. Pro $A = 0$ vezmeme $a_n = 0$, $b_n = n$. Pro $A = +\infty$ vezmeme $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$. Pro $A = -\infty$ vezmeme $a_n = -1/n$, $b_n = n^2$.

3. Pro $A \in \mathbb{R}$ vezmeme $a_n = A/n$, $b_n = 1/n$. Pro $A = \pm\infty$ vezmeme $a_n = 1/n$, $b_n = \pm 1/n^2$ (shodná znaménka).

4. Pro $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vezmeme $a_n = An$, $b_n = n$. Pro $A = 0$ vezmeme $a_n = n$, $b_n = n^2$. Pro $A = \pm\infty$ vezmeme $a_n = \pm n^2$, $b_n = n$ (shodná znaménka).

**Úloha 4.2.1** Tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

**Úloha 4.2.3** Plyne to z identity $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$ $(= |a_n|)$.

**Úloha 4.3.1** Pro $A, B \in \mathbb{R}$ vezmeme libovolné $\varepsilon < \frac{B-A}{2}$. Pro $A = -\infty$ a $B = +\infty$ vezmeme libovolné $\varepsilon$. Pro $A = -\infty$ a $B \in \mathbb{R}$ vezmeme libovolné $\varepsilon < \min(\{1, \frac{1}{|B|+1}\})$. Podobně pro $A \in \mathbb{R}$ a $B = +\infty$.

**Úloha 4.3.3** Množina dvojic posloupností $\big((a_n), (b_n)\big)$, pro něž existuje $n_0$, že $a_m < b_n$ pro každé $m, n \geq n_0$, je vlastní podmnožinou množiny dvojic posloupností $\big((a_n), (b_n)\big)$, pro něž existuje $n_0$, že $a_n < b_n$ pro každé $n \geq n_0$.

**Úloha 4.3.4.** Například $(a_n) = (\frac{1}{n})$ a $(b_n) = (0, 0, \dots)$.

**Úloha 4.3.5.** Nechť $(a_n)$, $(b_n)$, $K$ a $L$ jsou, jak uvedeno. Patrně můžeme vzít takové číslo $c$, že $K < c < L$. Podle úlohy 3.1.12 existuje $\varepsilon$, že $U(K, \varepsilon) < U(c, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Pak stačí vzít libovolná dvě čísla $a, b \in U(c, \varepsilon)$ s $a < b$. Pro každé velké $m$ a $n$ je $a_m \in U(K, \varepsilon)$ a $b_n \in U(L, \varepsilon)$, takže $a_m \leq a$ a $b \leq b_n$.

**Úloha 4.3.8** Ano, každá jednoprvková množina $\{a\}$ je takovým intervalem.

**Úloha 4.3.11** Nechť $\lim a_n = -\infty$, $b_n \leq a_n$ pro každé velké $n$ a je dáno $c < 0$. Pak pro každé velké $n$ je $b_n \leq a_n \leq c$, tedy $b_n \leq c$, a $\lim b_n = -\infty$. Případ s limitou $+\infty$ je podobný

**Úloha 4.4.2** Podle části 1 věty 3.2.5 má každá posloupnost podposloupnost, jež má limitu.

**Úloha 4.4.7** Části 3 a 4 lze zredukovat na části 1 a 2 pomocí identity $\liminf a_n = -\limsup(-a_n)$.

**Úloha 4.4.8** V $m$-tém kroku, $m \in \mathbb{N}$, $m$-tý úsek posloupnosti $(a_n)$ projde čísla $-m$, $-m+1/m$, $-m+2/m$, $\dots$, $m$.

**Úloha 4.4.9** Neexistuje, protože $H(a_n) \cap \mathbb{R}$ je vždy uzavřená množina.

**Úloha 4.4.10** $H(a_n) = \{0, +\infty\}$.

**Úloha 4.5.3** Nechť $\sum_{x\in X} r_x$ je konečná AK řada a $Y = \{x \in X : r_x \neq 0\}$. Položíme $c = \sum_{x\in Y} |r_x|$, což je konečný součet. Pro každou konečnou množinu $Z \subset X$ pak jistě platí, že $\sum_{x\in Z} |r_x| = \sum_{x\in Z\cap Y} |r_x| \leq c$.

**Úloha 4.5.5** Opět nechť $R = \sum_{x\in X} r_x$ je konečná AK řada a $Y = \{x \in X : r_x \neq 0\}$ (což je konečná množina). $f\colon \mathbb{N} \to X$ buď bijekce. Je jasné, že posloupnost $(\sum_{i=1}^n r(f(i)))$ je eventuálně konstantní s konstantou $\sum_{x\in Y} r_x$, takže $R$ má součet rovný konečnému součtu $\sum_{x\in Y} r_x$.

**Úloha 4.5.9** Množiny $Z_i'$ jsou po dvou disjunktní. Když $x$ probíhá bijektivně všechny prvky množiny $X_0$, probíhá tím bijektivně postupně všechny prvky množin $Z_1'$, $\dots$, $Z_{n-1}'$, $Z_n''$.

**Úloha 4.5.11** Nechť horní meze $c$ a $d$ dosvědčují, že $R$ a $S$ jsou AK řady a $Z \subset X \cup Y$ je konečná množina. Pak $|\sum_{x\in Z} r_x| \leq |\sum_{x\in Z\cap X} r_x| + |\sum_{x\in Z\cap Y} r_x| \leq c + d$ a $T$ je AK řada. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to X$ a $g\colon \mathbb{N} \to Y$ jsou bijekce. Z nich definujeme tuto bijekci $h\colon \mathbb{N} \to X \cup Y$: $h(2n-1) = f(n)$ a $h(2n) = g(n)$. Pak $t = \lim \sum_{i=1}^n t_{h(i)} = \lim \sum_{i=1}^n r_{f(i)} + \lim \sum_{i=1}^n s_{g(i)} = r + s$.

**Úloha 5.1.1** Existenci ani neexistenci limity posloupnosti neovlivní změna konečně mnoha jejích členů.

**Úloha 5.1.2** Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou konvergentní řady, přičemž pro nějaké $m$ platí, že $b_n = a_n$ pro $n \neq m$ a $b_m = a_m + c$, kde $c \neq 0$. Nechť $(s_n)$ a $(t_n)$ jsou posloupnosti částečných součtů. Pak zřejmě $t_n = s_n$ pro $n < m$ a $t_n = s_n + c$ pro $n \geq m$, takže pro součty těchto řad platí, že $\sum b_n = \lim t_n = c + \lim s_n = c + \sum a_n$.

**Úloha 5.1.3** Částečné součty od jistého indexu neklesají, resp. nerostou.

**Úloha 5.1.4** Zde $s_n = n$, takže $\lim s_n = +\infty$.

**Úloha 5.1.7** První rovnost plyne z definice částečného součtu. Druhá z aritmetiky limit posloupností. Třetí z předpokladu a z limity podposloupnosti. Čtvrtá je triviální.

**Úloha 5.1.8** Vzhledem k monotonii posloupnost $(a_n)$ má limitu $L$. Limitu $L$ mají i všechny podposloupnosti, takže $L = +\infty$.

**Úloha 5.1.9** Nechť $(s_n)$ a $(t_n)$ jsou částečné součty obou řad. Patrně existuje konstanta $c$, že pro každé $n \geq n_0$ platí nerovnost $s_n \geq t_n + c$. Protože $\lim(t_n + c) = +\infty$, z věty o jednom strážníkovi plyne, že i $\lim s_n = +\infty$.

**Úloha 5.1.12** Nechť $n \geq 2$. Z předpokladu, že $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = m \in \mathbb{N}$, odvodíme spor. Každý jmenovatel $j = 1, 2, \dots, n$ napíšeme podle návodu ve tvaru $j = a(j) \cdot 2^{b(j)}$, kde $a(j) \in \mathbb{N}$ je liché a $b(j) \in \mathbb{N}_0$. Pro $j_0 = 2^k$, kde $k \in \mathbb{N}$ je největší číslo s $2^k \leq n$, je toto vyjádření tvaru $j_0 = 1 \cdot 2^k$. Pro každé $j \in [n] \setminus \{j_0\}$ je $b(j) < k$. Tedy $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = (a+b)/(a \cdot 2^k)$, kde $a := a(1)a(2)\dots a(n) \in \mathbb{N}$ je liché číslo a $b \in \mathbb{N}$ je sudé číslo, protože

je součtem $n-1$ sudých čísel. Čitatel $a+b$ je tedy liché číslo a mocninu $2^k \geq 2$ ve jmenovateli nelze zkrátit. Rovnost $(a+b)/(a \cdot 2^k) = m$ je tak nemožná. Tento argument vlastně dokazuje, že pro žádné $n \geq 2$ neplatí rovnost $h_n = \frac{k}{l}$ s lichým jmenovatelem $l$.

**Úloha 5.1.13** ???

**Úloha 5.1.15** Od řady $\sum a_n$ se přejde k řadě $\sum(-a_n)$.

**Úloha 5.1.20** Je to speciální případ důsledku 4.5.7.

**Úloha 5.1.23** Plyne to z rovnosti $q^m + q^{m+1} + \cdots = q^m \cdot (1 + q + \cdots)$.

**Úloha 5.1.24** Každá, která konverguje, takže právě a jen s kvocientem $q \in (-1, 1)$.

**Úloha 5.1.28** Vyplývá to z divergence harmonické řady.

**Úloha 5.1.29** Právě pro $s > 1$, opět podle CKK.

**Úloha 5.2.1** Nechť $M$ a $A$ jsou, jak uvedeno, a nechť platí 1, takže $A$ je limitní bod $M$ podle uvedeně definice. Pro každé $n$ vybereme číslo $a_n \in P(A, 1/n) \cap M$ a dostaneme tím posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ s limitou $A$, takže platí 2. Pak pro každé $m$ existuje $\varepsilon$, že $a_1, \ldots, a_m \notin U(A, \varepsilon)$. Z $(a_n)$ tak můžeme vybrat prostou podposloupnost a platí 3. Nechť platí 3 a $(b_n) \subset M$ je prostá posloupnost s limitou $A$. Pro dané $n$ je $b_m \in U(A, 1/n)$ pro každé velké $m$ a z těchto jen pro nejvýše jedno $m$ se $b_m = A$, takže jistě $P(A, 1/n) \cap M \neq \emptyset$ a platí 4. Je jasné, že $4 \Rightarrow 1$.

**Úloha 5.2.3** Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ je konečná množina a $x \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Vezmeme $\varepsilon$ menší, než je nejmenší vzdálenost mezi $x$ a prvkem v $M \setminus \{x\}$ (pokud $M \setminus \{x\} = \emptyset$, klademe $\varepsilon := 1$). Pak $P(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$ a $x$ není limitním bodem množiny $M$. Díky omezenosti $M$ ani $-\infty$ ani $+\infty$ není jejím limitním bodem.

**Úloha 5.2.4.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je nekonečná množina. Je-li neomezená, je $-\infty$ nebo $+\infty$ její limitní bod. Nechť $M$ je omezená. Díky nekonečnosti $M$ pomocí AC z $M$ vybereme prostou posloupnost $(a_n) \subset M$. Z ní pomocí tvrzení 3.3.12 vybereme monotónní podposloupnost $(b_n)$. Podle omezenosti $(b_n)$ a věty o limitě monotónní posloupnosti máme vlastní limitu $\lim b_n = b$. Protože $(b_n) \subset M$ a $b_n \neq b$ pro každé $n$, podle úlohy 5.2.1 vidíme, že $b$ je limitní bod množiny $M$.

**Úloha 5.2.5** Plyne to hned z části 2 tvrzení 5.2.2.

**Úloha 5.2.8.** Už žádné.

**Úloha 5.2.11** Třeba $A = 0$, $M = \{\pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $f = 0$ na $M \setminus X$ a $f = 1$ na $X$.

**Úloha 5.2.13** Z každého prvku množiny $\{\{x \in P(K, 1/n) \cap M : \ f(x) \notin U(L, \varepsilon)\} : n \in \mathbb{N}\}$ jsme vybrali prvek.

