PŘEDNÁŠKA 9, 11. 4. 2022

TAYLOROVY POLYNOMY A ŘADY. PRIMITIVNÍ FUNKCE

• *Oznámení.* V přednášce 7 jsem zjednodušil a rozšířil definici derivace funkce v bodě — stačí, aby byl limitní — a přednášky 7 a 8 jsem upravil, osmá se téměř nezměnila. Dnešní přednáška kulminuje úplným důkazem existence primitivní funkce ke spojité funkci. Předtím probereme Taylorovy polynomy a řady.

• *Taylorův polynom.* V přednášce 7 jsme se po definici derivace dozvěděli, že diferencovatelnost funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ v limitním bodě $a \in M \subset \mathbb{R}$ množiny M poskytuje lineární aproximaci

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + o(x - a) \ \ (x \to a) \ .$$

V následující větě, jež je i definicí, pomocí derivací vyšších řádů tuto aproximaci zesílíme pomocí polynomů.

Věta 1 (Taylorův polynom) *Nechť je $n \in \mathbb{N}_0$ a funkce $f\colon U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Pro $n = 0$ se tím rozumí spojitost f v b. Pak existuje právě jeden polynom*

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j (x-b)^j, \ \ a_j \in \mathbb{R}, \ \ \text{že} \ \underbrace{\lim_{x \to b} \frac{f(x) - p(x)}{(x-b)^n} = 0}_{(0)} \ .$$

Jeho koeficienty jsou dány vzorcem $a_j = f^{(j)}(b)/j!$. Říkáme mu Taylorův polynom funkce f řádu n se středem v čísle b a označujeme ho jako $T_n^{f,b}(x)$.

$T_n^{f,b}(x)$ se rovná

$$f(b) + f'(b) \cdot (x-b) + \frac{f''(b)}{2} \cdot (x-b)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \cdot (x-b)^n$$

a hořejší lineární aproximace je $T_1^{f,a}(x)$. Dále $T_0^{f,b}(x) = f(b)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí identita

$$\left(T_n^{f,b}(x)\right)' = T_{n-1}^{f',b}(x)\ .$$

Pro důkaz věty 1 potřebujeme následující lemma.

Lemma 2 (o nulovém polynomu) *Pro všechna čísla $b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ a každý polynom $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^n$ s $a_j \in \mathbb{R}$ platí implikace*

$$\lim_{x \to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0 \Rightarrow \forall\, j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\colon a_j = 0\ .$$

Důkaz. Indukcí podle n. Pro $n = 0$ to platí, $a_0/1 \to 0$ dává $a_0 = 0$. Nechť $n > 0$ a platí limita v předpokladu implikace. Pak $p(b) = \lim_{x \to b} p(x) = 0$. Tedy b je kořenem $p(x)$ a $p(x) = (x-b) \cdot q(x)$, kde $q(x)$ je reálný polynom stupně nejvýše $n-1$. Z

$$0 = \lim_{x \to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x \to b} \frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}}$$

indukcí plyne, že $q(x)$ je nulový polynom. To je tedy i $p(x)$. $\square$

Důkaz věty 1. Předpoklad o $f^{(n)}(b)$ znamená, že (po případném zmenšení δ) pro každé $j = 0, 1, \ldots, n-1$ existuje $f^{(j)}\colon U(b, \delta) \to \mathbb{R}$. Nejprve dokážeme, že pro $p(x) = T_n^{f,b}(x)$ platí limita (0). Pro $n = 0$ to plyne ze spojitosti f v b. Pro $n = 1$ se podle aritmetiky limit funkcí limita

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - \overbrace{(f(b) + f'(b) \cdot (x-b))}^{T_1^{f,b}(x)}}{x-b} = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} - \lim_{x \to b} f'(b)$$

skutečně rovná $f'(b) - f'(b) = 0$. Pro $n \geq 2$ dostáváme podle l'Hospitalova pravidla, hořejší identity a indukce podle n, že

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_n^{f,\,b}(x)}{(x-b)^n} &= \lim_{x\to b}\frac{\big(f(x)-T_n^{f,\,b}(x)\big)'}{((x-b)^n)'}\\ &= (1/n)\lim_{x\to b}\frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',\,b}(x)}{(x-b)^{n-1}}\\ &= (1/n)\cdot 0 = 0\ .\end{aligned}$$

Nechť $p(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ s $b_j \in \mathbb{R}$ je libovolný polynom, pro nějž platí limita (0). Pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b}\frac{p(x)-T_n^{f,\,b}(x)}{(x-b)^n} &= \lim_{x\to b}\frac{p(x)-f(x)}{(x-b)^n}+\lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_n^{f,\,b}(x)}{(x-b)^n}\\ &= 0+0=0\ .\end{aligned}$$

Podle předešlého lemmatu se tedy $p(x) = T_n^{f,b}(x)$. $\square$

Shrneme zesílení lineární aproximace funkce.