**Úloha 5.2.14.** 1. Díky algebraické úpravě ($x < 0$, takže $x = -|x|$) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{1}{-\sqrt{1/x^2+1}-1/|x|}$ dostáváme pro $x \to -\infty$ limitu $\frac{1}{-\sqrt{1/(+\infty)+1}-0} = -1$.

2. Úprava $\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} = \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$ dává pro $x \to +\infty$ limitu $\sqrt{1+(+\infty)} + \sqrt{+\infty} = +\infty$.

3 a 4. Tyto limity jsou triviální, první neexistuje a druhá se rovná 0.

**Úloha 5.3.1** Tolik, jako reálných čísel, $k_c \mapsto c$ je bijekce z množiny konstant do $\mathbb{R}$.

**Úloha 5.3.2** Vezmeme $m$, že $m \geq 2|x|$. Pak pro každé $n \geq m$ je $|x^n/n!| \leq (|x|^m/m!) \cdot (1/2)^{n-m} = (2|x|)^m/m! \cdot (1/2)^n$. Pak použijeme odhad založený na geometrické řadě.

**Úloha 5.3.4** 1. $\exp 0 = 1$ je trivialita a zbytek plyne z exponenciální identity. 2. Pro $x < y$ je $\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{y-x} - 1) > 0$ podle exponenciální identity. 3. Pro $x > n$ je $\mathrm{e}^x > n$, takže $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Dále $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 1/\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = 1/(+\infty) = 0$.

**Úloha 5.3.6** Pro spor nechť $\sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} = \frac{n}{m}$ s $n, m \in \mathbb{N}$. Úpravou navrženou v návodu dostaneme, že $r := \sum_{j>m} \frac{m!}{j!} = n \cdot (m-1)! - \cdots \in \mathbb{N}$. To ale není možné, protože $0 < r \leq \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)^j} = \frac{m+2}{(m+1)^2} < 1$.

**Úloha 5.3.7** 1. $\log 1 = 0$ plyne z $\exp 0 = 1$. Překlopením grafu podle přímky $y = x$ dostaneme z rostoucí funkce $\exp x$ opět rostoucí funkci $\log x$. Pro $x, y > 0$ díky exponenciální identitě máme rovnost $\exp(\log x + \log y) = x \cdot y$, takže $\log x + \log y = \log(xy)$. 2. Tyto limity zase lehce vidíme ze vztahu grafů exponenciály a logaritmu pomocí překlopení podle přímky $y = x$. 3. To plyne z části 4 předchozího tvrzení.

**Úloha 5.3.11** Začneme s $a^x$. Nechť $a > 0$. Pro $x = 0$ je $\exp(x \log a) = \exp 0 = 1$. Pro $x \in \mathbb{N}$ je $\exp(x \log a) = \exp(\log a + \cdots + \log a)$ s $x$ sčítanci $\log a$, což se díky exponenciální identitě rovná $\exp(\log a) \cdot \ldots \cdot \exp(\log a) = a \cdot \ldots \cdot a$ s $x$ činiteli $a$. Pro každé $x \in \mathbb{N}$ je díky exponenciální identitě $\exp((-x) \log a) = 1/\exp(x \log a)$. Tedy $a^x$ souhlasí s $x^m$. Pokračujeme s $x^b$. Nechť $b, x > 0$. Pro $b \in \mathbb{N}$ je $\exp(b \log x) = \exp(\log x + \cdots + \log x)$ s $b$ sčítanci $\log x$, což se díky exponenciální identitě rovná $\exp(\log x) \cdot \ldots \cdot \exp(\log x) = x \cdot \ldots \cdot x$ s $b$ činiteli $x$. Tedy $x^b$ souhlasí s $x^m$. Konečně $0^x = 0$ pro $x \in \mathbb{N}$ také souhlasí s $x^m$.

**Úloha 5.3.12** Podle definice 5.3.9 se $\mathrm{e}^x = \exp(x \log \mathrm{e})$. Ovšem díky definici $\mathrm{e} = \exp 1$ vidíme, že se to rovná $\exp x$.

**Úloha 5.3.14** S $A = 1 + x$, $B = 1 + x + x^2$, $C = 1 + x^3$ a $D = 1 + x^2 + x^4$, pro něž se podle návodu $AD = BC = E$, máme dokázat, že $(A^y + B^y)^x \cdot (C^x + D^x)^y = (A^x + B^x)^y \cdot (C^y + D^y)^x$. Ekvivalentně, že $E^{xy}(1 + (\frac{B}{A})^y)^x(1 + (\frac{C}{D})^x)^y = E^{xy}(1 + (\frac{A}{B})^x)^y(1 + (\frac{D}{C})^y)^x$. Což ale platí, protože $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ a $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ a násobení je komutativní.

**Úloha 5.3.15** Pro $A = 0$ položíme $a_n = 1/n^n$ a $b_n = 1/n$. Pro $0 < A < 1$ položíme $a_n = A^n$ a $b_n = 1/n$. Pro $A = 1$ položíme $a_n = b_n = 1/n$. Pro $1 < A < +\infty$ položíme $a_n = 1/A^n$ a $b_n = -1/n$. Pro $A = +\infty$ položíme $a_n = 1/n^n$ a $b_n = -1/n$. Protože $a^b < 0$, jen když $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

**Úloha 5.3.16** Postupujte jako v úloze 5.3.2.

**Úloha 5.3.18** 1. Za čas $2\pi$ běžkyně oběhne jedno kolo a dostane se do stejné pozice. 2. Tak se chová $y$-ová souřadnice polohy běžkyně v první čtvrtině jejího oběhu kola. 3. Plyne to ze symetrie dráhy podle $y$-ové osy a podle počátku souřadnic $(0, 0)$. 4. První vztah plyne z geometrického faktu, že otočení $S$ kolem počátku o $\pi/2$ (v kladném směru) je ekvivalentní prohození souřadných os. Druhý vztah prostě vyjadřuje, že každý bod na $S$ má od počátku euklidovskou vzdálenost 1. 5. Zkuste vyhledávání obrázků pro „geometric proof of summation formulae for sinus and cosinus“.

**Úloha 5.3.20** Porovnejte mocninné řady pro exponenciálu, kosinus a sinus.

**Úloha 5.3.21** Z vlastností kosinu a sinu víme, jaké jsou jejich nulové body.

**Úloha 5.4.1** Plyne to z komutativity, asociativity a distributivity operací $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{R}$ a z toho, že tyto vlastnosti má i množinový průnik: $M \cap N = N \cap M$, $(M \cap N) \cap P =$

$M \cap (N \cap P)$ a $M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap (M \cap P)$. Číslo 0, resp. 1, je samozřejmě neutrální vzhledem ke sčítání, resp. násobení, na $\mathbb{R}$ a také vždy $\mathbb{R} \cap M = M$. Žádná funkce $f \in \mathcal{R}$ s $M(f) \neq \mathbb{R}$ ale nemá ani aditivní ani multiplikativní inverz.

**Úloha 5.4.3** Hodnoty funkcí $f - g$ a $f + f_{-1} \cdot g$ se patrně shodují a stejně tak i jejich definiční obory: $M(f) \cap M(g) = M(f) \cap (\mathbb{R} \cap M(g))$.

**Úloha 5.4.5** $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$.

**Úloha 5.4.6** Je to prázdná funkce $\emptyset$.

**Úloha 5.4.7** Ano, podle předešlé úlohy. Ale třeba i $x^{1/2} + (-x-1)^{1/2} = \emptyset$.

**Úloha 5.4.8** $g = k_{-1} \cdot f$.

**Úloha 5.4.10** Například $f(x) = \sqrt{\sin(\pi x)} + \sqrt{-\sin(\pi x)}$ a $g(x) = \frac{1}{\sin(\pi/x)}$, kde $\pi$ je $k_\pi$ a $x$ je $\mathrm{id}_\mathbb{R}$.

**Úloha 5.4.11** Máme vyjádření: $a^x = \exp(x \log a)$, $x^b = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \,|\, [0, +\infty)$ ($b \in \mathbb{N}$, pomocí tvrzení 5.4.9), $0^x = k_0 \,|\, (0, +\infty)$ (pomocí tvrzení 5.4.9), $x^m = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ ($m \in \mathbb{N}$), $x^0 = k_1$ a $x^m = k_1/x^{-m}$ ($m \in \mathbb{Z}$ a $m < 0$).

**Úloha 5.4.15** Například $\arcsin x$, $|x|$ nebo $\arcsin(\sin x)$.

**Úloha 5.5.3** Nechť $p \neq k_0$ má kanonický tvar $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Indukcí podle $\deg p = n$ dokážeme, že $|Z(p)| \leq n$. Pro $n = 0$ to platí, pak $p = k_{a_0}$ s $a_0 \neq 0$ a $p$ nemá nulový bod. Nechť $n > 0$. Pokud $p$ nemá nulový bod, nerovnost platí. Nechť $p(a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Pak $p$ (v kanonickém tvaru) vydělíme polynomem $x - a = \mathrm{id}_\mathbb{R} - k_a$ se zbytkem a dostaneme vyjádření $p = (x-a)q$ s nějakým polynomem $q$ stupně $n-1$. Pro každé $b \neq a$ s $p(b) = 0$ je $q(b) = 0$. Indukcí tak $|Z(p)| = 1 + |Z(p) \setminus \{a\}| \leq 1 + |Z(q)| \leq 1 + (n-1) = n$.

**Úloha 5.5.4** Díky tvrzení 5.4.2 zbývá dokázat jen existenci aditivních inverzů a definiční vlastnost oboru integrity. Inverzy existují díky úloze 5.4.8 a tomu, že každý polynom má definiční obor $\mathbb{R}$. Nenulovost součinu dvou nenulových polynomů plyne z vynásobení jejich kanonických tvarů.

**Úloha 5.5.8** Reflexivita a symetrie relace $\sim$ jsou zřejmé. Dokážeme tranzitivitu. Nechť $r \sim s$ a $s \sim t$. Uvážíme kanonické tvary těchto rac. funkcí: $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ a $t = \frac{e}{f}$. Podle předpokladu $r = s$ na $M(r) \cap M(s) = \mathbb{R} \setminus Z(bd)$ a $s = t$ na $\mathbb{R} \setminus Z(df)$. Takže $r = t$ na $\mathbb{R} \setminus (Z(bd) \cup Z(df)) = (\mathbb{R} \setminus Z(bf)) \setminus Z(d) = (M(r) \cap M(t)) \setminus Z(d)$. Díky spojitosti $r$ a $t$ v každém bodu $x \in M(r) \cap M(t) \cap Z(d)$ se $r$ a $t$ rovnají i na $M(r) \cap M(t)$ a $r \sim t$.

**Úloha 5.5.9** Nechť $r, s, t, r', s' \in \mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\}$. Není těžké vidět (pomocí spojitosti rac. funkcí), že z $r \sim r'$ a $s \sim s'$ plyne i $r + s \sim r' + s'$ a $r \cdot s \sim r' \cdot s'$. Můžeme tak mezi sebou sčítat a násobit celé ekvivalenční bloky. Komutativita a asociativita sčítání a násobení a distributivní zákon v $\mathbb{R}(x)$ plynou hned z aritmetiky v $\mathbb{R}$. Pro existenci inverzů potřebujeme právě ekvivalenční bloky. K $[r]_\sim = [p/q]_\sim$ je aditivním inverzem $[(-p)/q]_\sim$, jejich součet je $[k_0/q]_\sim = [k_0]_\sim$. Podobně k $[r]_\sim = [p/q]_\sim \neq [k_0]_\sim$ (tedy $p \neq k_0$) je aditivním inverzem $[q/p]_\sim$, jejich součin je $[pq/qp]_\sim = [k_1]_\sim$.

**Úloha 5.5.11** Protože na RAC relace $\sim$ není relací ekvivalence.

**Úloha 7.1.1** Nechť $b \in L^-(M)$. Z průniku $P^-(b, 1/n) \cap M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme bod $a_n$ a dostaneme hledanou posloupnost $(a_n)$. Když $b \notin L^-(M)$, pak pro nějaké $\varepsilon$ je $P^-(b, \varepsilon) \cap M = \emptyset$ a požadovaná posloupnost neexistuje. Pro $L^+(M)$ argumentujeme podobně.

**Úloha 7.1.2** První dvě implikace plynou z toho, že jednostranné prstencové okolí je obsažené v oboustranném. Třetí implikaci dokážeme. Nechť $b$ je limitní bod množiny $M$. Existuje tedy taková posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$, že $\lim a_n = b$. Ta má takovou podposloupnost $(a_{m_n})$, že $a_{m_n} > b$ pro každé $n$ nebo $a_{m_n} < b$ pro každé $n$. Tedy $b$ je pravým nebo levým limitním bodem množiny $M$. 4. Např. 0 je limitní bod množiny $[0, 1)$, ale není jejím levým limitním bodem.

**Úloha 7.1.3** Je to například množina $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

**Úloha 7.1.4** Viz řešení úlohy 5.2.4.

**Úloha 7.1.6** 1. Zde je $a$ limitní bod množiny $M$, takže, jak víme, je její levý nebo pravý limitní bod. 2. Toto plyne z inkluze $P(a, \delta) \subset P^-(a, \delta') \cup P^+(a, \delta'')$, $\delta = \min(\{\delta', \delta''\})$. 3. Kdyby $\lim_{x \to a} f(x) = A$, stačí vzít tak malé $\varepsilon$, že $U(A, \varepsilon)$ a $U(K, \varepsilon)$, či $U(A, \varepsilon)$ a $U(L, \varepsilon)$, jsou disjunktní a dostaneme spor.

**Úloha 7.1.8** Důkaz je podobný důkazu tvrzení 5.2.9.

**Úloha 7.1.10** Důkaz je podobný důkazu věty 5.2.12.

**Úloha 7.1.12** To plyne z rovnosti obrazů $f[P^{\pm}(b, \delta)] = (f \mid I^{\pm}(b))[P(b, \delta)]$.

**Úloha 7.2.2** Právě když existuje posloupnost $(b_n) \subset M(f)$, že $\lim b_n = b$, ale $\lim f(b_n)$ neexistuje nebo se nerovná $f(b)$. Nebo, podle úlohy 7.2.9, právě když existuje posloupnost $(b_n) \subset M(f)$ s $\lim b_n = b$, která má limitu lišící se od $f(b)$.

**Úloha 7.2.3** Řešení nerovnosti $|x - b| < \delta$, resp. $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$, je právě $U(b, \delta)$, resp. $U(f(b), \varepsilon)$. Neostré nerovnosti jsou ekvivalentní, stačí trochu zmenšit $\delta$ či $\varepsilon$.

**Úloha 7.2.5** Pokud $b \in M \setminus L(M)$, existuje $\delta$, že $U(b, \delta) \cap M(f) = \{b\}$. Jediné posloupnosti v $M(f)$ limitící k $b$ pak jsou eventuálně konstantní posloupnosti $(a_n)$ s $a_n = b$ pro $n \geq n_0$. Pak ale $\lim f(a_n) = f(b)$, což souhlasí s tím, že $f$ je (triviálně nebo podle tvrzení 7.2.8) v takovém bodu $b$ vždy spojitá.

**Úloha 7.2.6** Když $b \in M$ je izolovaný, není limitní a existuje $\varepsilon$, že $M \cap P(b, \varepsilon) = \emptyset$. Pak $M \cap U(b, \varepsilon) = \{b\}$. Když $b \in M$ není izolovaný, je limitní a pro každé $\varepsilon$ je $M \cap P(b, \varepsilon) \neq \emptyset$. Tedy pro každé $\varepsilon$ je $M \cap U(b, \varepsilon) \neq \{b\}$.

**Úloha 7.2.7** To hned plyne z definice izolovaného bodu.

**Úloha 7.2.9** To plyne hned z Heineho definice spojitosti funkce v bodu a z části 3 věty 3.2.5.

**Úloha 7.2.10** Nechť $f$ je spojitá v $b \in M(f)$ a je dáno $\varepsilon$. Pak existuje $\delta$, že $f[U(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$. Tedy $f[U^-(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$ i $f[U^+(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$, protože $U^-(b, \delta)$ i $U^+(b, \delta)$ je obsažené v $U(b, \delta)$. Takže $f$ je spojitá v $b$ zleva i zprava.

Nechť $f$ je spojitá v $b \in M(f)$ zleva i zprava a je dáno $\varepsilon$. Pak existují $\delta'$ a $\delta''$, že $f[U^-(b, \delta')] \subset U(f(b), \varepsilon)$ a $f[U^+(b, \delta')] \subset U(f(b), \varepsilon)$. Položíme $\delta = \min(\{\delta', \delta''\})$. Dostaneme, že $f[U(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$, protože $U(b, \delta) \subset U^-(b, \delta') \cup U^+(b, \delta'')$. Takže $f$ je spojitá v $b$.

**Úloha 7.2.12** Každé číslo v $M$ je kladné, protože $x$ je iracionální. V $U(x, 1)$, což je interval délky 2, leží jen konečně mnoho zlomků se shora omezeným jmenovatelem, takže $M$ je konečná množina. V $U(x, 1)$ ale také leží alespoň jedno celé číslo, takže $M \neq \emptyset$.

**Úloha 7.3.2** Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$. Pro $b \in L^-(M)$ a $f$ nerostoucí na $P^-(b,\delta)$ nahradíme supremum infimem. Pro $b \in L^+(M)$ a $f$ neklesající (resp. nerostoucí) na $P^+(b,\delta)$ vezmeme infimum (resp. supremum). Pro $+\infty \in L(M)$ a $f$ nerostoucí na $U(+\infty,\delta)$ nahradíme supremum infimem. Pro $-\infty \in L(M)$ a $f$ neklesající (resp. nerostoucí) na $U(-\infty,\delta)$ vezmeme infimum (resp. supremum).

**Úloha 7.3.4** $M(f/g) = M(f) \cap M(g) \setminus Z(g)$ a existuje $\delta$, že $Z(g) \cap U(A,\delta) = \emptyset$.

**Úloha 7.3.5** Je to speciální případ třetí části věty s $f = k_1$, kdy $f/g = 1/g$.

**Úloha 7.3.8** 1. Předešlý důkaz věty se snadno upraví, pro $K < L$ existuje $\varepsilon$ a reálná čísla $a, b$, že $U(K,\varepsilon) < \{a\} < \{b\} < U(L,\varepsilon)$. 2. Opět jen obměněná implikace.

**Úloha 7.3.10** Jen se přidá jednostrannost limit. Důkazy jsou redukce pomocí tvrzení 7.1.13 na obyčejné limity.

**Úloha 7.4.3** Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ má $\lim a_n = A$ a je dáno $\varepsilon$. Podle předpokladů existuje $\delta'$, že $f[P(K,\delta')] \subset U(L,\varepsilon)$, a existuje $\delta$, že $g[P(A,\delta)] \subset U(K,\delta')$. Pak pro velké $n$ je $g(a_n) \in U(K,\delta)$. Platí-li podmínka 1, pro stejné $n$ je i $f(g(a_n)) \in U(L,\varepsilon)$ — případné hodnoty $g(a_n) = K$ funkce $f$ posílá na $f(K) = L \in U(L,\varepsilon)$. Tedy $\lim f(g)(a_n) = L$ a podle Heineho definice limity funkce se $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$. Platí-li podmínka 2, pro velké $n$ je dokonce $g(a_n) \in P(K,\delta)$. Pro stejné $n$ je i $f(g)(a_n) \in U(L,\varepsilon)$ a podle Heineho definice limity funkce zase $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$. Případ, že ani jedna podmínka neplatí jsme vyřešili pomocí Heineho definice limity funkce už v původním důkazu.

**Úloha 7.4.6** Použijeme větu 7.4.1 s vnější funkcí $1/x$, vnitřní funkcí $g$, $A = A$ a $K = B$. Teď je vzhledem ke spojitosti $1/x$ splněna první podmínka.

**Úloha 7.5.2** V [99] se (asi) $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Není těžké vidět, že $g = O(f)$ podle této definice, právě když $g = O(f+1)$ (na $\mathbb{N}_0$) podle definice 7.5.1.

**Úloha 7.5.3** 1. Ano. 2. Ne (problém u 0). 3. Ne (problém u $\pm\infty$). 4. Ano. 5. Ne (problém u 0). 6. Ano.

**Úloha 7.5.5** 1. Ano. 2. Ano. 3. Ne. 4. Ne. 5. Ano. 6. Ano.

**Úloha 7.5.6** Pro $k \in \mathbb{N}$ s $k \le x$ se počet dvojic $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ s $mn = k$ rovná $\tau(k)$.

**Úloha 7.5.7** Protože pro $n = 1$ se $n \log n = 0$.

**Úloha 8.1.2** Použijeme tvrzení 7.2.8, každý bod definičního oboru je izolovaný.

**Úloha 8.1.3** Plyne to z toho, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $\delta$ a $\varepsilon$ je $k_a[U(x,\delta)] = \{a\} \subset U(k_a(x),\varepsilon) = U(a,\varepsilon)$.

**Úloha 8.1.4** Zde pro každé $a \in \mathbb{R}$ a dané $\varepsilon$ stačí vzít $\delta = \varepsilon$, protože $x[U(a,\delta)] = U(a,\delta)$.

**Úloha 8.1.6** Nechť $N$ je hustá v $M$ & $a \in M$. Pro každé $n$ vezmeme bod $b_n$ v $N \cap U(a, 1/n)$ a dostaneme posloupnost $(b_n) \subset N$ s $\lim b_n = a$. Když $(b_n) \subset N$ má $\lim b_n = a \in M$, pak pro každé $\delta$ je $b_n \in U(a,\delta)$ pro každé velké $n$.

**Úloha 8.1.7** Ukážeme, že pro každá dvě reálná čísla $a < b$ interval $(a,b)$ obsahuje zlomek $\alpha$ i iracionální číslo $\beta$. Vezmeme $\alpha = \frac{m}{n}$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$ a tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{n} < b - a$. Podobně vezmeme $\beta = \frac{m\sqrt{2}}{n}$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{2\sqrt{2}}{n} < b - a$.

**Úloha 8.1.8** Nechť $0 \le a < b \le 1$ a $n \in \mathbb{N}$ je největší číslo, že $\frac{1}{n} \ge \frac{a+b}{2}$. Pak netriviální interval $(\max(\{a, \frac{1}{n+1}\}), \frac{a+b}{2})$ je obsažený v $(a, b)$ a je disjunktní s $N$.

**Úloha 8.2.2** Funkce $s$ je na $\mathbb{N}$, protože každé přirozené číslo je součin lichého čísla a mocniny dvou. Tato vyjádření jsou jednoznačná: když $(2k-1)2^{l-1} = (2m-1)2^{n-1}$, pak $l = n$ (jinak by 2 dělila liché číslo), tedy i $k = m$ a $s$ je prostá.

**Úloha 8.2.4** Podle úlohy 8.1.2 jsou konstanty spojité. Z $k_a = k_b$ plyne, že $a = b$.

**Úloha 8.2.5** Injekce z $\mathbb{R}$ do $\mathcal{C}(M)$ je opět dána konstantními funkcemi. Injekci z $\mathcal{C}(M)$ do $\mathbb{R}$ definujeme jako pro $M = \mathbb{R}$, pouze místo $\mathbb{Q}$ vezmeme nějakou nejvýše spočetnou množinu $N \subset M$ hustou v $M$ a obor hodnot $\mathbb{N}$ funkce $r$ a první složku $\mathbb{N}$ definičního oboru funkce $s$ případně nahradíme neprázdným konečným počátečním úsekem $\mathbb{N}$.