Důsledek 3 (Taylorova aproximace) *Když je $n \in \mathbb{N}_0$ a funkce $f\colon U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$ (tj. pro $n = 0$ je f spojitá v b), pak pro $x \in U(b,\delta)$ se pro $x \to b$*

$$f(x) = T_n^{f,\,b}(x)+o((x-b)^n) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(b)}{j!}(x-b)^j+\underbrace{o((x-b)^n)}_{e(x)}\ .$$

Značení $o(\dots)$ znamená, jak víme, že $\lim_{x\to b} e(x)/(x-b)^n = 0$.

• *Taylorovy polynomy elementárních funkcí.* Uvedeme několik Taylorových polynomů se středem v nule. Tyto vzorce zdůvodníme, spočítáme jimi pár limit a prozkoumáme, kdy prodloužení Taylorových polynomů funkce f do nekonečné řady konverguje k $f(x)$. Ve vzorcích níže je $n \in \mathbb{N}_0$ libovolné.

1. $f(x) = \exp x$ má TP $T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n x^j/j!$.
2. $f(x) = \sin x$ má TP $T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j+1}/(2j+1)!$.
3. $f(x) = \cos x$ má TP $T_{2n}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j}/(2j)!$.
4. Pro $\forall\, a \in \mathbb{R}$ má $f(x) = (1+x)^a$ TP $T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{a}{j} x^j$. Zde
$$\binom{a}{j} = a(a-1)(a-2)\dots(a-j+1)/j!\ ,$$
s $\binom{a}{0} := 1$, je *zobecněný binomický koeficient.*
5. $f(x) = \log(1+x)$ má TP $T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x^j/j$ pro $n > 0$ a $T_0^{f,0}(x) = 0$.
6. $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$ má TP $T_n^{f,0}(x) = \sum_{j=1}^n x^j/j$ pro $n > 0$ a $T_0^{f,0}(x) = 0$.
7. $f(x) = \arctan x$, to jest inverzní tangens, má TP $T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2j+1}/(2j+1)$.
8. $f(x) = \arcsin x$, to jest inverzní sinus, má TP $T_{2n+1}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{j-1/2}{j} x^{2j+1}/(2j+1)$.
9. $f(x) = \arccos x$, to jest inverzní kosinus, má TP $T_{2n+1}^{f,0}(x) = \pi/2 - \sum_{j=0}^n \binom{j-1/2}{j} x^{2j+1}/(2j+1)$.

Důkaz vzorce 1. Patrně $\exp^{(j)}(x) = \exp(x)$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ a $\exp(0) = 1$. $\square$

Důkaz vzorce 2. Patrně $\sin^{(j)}(x) = \sin x$ pro $j \equiv 0 \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = \cos x$ pro $j \equiv 1 \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = -\sin x$ pro $j \equiv 2, \pmod 4$, $\sin^{(j)}(x) = -\cos x$ pro $j \equiv 3 \pmod 4$ a $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. $\square$

Důkaz vzorce 3. Toto odvození je podobné předchozímu. $\square$

Důkaz vzorce 4. Na $(-1, 1)$ pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ a každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$((1+x)^a)^{(j)} = a(a-1)\dots(a-j+1)(1+x)^{a-j} ,$$

s $((1+x)^a)^{(0)} = (1+x)^a$. Patrně $(1+0)^{a-j} = 1$. $\square$

Důkaz vzorce 5. Na $(-1, 1)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}(\log(1+x))^{(j)} &= (-1)(-2)\dots(-j+1) \cdot (1+x)^{-j} \\ &= (-1)^{j+1}(j-1)! \cdot (1+x)^{-j}\end{aligned}$$

a $(\log(1+x))^{(0)} = \log(1+x)$. Dále platí, že $\log(1+0) = 0$ a $(1+0)^{-j} = 1$. $\square$

Důkaz vzorce 6. Plyne z předešlého vzorce, protože na $(-1, 1)$ se $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\log(1-x)$. $\square$

Důkaz vzorce 7. $(\arctan x)^{(0)} = \arctan x$ a

$$(\arctan x)^{(1)} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) .$$

Pro každé $j \in \mathbb{N}$ se tak

$$(\arctan x)^{(j)} = -\frac{i}{2} \cdot (-1)^{j-1}(j-1)! \left((x-i)^{-j} - (x+i)^{-j}\right) .$$

Dále $(\arctan x)^{(0)}(0) = 0$, pro každé sudé $j \geq 2$ rovněž máme $(\arctan x)^{(j)}(0) = 0$ a pro každé liché $j \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}(\arctan x)^{(j)}(0) &= \frac{i}{2} \cdot \underbrace{(-1)^{j-1}}_{=i^{2j-2}}(j-1)! \cdot 2 \cdot i^{-j} \\ &= i^{j-1}(j-1)! = (-1)^{(j-1)/2}(j-1)!\,.\end{aligned}$$

□

Ovšem derivovali jsme komplexní funkce reálné proměnné. Proto tento Taylorův polynom odvodíme ještě jednou jiným způsobem bez pomoci $\mathbb{C}$.