**Úloha 8.3.2** Nechť $a < c < b$ s $a, c \in f[I]$. Pak podle věty je i $c \in f[I]$. Tedy $f[I]$ je interval.

**Úloha 8.3.4** Stačí dokázat, že pro každé dvě spojité funkce $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ splňující $f(0) = g(1) = 0$ a $f(1) = g(0) = 1$ existuje $t \in (0,1)$, že $f(t) = g(t)$. Vezmeme spojitou funkci $h = f - g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a použijeme větu o nabývání mezihodnot.

**Úloha 8.4.2** Pro každé $x \in [0,1)$ a každé $y \in (x,1)$ platí, že $f(y) > f(x)$ a $g(y) > g(x)$.

**Úloha 8.4.4** Věta 8.4.3 $\Rightarrow$ věta 8.4.1, jak hned uvidíme, kompaktní množina je omezená a uzavřená, takže má minimum i maximum.

**Úloha 8.4.5** 1. Zřejmé z definice. 2. Nechť $A_j \subset \mathbb{R}$, $j \in J$, jsou otevřené množiny a $b$ je v $\bigcup_{j\in J} A_j =: A$. Pak existuje $j_0 \in J$, že $b \in A_{j_0}$. Tedy existuje $\delta$, že $U(b,\delta) \subset A_{j_0}$. Pak ale i $U(b,\delta) \subset A$ a $A$ je otevřená množina. 3. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou otevřené množiny a $b \in \bigcap_{j=1}^n A_j =: A$. Podle předpokladu existují čísla $\delta_j$, že $U(b,\delta_j) \subset A_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$. Pro $\delta := \min(\{\delta_1, \ldots, \delta_n\})$ je $U(b,\delta) \subset A$ a $A$ je otevřená množina. 4. To plyne pomocí de Morganova vztahu, že průnik doplňků je doplněk sjednocení. 5. Opět pomocí de Morganova vztahu.

**Úloha 8.4.9** Je to uzavřená množina, protože je průnikem uzavřených množin. Je nespočetná, protože to je množina těch bodů z $[0,1]$, jejichž rozvoj se základem 3 má cifry jenom 0 a 2. Má „délku“ 0, protože $1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \cdots = 0$.

**Úloha 8.4.11** $[a,b] \setminus P(c,\delta) = [a,b] \cap (\mathbb{R} \setminus ((c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)))$, takže jde o uzavřenou a omezenou množinu.

**Úloha 8.5.1** Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá, $c \in M$ a je dáno $\varepsilon$. Pro toto $\varepsilon$ vezmeme $\delta$ zaručené stejnoměrnou spojitostí. Pak jistě $f[U(c,\delta)] \subset U(f(c),\varepsilon)$, takže $f$ je spojitá v $c$.

**Úloha 8.5.3** Nechť $a_n := \frac{1}{n}$ a $b_n := \frac{2}{\pi(2n-1)}$. Pak $\lim(a_n - a_{n+1}) = \lim(b_n - b_{n+1}) = 0$, ale pro každé $n$ se $f(a_{n+1}) - f(a_n) = 1$ a $f(b_{n+1}) - f(b_n) = 2$.

**Úloha 8.6.2** Plyne to z aritmetiky spojitosti, z definice polynomů a racionálních funkcí a ze spojitosti konstant a identity.

**Úloha 8.6.4** V rozdílu $a_n(x+c)^n - a_n x^n$ použijeme binomickou větu, zrušíme $a_n x^n$ a vytkneme $c$. Trojúhelníková nerovnost dává, že $|a_n \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} c^{i-1} x^{n-i}|$ je nejvýše $|a_n| \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} |c|^{i-1} |x|^{n-i}$. Dále $|c|^{i-1} \le (|c|+1)^{i-1} \le (|c|+1)^i$ a znovu použijeme binomickou větu. Nerovnost $|c|^{i-1} \le |c|^i$ obecně neplatí!

**Úloha 8.6.5** Stačí dokázat, že pro každé $c > 0$ se $\lim c^n/n! = 0$. Pro velké $n$ je nezáporná posloupnost $(c^n/n!)$ klesající, takže má limitu $d \geq 0$ a existuje $m$, že $d = \inf(\{c^n/n! \mid n \geq m\})$. Nechť pro spor $d > 0$. Pak pro dostatečně velké $n \geq m$ je $d \cdot (n+1)/c > c^n/n!$. Tedy $d > c^{n+1}/(n+1)!$, což je spor, a $d = 0$.

**Úloha 8.6.10** Funkce $f$ daná jako $f(x) = x$ na $(0,1)$ a s hodnotou $f(2) = 1$ je spojitá a rostoucí, ale její inverz $f^{-1}\colon (0,1] \to (0,1) \cup \{2\}$ není spojitý v 1. Funkce $f$ s hodnotami $f(0) = 1$, $f(n) = 1 - \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ má uzavřený definiční obor $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ a je prostá a spojitá, ale její inverz $f^{-1}\colon \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \to \mathbb{N}_0$ není spojitý v 1.

**Úloha 8.6.11** $\log x$ je spojitý podle každé z částí 2–4 věty, $\arccos x$ a $\arcsin x$ podle každé z částí 1, 2 a 4 a $\arctan x$ a $\operatorname{arccot} x$ podle každé z částí 2–4.

**Úloha 10.1.2** Pomocí důsledku 7.4.4.

**Úloha 10.1.4** Je to vlastně instance tvrzení 7.1.7.

**Úloha 10.1.5** Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $b \in M \cap L^{\pm}(M)$. <u>Pak</u> platí ekvivalence, že $f'_{\pm}(b) = L \iff (f \mid I^{\pm}(b))'(b) = L$ (shodná znaménka). Je to vlastně instance tvrzení 7.1.13.

**Úloha 10.1.6** První tvrzení je zřejmé z definic. Číslo 0 je limitním bodem intervalu $(0,1)$, není ale jeho OLB.

**Úloha 10.1.8** Není, konce intervalu $[0,1]$ nejsou jeho oboustrannými limitními body.

**Úloha 10.1.11** Patrně se $\operatorname{sgn}'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1-0}{x-0} = +\infty$. Podobně $\operatorname{sgn}'_+(0) = +\infty$. Podle části 2 úlohy 10.1.4 se $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$.

**Úloha 10.1.12** Patrně se $(|x|)'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$ a podobně pro derivaci zprava.

**Úloha 10.1.14** Například funkce $\operatorname{sgn} x$ má $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$ a přitom 0 není limitním bodem jejího obrazu $\{-1, 0, 1\}$.

**Úloha 10.1.15** Plyne to z faktu, že $f$ je spojitá v $b$.

**Úloha 10.1.16** Jednostranná derivace $(\sqrt{x})'_-(0)$ není definovaná, protože 0 není levý limitní bod definičního oboru $[0, +\infty)$ odmocniny. Ostatní jednostranné derivace se rovnají obyčejným derivacím.

**Úloha 10.1.17** Pro každé $x \neq b$ se $\frac{k_c(x) - k_c(b)}{x-b} = \frac{0}{x-b} = 0$.

**Úloha 10.1.19** To přesně říká tvrzení 10.1.10.

**Úloha 10.1.21** To je právě předpoklad, že $a_n - b_n = o(b_n)$ $(n \to \infty)$.

**Úloha 10.2.2** To vyplývá z limity $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b)$.

**Úloha 10.2.3** Pro $a > 0$ tato rovnice je $y = x/2\sqrt{a} + \sqrt{a}/2$. V $a = 0$ funkce $\sqrt{x}$ není diferencovatelná.

**Úloha 10.2.4** Naopak zřejmě každá dvojice $(s,t)$ určuje jednoznačnou nesvislou přímku $y = sx + t$ a tyto dvě korespondence jsou vzájemně inverzní.

**Úloha 10.2.6** Řešení soustavy $sa + t = b$, $sa' + t = b'$ s danými $a$, $a'$, $b$, $b'$ a neznámými $s$, $t$ je jednoznačné a jeho složka $s$ má uvedené vyjádření.

**Úloha 10.2.8** Nechť přímka $\ell$ daná rovnicí $y = sx + t$ je limitní tečna ke $G_f$ v bodu $(b, f(b))$. Vezmeme libovolnou posloupnost $(b_n) \subset M(f) \setminus \{b\}$, že $b_n \to b$. Nechť je

přímka $\kappa(b_n, f(b_n), b, f(b))$ dána rovnicí $y = s_n x + t_n$. Pak $s_n \to s$, $t_n \to t$ a vždy $s_n b + t_n = f(b)$. Tedy $f(b) = s_n b + t_n \to sb + t$, $sb + t = f(b)$ a $(b, f(b)) \in \ell$.

**Úloha 10.2.12** Nechť $b$, $M$ a $f$ jsou, jak uvedeno. Podle Heineho definice limity funkce a věty 3.2.5 můžeme vzít posloupnost $(a_n)$, která limití k $b$ z jedné strany a má limitu $\lim f(a_n) \neq f(b)$. Pak už stačí vzít libovolnou posloupnost $(b_n)$, která limití k $b$ z druhé strany a pro kterou existuje $\lim f(b_n)$.

**Úloha 10.2.13** Nechť jsou $\ell_n$ a $\ell$ dány rovnicemi $y = s_n x + t_n$ a $y = sx + t$. Podle předpokladu platí, že $\lim s_n = s$ a $\lim t_n = t$. Ale $c = sb + t$ a $c_n = s_n b + t_n$, takže $\lim c_n = \lim(s_n b + t_n) = \cdots = sb + t = c$.

**Úloha 10.2.14** Nechť $d_n$ je infimum těch $\varepsilon$, že $\frac{y_n - c}{x_n - b} \in U(A, \varepsilon)$. Patrně můžeme předpokládat, že vždy $y_n \neq c$ nebo že $A = 0$. Pak není těžké induktivně definovat rostoucí posloupnost $(m_n) \subset \mathbb{N}$, že vždy $\frac{y_n - u_{m_n}}{x_n - z_{m_n}} \in U(A, d_n + \frac{1}{n})$. Tím jsme hotovi, protože $\lim d_n = 0$.

**Úloha 10.2.15** Vezmeme $b = 0$, $M = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pro $x \neq 0$, $f(b) = f(0) = 0$, $x_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ a $y_n = \frac{2}{(4n-3)\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$. Pak $f'(0) = 0$, ale sklon sečny $\kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n))$ je $\frac{y_n^2 + x_n^2}{y_n - x_n} \gg n^{-2} \cdot n^2$, tedy $\geq c > 0$ pro každé $n$.

**Úloha 10.3.2** $(\overline{\operatorname{sgn}}(x) - \sqrt{x})'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

**Úloha ??** Důkazy se provedou jako v případech násobku a součtu pomocí věty 7.3.3.

**Úloha 10.3.4** Patrně $fg = gf$.

**Úloha 10.3.5**

**Úloha 10.3.8**

**Úloha ??**

**Úloha ??** $M(f'(g)) = g^{-1}[g[M(g)] \cap D(f)]$.

**Úloha 10.4.2**

**Úloha 10.4.5**

**Úloha 18.1.1** Nechť $f$ a $P = (a_0, \ldots, a_k)$ jsou, jak je uvedeno. Když $f$ není shora omezená, pak existuje posloupnost $(b_n) \subset [a, b]$ a existuje $j \in [k]$, že $\lim f(b_n) = +\infty$ a $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro nekonečně mnoho $n$. Pak $\sup(f[[a_{j-1}, a_j]]) = +\infty$, takže $S(f, P) = +\infty$. Když $S(f, P) = +\infty$, pak existuje $j \in [k]$, že $\sup(f[[a_{j-1}, a_j]]) = +\infty$. Tedy již restrikce $f \,|\, [a_{j-1}, a_j]$ je shora neomezená. Pro neomezenost zdola a dolní součty podobně.

**Úloha 18.1.2** Nechť tedy $P = (a_0, \ldots, a_k)$ a $Q = (b_0, \ldots, b_l)$, kde $a_j = b_{i_j}$ pro $j = 0, 1, \ldots, k$ a nějaké indexy $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_k = l$. Označíme si $I_j := [a_{j-1}, a_j]$ a $J_j := [b_{j-1}, b_j]$. Pak

$$s(P,\, f) = \sum_{j=1}^{k} |I_j| \cdot \sup(f[I_j]) \;\text{ a }\; s(Q,\, f) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=i_{j-1}+1}^{i_j} |J_r| \cdot \sup(f[J_r])\ .$$

Pro každé pevné $j$ a $r = i_{j-1} + 1, \ldots, i_j$ je $\sup(f[J_r]) \leq \sup(f[I_j])$ a $\sum_{r=i_{j-1}+1}^{i_j} |J_r| = |I_j|$. Takže každá vnitřní $j$-tá suma je nejvýše rovna odpovídajícímu $j$-tému sčítanci

v první sumě (tento výpočet a odhad probíhá v $\mathbb{R}^*$) a dostáváme nerovnost $s(P,f) \geq s(Q,f)$. Podobně se dokáže nerovnost $S(P,f) \leq S(Q,f)$.

**Úloha 18.1.4.** Když $(b_{j-1}, b_j) \ni a_r$, tak pro různé indexy $j$ jsou i indexy $r$ různé.

**Úloha 18.1.6** Každé $a \in A$ je dolní mezí množiny $B$, takže $A \preceq \{\inf(B)\}$. Tedy $\inf(B)$ je horní mez množiny $A$ a $\sup(A) \preceq \inf(B)$.

**Úloha 18.1.8** Definujeme funkci $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, která má dolní i horní integrál roven $-\infty$ (podobná funkce se dá definovat i s $+\infty$). Není riemannovsky integrovatelná, protože je zdola neomezená. Stačí položit $f(x) := -1/x$ pro $x \neq 0$ a, např., $f(0) := 0$. Pak podle úlohy 18.1.1 je $s(P,f) = -\infty$ pro každé dělení $P$ intervalu $[0,1]$, protože $f$ je zdola neomezená. Dolní integrál je tedy $-\infty$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $P = (0/n, 1/n, \ldots, n/n)$ je dělení intervalu $[0,1]$ na interválky délky $1/n$. Pak pro $n \to \infty$ horní součet

$$S(P,\, f) = \sum_{j=2}^{n} (1/n)(-n/j) = -\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \to -\infty$$

a i horní integrál je tedy $-\infty$.

**Úloha 18.2.1** To je triviální z definice $\delta_c$-jemnosti.

**Úloha 18.2.3**

**Úloha 18.2.5** To plyne z definice obou integrálů a z úlohy 18.2.1.

# Literatura


[1] 0.999..., článek ve Wikipedii, https://en.wikipedia.org/wiki/0.999...

[2] Niels Henrik Abel, *O algebraických rovnicích*, Kanina, Plzeň 2011 (přeložil P. Němec, studie a komentáře M. Benediktová Větrovcová)

[3] P. Acroyd, *Newton. Stručný životopis*, Academia, Praha 2010 (přeložila I. Dvořáková)

[4] C. O. Aguilar, *An Introduction to Real Analysis*, https://www.geneseo.edu/~aguilar/public/notes/Real-Analysis-HTML/index.html

[5] M. Ajvaz. *Sny gramatik, záře písmen*, Hynek, Praha 2003

[6] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis. Second Edition*, Addison-Wesley, Reading, MA 1974

[7] V. I. Arnold, *Gjujgens i Barrou, N'juton i Guk*, Nauka, Moskva 1989

[8] V. I. Arnold, *Teorija katastrof*, Nauka, Moskva 1990

[9] C. E. Aull and R. Lowen (editors), *Handbook of the History of General Topology. History of Topology, vol 2*, Springer, Dordrecht 1998

[10] L. W. Baggett, *Analysis of Functions of a Single Variable. A Detailed Development*, 2006, 233 str., https://spot.colorado.edu/~baggett/book.pdf,

[11] J. Bair, P. Blaszczyk, R. Ely, P. Heinig and M. G. Katz, Leibniz's well-founded fictions and their interpretations, *Mat. Stud.*, **49, no. 2** (2018), 186–224 (arXiv:1812.00226)

[12] J. Bair, P. Blaszczyk, R. Ely, V. Henry, V. Kanovei, K. U. Katz, M. G. Katz, T. Kudryk, S. S. Kutateladze, T. McGaffey, T. Mormann, D. M. Schaps and D. Sherry, Cauchy, infinitesimals and ghosts of departed quantifiers, *Mat. Stud.*, **47, no. 2** (2017), 115-144 (arXiv:1712.00226)

[13] J. Bair, P. Blaszczyk, R. Ely, V. Henry, V. Kanovei, K. U. Katz, M. G. Katz, S. S. Kutateladze, T. Mcgaffey, P. Reeder, D. M. Schaps, D. Sherry and S. Shnider, Interpreting the infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler, *J. General Philos. Sci.*, **40 no. 2** (2017), 195–238 (arXiv:1712.00226)

[14] J. Bair, P. Blaszczyk, R. Ely, V. Henry, V. Kanovei, K. U. Katz, M. G. Katz, S. S. Kutateladze, T. Mcgaffey, D. M. Schaps, D. Sherry and S. Shnider, Is mathematical history written by the victors?, *Notices Amer. Math. Soc.*, **60 no. 7** (2013), 886–904 (arXiv:1306.5973)

[15] J. Bair, P. Blaszczyk, R. Ely, M. G. Katz and K. Kuhlemann, Procedures of Leibnizian infinitesimal calculus: An account in three modern frameworks, *British J. for Hist. Mathem.*, **36, no. 3** (2021), 170–209 (arXiv:2011.12628)

[16] J. Bair, P. Blaszczyk, E. F. Guillen, P. Heinig, V. Kanovei and M. G. Katz, Continuity between Cauchy and Bolzano: Issues of antecedents and priority, *British J. for Hist. Mathem.*, **35, no. 3** (2020), 207–224 (arXiv:2005.13259)

[17] J. Bair, P. Blaszczyk, P. Heinig, V. Kanovei and M. G. Katz, 19th century real analysis, forward and backward, *Antiquitates Mathematicae*, **13** (2019), 19–49 (arXiv:1907.07451)

[18] J. Bair, P. Blaszczyk, P. Heinig, V. Kanovei, M. G. Katz and T. McGaffey, Cauchy's work on integral geometry, centers of curvature, and other applications of infinitesimals, *Real Anal. Exch.*, **45, no. 1** (2020), 1–23 (arXiv:2003.00438)

[19] J. Bair, A. Borovik, V. Kanovei, M. G. Katz, S. Kutateladze, S. Sanders, D. Sherry and M. Ugaglia, Historical infinitesimalists and modern historiography of infinitesimals, arXiv:2210.14504, 2022, 43 str.

[20] B. Balcar a P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, Praha 1986

[21] M. E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover, New York 1987 (poprvé vyšlo v Pergamon Press v r. 1968)

[22] J. Bečvář (a kolektiv), *Eduard Weyr. 1852–1903*, Prometheus, Praha 1995

[23] J. Bečvář (editor), *Jan Vilém Pexider. 1874–1914*, Prometheus, Praha 1997

[24] M. Bečvářová, *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha 2008 (edice Dějiny matematiky, svazek č. 34)

[25] Bernard Bolzano, článek ve Wikipedii, `https://cs.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano`

[26] Bertrand Russel, článek ve Wikipedii, https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell

[27] *Bible. Písmo svaté Starého a Nového zákona. Český ekumenický překlad*, Česká biblická společnost, Praha 1992

[28] V. Blåsjö, *Intuitive Infinitesimal Calculus*, 2020, 126 str., https://intellectualmathematics.com/

[29] A. Blass and Yu. Gurevich, Why sets?, 179–198. In: A. Avron, N. Dershowitz and A. Rabinovich (editors), *Pillars of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, vol 4800, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008

[30] P. Błaszczyk and A. Petiurenko, Euler's Series for Sine and Kosine. An Interpretation in Nonstandard Analysis, arXiv:2304.01353v1, 34 str., 2022

[31] R. Blaško, *Matematická Analýza I*, 2016, 427 str., https://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/ma-1.pdf

[32] I. Blatný, *Jde pražské dítě domů z bia ...*, Druhé město, Brno 2017

[33] H. Blumberg, New properties of all real functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **3** (1922), 113–128

[34] B. Bolzano, *Exhorty*, Nakladatelství Lidové noviny, Praha 2006 (uspořádání, překlad a komentář J. Loužil)

[35] B. Bolzano, *Paradoxy nekonečna*, 102 str., https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400244/Bolzano_23-1963-1_6.pdf (přeložil O. Zich)

[36] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réele. Théorie élémentaire*, Hermannn & C$^{ie}$, Paris 1958 (kapitoly 1–3) a 1951 (kapitoly 4–7)

[37] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968

[38] J. C. Bradford and C. Goffman, Metric spaces in which Blumberg's theorem holds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 667–670

[39] T. J. I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, MacMillan and Co., London 1908

[40] L. Bukovský, P. Hájek, T. Pažák a P. Simon, Bohuslav Balcar, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **58, č. 1** (2008), 66–70.

[41] N. Burbaki, *Funkcii dějstvitel'nogo peremennogo. Elementarnaja teorija*, Nauka, Moskva 1965 (z [36] přeložila E. I. Stěčkinová)

[42] R. B. Burckel, Fubinito (Immediately) Implies FTA, *Amer. Math. Monthly* **113** (2006), 344–347

[43] A. Burdman Feferman and S. Feferman, *Alfred Tarski. Life and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 2004

[44] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover, New York 1993 (první vydání v l. 1928–1929)

[45] Collatz conjecture, článek ve Wikipedii, `https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture`

[46] J. H. Conway and R. G. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York 1996

[47] R. P. Crease, *The Great Equations*, Robinson, London 2009

[48] K. Čapek, *Kniha apokryfů*, Československý spisovatel, Praha 1963

[49] R. Černý a M. Pokorný, *Základy matematické analýzy pro studenty fyziky 1*, MatfyzPress, Praha 2020

[50] I. Černý and M. Rokyta, *Differential and Integral Calculus of One Real Variable*, Karolinum - Nakladatelství Univerzity Karlovy, Praha 1998

[51] L. Čumba, *Wittgensteinova kniha faktů*, Argo, Praha 2016

[52] V. L. Danilov (a kol.), *Přehled matematické analýzy I*, SNTL, Praha 1968 (přeložil Z. Renc)

[53] J. W. Dawson, Jr., *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997

[54] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg und Sohn, Braunschweig 1872

[55] V. Dlab a J. Bečvář, *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, České vysoké učení technické, Praha 2022 (druhé vydání)

[56] Z. Došlá a J. Kuben, *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Masarykova univerzita, Brno 2004, 216 str., `https://www.math.muni.cz/~dosla/download/skript.pdf`

[57] J. Dukaj, *Led*, Host, Brno 2021 (z polštiny přeložili M. Benešová a M. Alexa)

[58] Eduard Weyr, článek v anglické mutaci Wikipedie, `https://en.wikipedia.org/wiki/Eduard_Weyr`

[59] Eduard Weyr, článek v české mutaci Wikipedie, `https://cs.wikipedia.org/wiki/Eduard_Weyr`

[60] Eduard Weyr, článek v německé mutaci Wikipedie, `https://de.wikipedia.org/wiki/Eduard_Weyr`

[61] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York 1979

[62] R. Engelking, Kazimierz Kuratowski (1896–1980) his life and work in topology, in: [9], 431–452

[63] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover Publications, Inc., U.S.A. 1956

[64] Euler's constant, článek ve Wikipedii, `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_constant`

[65] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski and T. Ward, *Recurrence Sequences*, AMS, Providence, RI, 2003

[66] L. Fehér, G. Kós and A. Tóth, *Mathematical Analysis — Problems and Exercises II*, Eötvös Loránd University, Faculty of Science 2014–19, 211 str., `http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/4b_FeherKosToth_MathAnExII.pdf`

[67] E. A. Fellmann, *Leonhard Euler*, Rowohlt, Reinbeck bei Hamburg 1995

[68] R. Finster und G. van den Heuvel, *Gottfried Wilhelm Leibniz*, Rowohlt, Reinbeck bei Hamburg 1990

[69] P. Glombíček (editor), *Soukromý jazyk, pravidla a Wittgenstein*, Filosofia, Praha 2006

[70] D. L. Goodstein and J. R. Goodstein, *Feynman's Lost Lecture. The Motion of Planets Around the Sun*, Vintage, London 1997

[71] R. Gray, Georg Cantor and transcendental numbers, *Amer. Math. Mothly* **101** (1994), 819–832

[72] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer, New York 2008

[73] V. Hájková, O. John, O. F. K. Kalenda a M. Zelený, *Matematika*, matfyzpress, Praha 2006

[74] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1960

[75] G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge: At the University Press, Cambridge 1908

[76] G. H. Hardy, The ordinal relations of the terms of a convergent sequence, *Proc. London Math. Soc. (2)* **8** (1910), 295–300.

[77] G. H. Hardy, *Ramanujan. Twelve Lectures on Subjects Suggested by his Life and Work*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI 2002 (poprvé vyšlo v Cambridge v r. 1940)

[78] G. H. Hardy, *Divergent Series*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI 1991 (reprint, poprvé vyšlo v Oxfordu v r. 1949)

[79] G. H. Hardy, *Obrana matematikova*, Prostor, Praha 1998 (přeložil J. Moník)

[80] G. H. Hardy, *An Annotated Mathematician's Apology* (anotoval a komentoval Alan J. Cain), 2020, `http://www-groups.mcs.st-andrews.ac.uk/~alanc/pub/hardy_annotated/index.html`

[81] Henry Blumberg, Ph.D., `https://www.geni.com/people/Henry-Blumberg-Ph-D/6000000012861839786`

[82] J. K. Hunter, *An Introduction to Real Analysis*, 2014, 305 str., `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/intro_analysis_pdf/intro_analysis.pdf`

[83] J. E. Hutchinson, *Introduction To Mathematical Analysis*, 1994, 284 str., `https://maths-people.anu.edu.au/~john/Assets/Analysis%201.pdf` (revised by Richard J. Loy 1995/6/7)

[84] *Indiana Jones and the Dial of Destiny (Indiana Jones a nástroj osudu)*, film, režie: James Mangold, 2023

[85] Inženýrská, `https://www.youtube.com/watch?v=A2OnJm1koys`

[86] V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974 (šesté vydání)

[87] V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1984 (šesté vydání)

[88] T. Jech, *Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*, Springer, Berlin, 2003.

[89] V. Jelínek a T. Klimošová, *Poznámky k přednáškám z Matematické analýzy 1*, LS 2019/20, 77 str., `https://iuuk.mff.cuni.cz/~jelinek/1920/kompletni-poznamky_MA1.pdf`

[90] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer, Berlin 2005

[91] R. Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*, C. Scribner's, New York 1991

[92] M. Klazar, Non-holonomicity of the sequence $\log 1, \log 2, \log 3, \ldots$, arXiv:math/0502141v1, 2005, 3 str.

[93] M. Klazar, Analytic and Combinatorial Number Theory II, KAMDIMATIA Series preprint no. 969 (2010), iv + 46 str.

[94] M. Klazar, Real analysis without uncountable sets, arXiv:2301.08142, ....

[95] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin 1996 (6. vydání, poprvé vyšlo v r. 1922)

[96] V. Kolman a V. Punčochář, *formy jazyka. úvod do logiky a její filozofie*, Filosofia, Praha 2015

[97] J. Kopáček, *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*, MATFYZPRESS, Praha 2004

[98] T. W. Körner, On the Fundamental Theorem of Algebra, *Amer. Math. Monthly*, **113** (2006), 347–348

[99] J. Krajíček, *Proof Complexity*, Cambridge University Press, Cambridge 2019

[100] I. Kraus, *Fyzika. Encyklopedie velkých objevů a osobností*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2020

[101] I. Kriz and A. Pultr, *Introduction to Mathematical Analysis*, Springer Basel, Basel 2013

[102] V. Krupková a P. Fuchs, *Matematická Analýza pro* FIT, VUT Brno, 363 str., `https://www.umat.fekt.vut.cz/~hlinena/IMA1/Prednasky/skripta.pdf`

[103] K. Kuratowski, *A Half Century of Polish Mathematics: Remembrances and Reflections*, Pergamon Press, Oxford 1980

[104] M. Laczkovich, The growth of elementary functions, *Acta Math. Hungar.* **127** (2010), 320–346

[105] M. Laczkovich and I. Ruzsa, Elementary and integral-elementary functions, *Illinois J. Math.* **44** (2000), 161–182

[106] B. Lafferriere, G. Lafferriere and N. Mau Nam, *Introduction to Mathematical Analysis I. Second Edition*, Portland State University Library 2018, 166 str., `https://pdxscholar.library.pdx.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1015&context=pdxopen`

[107] J. C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, AMS, Providence, RI 2010

[108] L. Larson, *Introduction to Real Analysis*, University of Louisville 2022, 239 str., `http://www.math.louisville.edu/~lee/RealAnalysis/IntroRealAnal.pdf`

[109] Lionel Penrose, článek ve Wikipedii, `https://en.wikipedia.org/wiki/Lionel_Penrose`

[110] I. I. Ljaško, V. F. Emel'janov a A. K. Bojarčuk, *Osnovy klassičeskogo i sovremennogo matematičeskogo analiza*, Vyšča škola. Golovnoe izdatel'stvo, Kiev 1988

[111] L. A. Ljusternik (a kol.), *Přehled matematické analýzy II*, SNTL, Praha 1969 (přeložil D. Valášek)

[112] J. Lukeš and J. Malý, *Measure and integral*, matfyzpress, Praha 2013

[113] J. E. Littlewood, Mathematical Notes (14): "Every polynomial has a root", *J. London Math. Soc. (Ser. 1)* **16** (1941), 95–98

[114] J. Lützen, *Joseph Liouville 1809–1882: Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin 1990

[115] *The Man Who Knew Infinity (Muž, který poznal nekonečno)*, film, režie: Matt Brown, 2015

[116] S. Marcus, *Matematická analýza čtená po druhé*, Academia, Praha 1976 (z rumunského originálu vyšlého v r. 1967 přeložil Bohdan Zelinka)

[117] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova, *Jacques Hadamard. A Universal Mathematician*, AMS and LMS, Providence, RI 1998

[118] C. McCarthy, *Všichni krásní koně*, Argo, Praha 2022 (přeložil Tomáš Hrách)

[119] M. McKinzie and C. Tuck, Higher Trigonometry, Hyperreal Numbers, and Euler's Analysis of Infinities, *Mathem. Mag.*, **74** (2001), 339–368

[120] M. Mignotte, T. N. Shorey and R. Tijdeman, The distance between terms of an algebraic recurrence sequence, *J. Reine Angew. Math.*, **349** (1984), 63–76

[121] R. Monk, *Wittgenstein. Uděl génia*, Hynek, Praha 1996 (anglicky vyšlo v r. 1990, přeložil O. Vochoč)

[122] J. Mrázek, *Taje matematiky*, Práce, Praha 1986

[123] R. Netz a W. Noel, *Archimedův kodex*, Deus, Praha 2008 (anglicky vyšlo o rok dříve, přeložila Tereza Senjuková)

[124] I. Newton, *Matematické principy přírodní filozofie (výbor z díla). Dopisy Isaaca Newtona Richardu Bentleymu*, Togga a Masarykova Univerzita, Praha - Brno 2020 (z latiny přeložil J. Franek, z angličiny přeložili H. Durnová, J. Novotný a J. Svobodová, odborná spolupráce a komentáře: J. Novotný, J. Svobodová a D. Špelda)

[125] D. Normann and S. Sanders, On the uncountability of $\mathbb{R}$, *J. Symb. Logic* **87** (2022), 1474–1521

[126] O. R. B. de Oliveira, The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations, *Amer. Math. Monthly*, **119** (2012), 753–758

[127] O. Ore, *Niels Henrik Abel. Mathematician Extraordinary*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI 2008 (reprint, poprvé vyšlo v Minnesotě v r. 1957)

[128] O. Ore, *Zamečatel'nyj matematik Nil's Chenrik Abel'*, Gos. Izd. Fiz.-mat. Lit., Moskva 1961 (perevod s anglijskogo Ju. S. Rodman, pod redakciej A. M. Jagloma)

[129] Ch. H. Papadimitriu, *Computational Complexity*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusets 1994

[130] E. Pelantová a J. Vondráčková, *Matematická analýza I*, katedra matematiky FJFI ČVUT Praha 2004, 125 str., `https://people.fjfi.cvut.cz/pelanedi/Analyza_soubory/maa1.pdf`

[131] R. Penrose, *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London 2004

[132] R. Penrose, *Cycles of Time. An Extraordinary New View of the Universe*, Vintage Books, London 2011

[133] Petr Štěpánek (matematik), článek ve Wikipedii, `https://cs.wikipedia.org/wiki/Petr_%C5%A0t%C4%9Bp%C3%A1nek_(matematik)`

[134] J. Peregrin a M. Vlasáková, *Filosofie logiky*, Filosofia, Praha 2017

[135] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený, *Matematická analýza 1 (velmi předběžná verze)*, 2020, 909 str., `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`

[136] S. Ponnusamy, *Foundations of Mathematical Analysis*, Birkhäuser, Springer, New York 2012

[137] P. Pudlák, *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity. A Gentle Introduction*, Springer, Cham 2013

[138] A. Pultr, *Matematická analýza [I]*, matfyzpress, Praha 1995

[139] V. Punčochář, *Paradoxy klasické logiky*, Filosofia, Praha 2019

[140] † RNDr. Bohuslav Balcar, DrSc., `http://www.math.cas.cz/documents/parte_Balcar.pdf`

[141] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1966

[142] M. Rosenlicht, Integration in finite terms, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 963–972

[143] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis. Third Edition*, McGraw-Hill, New York 1976

[144] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha 2003 (vyšlo anglicky v McGraw-Hill v letech 1966, 1974 a 1987, přeložili I. Netuka a J. Veselý)

[145] W. Rudin, *Functional Analysis. 2nd Edition*, McGraw-Hill, New York 1991

[146] B. Russel, *Mystika a logika a jiné eseje*, Academia, Praha 2015 (přeložil A. Otáhal)

[147] B. Sedlák a I. Štoll, *Elektřina a magnetismus*, Univerzita Karlova v Praze. Nakladatelství Karolinum, Praha 2012

[148] M. Sha, Effective results on the Skolem problem for linear recurrence sequences, *J. Number Theory*, **197** (2019), 228–249 (arXiv:1505.07147v6)

[149] R. Schindler, *Set Theory*, Springer, Cham 2014

[150] Skolem problem, článek ve Wikipwdii, `https://en.wikipedia.org/wiki/Skolem_problem`

[151] A. Sochor, *metamatematika teorií množin*, Univerzita Karlova v Praze. Nakladatelství Karolinum, Praha 2005

[152] J. Stillwell, *Mathematics and Its History. Third Edition*, Springer, New York 2010

[153] J. Stillwell, *The Real Numbers. An Introduction to Set Theory and Analysis*, Springer, Cham 2013

[154] J. Stubbe, *Analysis I for Engineers*, 2015, 142 str., `https://www.epfl.ch/labs/mcss/wp-content/uploads/2018/05/StubbeEnglish.pdf`

[155] L. Susskind and G. Hrabovsky, *Classical Mechanics. The Theoretical Minimum*, Penguin, London 2014

[156] E. Szemerédi, On sets of integers containing no $k$ elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* **27** (1975), 199–245

[157] T. Šalát (vedúci autorského kolektívu), *Malá encyklopédia matematiky*, Obzor, Bratislava 1981

[158] A. Šolcová, Šedesátiny profesora Petra Štěpánka, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **48, č. 1** (2003), 77.

[159] D. Špelda, *Proměny historiografie vědy*, Filosofia, Praha 2009

[160] T. Tao, *Analysis I*, Hindustan Book Agency, New Delhi 2006

[161] T. Tao, Szemerédi's proof of Szemerédi's theorem, *Acta Mathematica Hungarica* **161** (2020), 443–487

[162] T. Tao, Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values, arXiv:1909.03562v5, 2022, 58 str.

[163] A. Tarski, The concept of truth in formalized languages, v: [164], 152–278

[164] A. Tarski, *Logic, Semantic, Metamathematic*, Hackett Publishing Company 1983 (2. vydání).

[165] A. Tarski, Truth and Proof, *Scientific American*, June 1969, 63–77

[166] M. E. Taylor, *Introduction to Analysis in One Variable*, 2017, 288 str., `https://mtaylor.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/16915/2018/04/anal1v.pd`

[167] L.-P. Teo, *Mathematical Analysis Volume I*, arXiv:2307.05607v1, 572 str., 2023

[168] B. S. Thomson, J. B. Bruckner and A. M. Bruckner, *Elementary Real Analysis. Second Edition*, 2008, 683 str., `http://classicalrealanalysis.info/com/`

[169] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time. A New Look at Old Themes*, AMS, Providence, RI 2006

[170] B. L. van der Varden, *Algebra*, Nauka, Moskva 1976 ([178, 179] z němčiny přeložil A. A. Běl'skij, překlad zredigoval Ju. I. Merzljakov)

[171] N. K. Vereshchagin, Occurrence of zero in a linear recursive sequence, *Math. Notes*, **38** (1985), 609–615

[172] J. Veselý, *Základy Matematické analýzy. První díl*, matfyzpress, Praha 2019

[173] J. Veselý, *Základy Matematické analýzy. Druhý díl*, matfyzpress, Praha 2009

[174] P. Vopěnka, *Calculus infinitesimalis. Pars prima*, OPS, Kanina 2010

[175] P. Vopěnka, *Calculus infinitesimalis. Pars secunda*, OPS, Kanina 2011

[176] P. Vopěnka, *New Infinitary Mathematics*, Charles University. Carolinum Press, Praha 2022 (editovala A. Vencovská, přeložili H. Moravcová, R. A. Letham, A. Vencovská a V. Paris)

[177] R. Výborný, A simple proof of the Fundamental Theorem of Algebra, *Mathematica Bohemica* **135** (2010), 57–61

[178] B. L. van der Waerden, *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin 1971 (osmé vydání)

[179] B. L. van der Waerden, *Algebra II*, Springer-Verlag, Berlin 1967 (páté vydání)

[180] Walter Rudin, článek ve Wikipedii, `https://en.wikipedia.org/wiki/Walter_Rudin`

[181] Walter Rudin House, článek ve Wikipedii, `https://en.wikipedia.org/wiki/Walter_Rudin_House`

[182] H. Wang, The formalization of mathematics, *J. Symb. Logic* **19** (1954), 242–266

[183] N. Weaver, Is set theory indispensable?, arXiv:0905.1680v1, 21 str., 2009

[184] N. Weaver, The concept of a set, arXiv:0905.1677v1, 11 str., 2009

[185] N. Weaver, *Truth & Assertibility*, World Scientific, New Jersey 2015

[186] N. Weaver, The liar paradox is a real problem, *Ann. of the Japan Assoc. for Phil. of Sci.* **25** (2017), 89–100

[187] E. Weyr, *Počet differenciálný*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha 1902

[188] F. Weyr, *Paměti. 1, Za Rakouska (1879–1918)*, Atlantis, Brno 1999

[189] F. Weyr, *Paměti. 2, Za republiky (1918–1938)*, Atlantis, Brno 2001

[190] F. Weyr, *Paměti. 3, Za okupace a po ní (1939–1951)*, Atlantis, Brno 2004

[191] A. Wigderson, *Mathematics and Computation. A Theory Revolutionizing Technology and Science*, Princeton University Press, Princeton, NJ 2019

[192] K. S. Williams, *Number Theory in the Spirit of Liouville*, Cambridge University Press, Cambridge 2011

[193] L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus. Logisch-philosophische Abhandlung*, Kegan Paul, London 1922

[194] L. Wittgenstein, *Filosofická zkoumání*, Filosofia, Praha 1993 (přeložil J. Pechar)

[195] L. Wittgenstein, *O jistotě*, Academia, Praha 2010 (přeložil V. Zátka)

[196] L. Wittgenstein, *Filosofické poznámky*, Filosofia, Praha 2015 (přeložil O. Beran)

[197] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, OIKOYMENH, Praha 2017 (přeložil P. Glombíček)

[198] L. Wittgenstein, *Rozličné poznámky*, OIKOYMENH, Praha 2020 (přeložil M. Nekula)

[199] D. Wootton, *The Invention of Science. A New History of the Scientific Revolution*, Allen Lane 2015

[200] P. Zamarovský, *Mýtus nekonečno*, Univerzita Karlova. Nakladatelství Karolinum, Praha 2019

[201] O. Zich, *Poznámky*, 37 str., `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400247/Bolzano_23-1963-1_7.pdf`

[202] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer, Berlin 2004

[203] R. Zwi, *Last Walk in Naryshkin Park*, Spinifex, North Melbourne, Australia 1997

[204] Žagarė, článek ve Wikipedii, `https://en.wikipedia.org/wiki/%C5%BDagar%C4%97`

# Rejstřík

Čísla stran ve *skloněném fontu* odkazují na výskyt definice pojmu, na důležitou pasáž, na medailon osoby a na větu s důkazem.


abeceda TEMNA, *251*
Abel, Niels H., *256*
Ajvaz, Michal, 248
AK řada, *73*
    konečná, *73*
    podřada, *73*
    součet, *73*
algebraické číslo ($\overline{\mathbb{Q}}$), *42*
    stupeň, *43*
Archimédés ze Syrakus, 13, *256*
aritmetická posloupnost, *64*
aritmetika reálných čísel
    jednička, *15*
    násobení, *15*
    nula, *15*
    sčítání, *15*
    uspořádání, *15*
arkus kosinus, *89*
arkus kotangens, *89*
arkus sinus, *89*
arkus tangens, *89*
axiom
    extenzionality, *5*
    fundovanosti, 32, 267
    indukce, *13*
    nekonečna, 28

Balcar, Bohuslav, *257*
Binomická věta, *58*
Bolzano, Bernard, 40, 62, *258*
Borges, Luis J., 248

$\mathbb{C}$, *viz* komplexní čísla 33
Cantor, Georg, 14, 258, *258*
Cantorovo diskontinuum, *134*
Cauchy, Augustin-Louis, 14, 62, *258*
celá část čísla
    dolní, *56*
    horní, *56*
celé číslo, 11
celé číslo ($\mathbb{Z}$), *30*
    násobení, *30*
    uspořádání, *30*
Cousinovo lemma, *235*
číslo $\pi$, *88*
číslo $\pi$, *113*

$\mathcal{D}(a,b)$, všechna dělení intervalu, *233*
Dedekind, Richard, 14
dělení intervalu
    $\delta_c$-jemné, *235*
derivace funkce
    $D(f)$, *154*
    diferencovatelnost, *151*
    jako funkce, *154*
    v bodu, *151*
        zleva, *151*
        zprava, *151*
diferenciální pole, *222*
Dirichlet, Peter, *259*
disjunkce, *2*
dobré uzávorkování, *48*
dolní integrál, *233*
dolní součet, *232*

ekvivalence, *2*
Elementární funkce, EF, *89*, *91*, 89–91
Eulerova konstanta ($\gamma$), *79*
Eulerovo číslo, $\mathrm{e} = 2.71\ldots$, 86
exp a log (v difer. poli), *223*
exponenciála, $\exp x$, *85*
extremální kombinatorika, 63

Fekete, Michael, 63
formální rozdíl ( **r** ), *29*
funkce, *7*
    neklesající, *121*
    nerostoucí, *121*
    argument, *7*
    bod maxima, *132*
    bod minima, *132*
    $\mathcal{C}$, *129*
    $\mathcal{C}(M)$, *129*
    definiční obor, *7*
    $\mathcal{F}(M)$, *83*
    hodnota, *7*
    identická, *8*
    inverzní, *8*
    klesající, *132*
    konstantní, *8*
    $M(f)$, *7*
    monotónní, *121*
    na (surjekce), *8*
    obor hodnot, *7*
    obraz množiny, *7*
    operace, *7*
    posloupnost, *7*
    prostá (injekce), *8*
    $\mathcal{R}$, *83*
        identická, *90*
        podíl, *89*
        rozdíl, *89*
        složenina, *89*
        součet, *89*
        součin, *89*
    rostoucí, *132*
    rozšíření, *9*
    shodnost, *7*
    slovo, *7*
    složená, *8*
    spojitá na množině, *129*
    $\mathcal{UC}$, *135*
    $\mathcal{UC}(M)$, *135*
    unární operace, *7*
    vnější, *8*
    vnitřní, *8*
    vzor množiny, *7*
    $Z(f)$, *83*
    zúžení (restrikce), *9*
funkce komplexní
    spojitá, *37*

Gelfond, Alexandr O., 46, *259*
Genocchi, Angelo, 265
geometrický kosinus a sinus, *111*
graf funkce, $G_f$, *154*
    sečna, *155*
Gray, R., 42
Grothendieck, Alexander, 29, *259*
Grothendieckova grupa, *29*

Hardy, Godfrey H., 61, 105, 106, *260*
    věta o limitě a uspořádání, 106
harmonické číslo $(h_n)$, *79*
Henstock, Ralph, 235
Hermite, Charles, 45, *260*
Hilbert, David, 45, *261*
horní integrál, *233*
horní součet, *232*
hraniční bod množiny, *143*
hromadný bod posloupnosti, *71*

implikace, *2*
infimum množiny, *11*
integrál
    Henstock–Kurzweilův, *236*
interval, *55*
    $I(a, b)$, *70*
    netriviální, *70*
    otevřený, *134*
Irons, Jeremy, 260
izolovaný bod množiny, *120*

jednotková kružnice, *88*
jednotková kružnice v $\mathbb{C}$, *40*

kalibr (na intervalu), *235*
kanonický tvar (kompl. polynomu), *36*
kartézský součin množin, *6*
kompaktnost, *132*
komplexní čísla, *33–41*
    $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *34*
    $R + iR$, *34*
    komplexní sdružení, *36*
    norma, *36*
        $\Delta$-ová nerovnost, *36*
komplexní polynom ($\mathbb{C}[z]$), *35*
konjunkce, *2*
konstanta (difer. pole), *223*
konstantní polynom (komplexní), *35*
konstanty, $k_c(x)$, *85*
konvexní množina v $\mathbb{R}$, *70*
kořen (kompl. polynomu), *35*

kosinus, *88*
kosinus a sinus, *111–115*
kotangens, *88*
koule v $\mathbb{C}$, *39*
Kuratowski, Kazimierz, 5
Kurzweil, Jaroslav, 235
kvantifikátor
    existenční, *3*
    obecný, *3*

Leibnizův vzorec, *158*
liminf a limsup, *71*
limita funkce, *83*
    a uspořádání, *123*
    aritmetika, *122*
    inverzní, *141*
    jednostranná, *118*
    jednoznačnost, *84*
    monotónní, *122*
    složené, *124–125*
    zesílení (V-limita), *141*
limita komplexní posloupnosti, *37*
limita posloupnosti, *56*
    aritmetika, *65–67*
    $\sqrt[n]{n} \to 1$, *59*
    netriviální, 58
    nevlastní, *56*
    rekurentní, *68–105*
    $\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \to -\infty$, *57*
    triviální, 58
    uspořádání, *69*
    vlastní, *56*
limitní bod, *83*
    levý, *117*
    $L(M)$, *83*
    $L^{\pm}(M)$, *118*
    $L^{-}(M)$, *118*
    $L^{+}(M)$, *118*
    OLB, *118*
    pravý, *117*
lineární uspořádání, *10*
Liouville, Joseph, 43, *261–262*
logaritmus, *86*
LRP (lineárně rekurentní posloupnost), *97*

Matoušek, Jiří, iv
Maurer, Cecilie, 258
maximum funkce
    globální, *133*
    lokální, *133*
    ostré, *133*
maximum množiny, *10*
Mezinárodní kongres matematiků, 46
minimum funkce
    globální, *133*
    lokální, *133*
    ostré, *133*
minimum množiny, *10*
množina
    bezděrová, *144*
    dědičně konečná, *4*
    dědičně nejvýše spočetná, *32*
    hraniční bod, *143*
    hustá, *129*
    induktivní, 28
    kompaktní, *132*
    konečná, *19*
    nejvýše spočetná, *20*
    nekonečná, *19*
    nespočetná, *20*
    omezená, *134*
    otevřená, *133*
    počet prvků, *5*
    prázdná, *3*
    prvek ($\in$, $\notin$), *3*
    rozklad, *9*
        blok, *9*
    řídká, *129*
    spočetná, *20*
    uzavřená, *133*
    výčet prvků, *3*
    zápis vlastností, *4*
množina generovaná posloupností, *33*
množina v $\mathbb{C}$
    kompaktní, *37*
    nesouvislá, *39*
    otevřená, *39*
    souvislá, *40*
    trhání množiny, *40*
monoid, *29*
Moník, Josef, 260, 290
MRLRP, *99*

NC rozklad, *48*
negace, *2*
nekonečno ($\pm\infty$), *52*
nekonstantní polynom (komplexní), *35*
nesoudělnost, *12*

nespojitost funkce v bodu, *119*
nesvislé přímky, $\mathcal{N}$, *154*
  $\kappa(A, A')$, *155*
  limita, *155*
  parametrizace pomocí $\mathbb{R}^2$, *155*
  sklon, *154*
neurčitý výraz, *52*
Newton, Isaac, *262*
nezávislá znaménka, *52*
norma v $\mathbb{C}$, *36*
NPELE, *152*
$n$-tá odmocnina
  v $\mathbb{C}$, 40–41
nulový polynom (komplexní), *35*

oblouk, *112*
  dělení, *113*
    délka, *113*
  délka, *113*
  konce, *112*
  řádný, *112*
obor integrity, *92*
obor výrokové formy, *3*
okolí
  bodu, *55*
  levé, *117*
  levé prstencové, *117*
  nekonečna, *55*
  pravé, *117*
  pravé prstencové, *117*
  prstencové, *83*
  vlastnosti, 55
okruh, *12*
omezenost množiny
  dolní mez, *10*
  horní mez, *10*
  shora, *10*
  zdola, *10*
operace s množinami
  potence, *5*
  průnik, *5*
  průnik dvou, *5*
  rozdíl, *5*
  sjednocení, *5*
  suma, *5*
Opravdu základní elementární funkce, OZEF, *90*
Ore, Øystein, 256
Oresme, Mikuláš, *262*
OSRJN, *54*

paradox
  nekonečné tabulky, *2*
  nekonečných součtů, *1*
  Russelův, *5*
Patel, Dev, 260
Pexider, Jan V., 265, 286
počet dělitelů, $\tau(n)$, *127*
podposloupnost, *57*
  $\exists$ monot., *61*
  slabá, *58*
  zachovává limity, *57*
pole, *220*
  algebraický uzávěr, *222*
  algebraicky uzavřené, *222*
  charakteristika, *221*
  izomorfismus, 220
  podpole, *221*
  rozšíření, *221*
    algebraický prvek, *221*
    jednoduché algebraické, *221*
    transcendentní prvek, *221*
polynom nad polem, 221
  minimální, *221*
  monický, *221*
  nenulový, *221*
  nulový, *221*
polynomy, POL, *91*
  kanonický tvar, *92*
  nulový polynom, *92*
  stupeň, *92*
Pompeius, Bernard, 258
posloupnost
  Cauchyova
    reálná, *62*
    zlomků, *14*
  diverguje, *56*
  eventuálně konstantní, *56*
  geometrická, *68*
  hromadný bod, *71*
  klesající, *59*
  konverguje, *56*
  kvazimonotónní, *60*
  kvazineklesající, *60*
  kvazinerostoucí, *60*
  liminf a limsup, *71*
  monotónní, *59*
  neklesající, *59*
  nerostoucí, *59*
  omezená, *59*
  podposloupnost, *57*

rekurentní, *96*
MRLRP, *99*
rostoucí, *59*
ryze monotónní, *59*
shora neomezená, *59*
shora omezená, *59*
subaditivní, *63*
superaditivní, *63*
tříúrovňová, *106*
zdola neomezená, *59*
zdola omezená, *59*
posloupnost iterací funkce, *96*
posloupnost v $\mathbb{C}$
konvergentní, *37*
posloupnostní graf, *105*
prázdné slovo, *7*
(dosud nevyřešený) problém
Skolemův, *97*
$3x + 1$, *96*
problém dělitelů, *127*
protozlomek, *11*
základní tvar, *12*
Prvočíselná věta, *127*
přirozené číslo, *28*

racionální číslo (zlomek), *11*
racionální funkce, RAC, *92*
Ramanujan, Srinivasa, 260
reálná mocnina, $a^b$
algebraicky, *87*
analyticky, *86*
exponent, *86*
základ, *86*
reálné číslo (Cantorovo), *15*
desetinný rozvoj, *21*
sdružené rozvoje, *22*
devítkový rozvoj, *21*
následník, *22*
racionální, *18*
reálné číslo (Dedekindovo), *33*
součet, *33*
součin, *33*
„red herring“, 145
rekurentní posloupnost, *96*
(binární) relace, *6*
ekvivalence, *9*
blok, *9*
funkcionální, *6*
ireflexivní, *9*
izolovaný prvek, *142*
jednoznačný prvek, *142*
na množině, *6*
reflexivní, *9*
symetrická, *9*
tranzitivní, *9*
trichotomická, *10*
relace shodnosti
na $C$, *14*
na $M \times M$, *29*
na $\mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\}$, *93*
na $Z$, *11*
Riemannova funkce, *121*
rozšířená reálná osa ($\mathbb{R}^*$), *52*
aritmetika, *52*
odečítání, *52*
Rudin, Walter, *262–263*
Russel, Bertrand, 5, *263*
řada, *77*
abskon, *81*
částečný součet, *78*
diverguje, *78*
geometrická, *81*
kvocient, *81*
harmonická, *78*
konverguje, *78*
NPK, *78*
přerovnání, *78*
sčítance, *77*
součet, *77*
zeta, $\zeta(s)$, *82*
řecká abeceda, *2*
řez (na $\mathbb{Q}$), *33*

sečna, *155*
Serret, Joseph, 265
shodná znaménka, *52*
shodnost, *7*
shodnost funkcí, *7*
Schneider, Theodor, 46, *263*
sinus, *88*
sklon, *154*
Skolem, Thoralf, 97, *263*
slabá podposloupnost, *58*
Snow, Charles P., 260
spojitost funkce
na množině, *129*
stejnoměrná, *135*
v bodu, *119*
Heineho definice, *120*
zleva, *121*

zprava, *121*
stejnoměrná spojitost, *135*
stupeň algebr. prvku, *221*
supremum množiny, *11*
SUSP, *152*
symbol, *249*
symbol nekonečna $\infty$, *55*
Szemerédi, Endre, 64
šipkový graf, *249*
šipkový svět, *249*
Štěpánek, Petr, *263–264*

tangens, *88*
Tannery, Paul, 265
Tarski, Alfred, 87, *264*
tautologie, *2*
tečna
limitní, *155*
standardní, *151*, *154*
těleso, *12*
racionálních funkcí, *94*
normované, $\mathbb{C}$, *36*
uspořádané, *13*
archimedovské, *13*
Tlön, *248*
transcendentní číslo, *42*
trojúhelníková nerovnost, *52*
nekonečná, 81
obměna, *66*
tříúrovňová posloupnost, *106*

úplnost lineárního uspořádání, *13*
úsečka, *113*
sklon, *114*
uspořádaná dvojice množin, *5*
uspořádaná $k$-tice množin, *6*
uspořádaná trojice množin, *6*

V-limita funkce, *141*
věta
o běžkyni, 88
aritmetika limit, *66*
aritmetika limit funkcí, *122*
aritmetika spojitosti, *136*
asociativita AK řad, *74*
asymptotika $h_n$, *79*
Blumbergova, 129
Bolzano–Cauchyova, 19
Bolzano–Weierstrassova, *62*
Cantor–Bernsteinova, 130
důkaz, *23*
Cantorova o transc. č., *42*
Cantorova o neexistenci surjekce, *21*
Cauchyova podmínka, *62*
charakterizace kompaktů, *134*
CKK, *82*
$\mathbb{C}_{\mathrm{TE}}$ je těleso, 34
dělení v $\mathbb{R}^*$, *55*
derivace a extrémy, *152*
DK celá čísla, *31*
dva funkční strážníci, *123*
dva strážníci, *70*
$\mathbb{R}$ je UT, *17*
existence šipkového světa, *249*
exponenciální identita, 86
důkaz, *109*
Feketeho lemma, *63*
Gelfond–Schneiderova, 46
Hardyho o limitě a uspořádání, *106*
Heine–Borelova$^+$, *148*
Heineho definice LF, *84*
HK. $\int$ a N. $\int$, *236*
irac. č. na irac. č. je rac. č., *45*
iracionalita $\sqrt{2}$, *13*
iterace polynomu $\to \pm\infty$, *103*
Leibnizův vzorec, *158*
liminf a limsup, *71*
limita a uspořádání, *69*
zesílení, 70
limita funkce a uspořádání, *123*
limita inverzní funkce 1, *141*
limita inverzní funkce 2, *142*
limita kvazimonotónní posl., *60*
limita monotónní funkce, *122*
limita složené funkce, *124*
limitní tečny, *155*
Liouville–Rosenlichtova, 220
Liouvilleova nerovnost, *43*
MRLRP, *99*
nabývání mezihodnot, *131*
nekonečná $\Delta$-ová nerovnost, *81*
NPELE, *152*
o jednoznačném čtení, *48*
o podposloupnostech, *58*
o zeta funkci, 82
obraz kompaktu, *133*
počet spojitých funkcí, *130*
počítání s nekonečny, *53*

pravěta o lim. monot. posl., *18*
princip minima a maxima, *132*
rekurentní součiny, *101*
rekurentní součty, *100*
Riemannova def. = Darbouxova def., *234*
součet geom. řady, *82*
součty AK řad, *73*
spočetnost $\mathbb{Q}$, *20*
spojitost a skládání, *137*
spojitost EF, *139*
spojitost inverzů 1, *138*
spojitost inverzů 2, *143*
spojitost mocninných řad, *136*
Szemerédiho, 64
tečna v chybějícím bodu, *156*
těleso algebraických čísel, *42*
transcendence čísla e, *45*
úplnost $\mathbb{R}$, *18*
vlastnosti liminfu a limsupu, *72*
vzorec pro ${F_n}^+$, *97*
Základní věta algebry, *36*
vlastnost posloupností, *56*
robustní, *56*
Vopěnka, Petr, 258
Vydra, Stanislav, 258
výrok, *2*
výroková forma, *3*
vztahy množin
disjunktnost, *5*
podmnožina, *5*
rovnost, *5*

Wallis, John, 55, *264*
Weierstrass, Karl, 62
Weyr, Eduard, *265*, 286
Weyr, Emil, 265
Weyr, František (1820–1889), 265
Weyr, František (1879–1951), 265
Wilkie, Alexander, 87
Wilkieho identita, *87*
Wittgenstein, Ludwig, iii, *265–266*
Wittgenstein, Paul (bratr LW), 265
Wright, Frank Loyd, 263

Základní elementární funkce, ZEF, *85*, 85–89
Základní věta algebry, 33, 35
závorkování, *48*
zeta funkce, *82*
Zich, Otakar, 258
zlatý řez, *98*