Tvrzení 4 (TP f' a f) *Nechť $f\colon U(0,\delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f'\colon U(0,\delta) \to \mathbb{R}$ a vlastní $f^{(n+1)}(0) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Pak pro $x \to 0$ platí implikace*

$$\begin{aligned} & f'(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + o(x^n), \quad a_j \in \mathbb{R}\,, \\ & \Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} \cdot x^{j+1} + o(x^{n+1})\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Pracujeme se středem 0. Podle věty 1 o jednoznačnosti TP z předpokladu implikace plyne, že pro $j = 0, 1, \ldots, n$ se $a_j = f^{(j+1)}(0)/j!$. Podle téže věty je tedy koeficient u x^{j+1} v TP funkce f roven

$$\frac{f^{(j+1)}(0)}{(j+1)!} = \frac{a_j}{j+1}\,.$$

□

TP funkce $\arctan x$ tedy dostáváme z $T_{2n}^{f,0}(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}x^{2j}$ derivace $f(x) = \arctan'(x) = 1/(1+x^2)$. Tento TP dostáváme z (částečných součtů) geometrické řady $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$, $x \in (-1, 1)$. $\square$

Důkaz vzorce 8. Tento vzorec plyne hned z TP pro $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, z tvrzení 4 a vzorce 4. $\square$

Důkaz vzorce 9. Postupujeme jako v předešlém odvození. $\square$

• *Počítání limit pomocí Taylorových polynomů.* Použijeme při něm důsledek 3. Pomocí $T_1^{f,0}$ ve vzorci 2 třeba hned vidíme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x} = 1 + 0 = 1\ .$$

Nebo, pomocí $T_2^{f,0}$ ve vzorci 3,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(\cos x - 1)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(1 - x^2/2 - 1 + o(x^2))^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4/4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{4} + o(x^4)/x^4} = 4\ .\end{aligned}$$

V brožurce V. I. Arnolda *Gjujgens i Barrou, N'juton i Guk* (Nauka, Moskva 1989) je na str. 21 úloha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)} =?$$

Taylorovy polynomy tu možná nejsou nejlepší přístup (proč?), podrobněji `https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/ArnoldLim.pdf` (až to ale sepíšu).

• *Taylorovy řady.* Taylorova řada funkce vznikne z jejích Taylorových polynomů prodloužením do nekonečna.

Definice 5 (Taylorovy řady) *Nechť* $f\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ *má pro každé* $n\in\mathbb{N}$ *vlastní* $f^{(n)}\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$*. Pokud pro každé* $x\in U(a,\delta)$ *se*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n\ ,$$

řekneme, že funkce f *je na* $U(a,\delta)$ *součtem své Taylorovy řady* $\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$ *se středem v* a*.*

Taylorovy polynomy jsou tedy částečné součty Taylorových řad. Následující věta ukazuje, kdy situace v předešlé definici nastává. Pro $n\in\mathbb{N}_0$ a funkci $f\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ s vlastní $f^{(n)}(a)\in\mathbb{R}$ definujme *zbytek Taylorova polynomu* $T_n^{f,\,a}(x)$ jako

$$R_n^{f,\,a}(x):=f(x)-T_n^{f,\,a}(x),\ x\in U(a,\,\delta)\ .$$

Věta 6 (zbytky TP) *Nechť je* $n\in\mathbb{N}_0$*,* $f\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ *a existuje vlastní* $f^{(n+1)}\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$*. Pak platí následující.*

1. *(Lagrangeův zbytek)* $\forall\,x\in P(a,\delta)\ \exists\,c$ *mezi* a *a* x*, že*

$$R_n^{f,\,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\ .$$

2. *(Cauchyův zbytek)* $\forall\,x\in P(a,\delta)\ \exists\,c$ *mezi* a *a* x*, že*

$$R_n^{f,\,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)\cdot(x-c)^n}{n!}\cdot(x-a)\ .$$

Důkaz. Dokážeme obecněji, že pro každou funkci $g\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ s vlastní a nenulovou $g'\colon U(a,\delta)\to\mathbb{R}$ pro každé $x\in P(a,\delta)$

existuje číslo c mezi a a x, že

$$R_n^{f,\,a}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g'(c)} \cdot f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n \; . \qquad \text{(R)}$$

Lagrangeův zbytek pak dostáváme volbou $g(t) := (x-t)^{n+1}$ a Cauchyův volbou $g(t) := t$.

Nechť $x \in P(a, \delta)$ a funkce g je, jak uvedeno. Uvažme pomocnou funkci

$$F(t) := f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!} \cdot (x-t)^i \; .$$

Na F, g a interval I s konci a a x použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě. Na tomto intervalu je F spojitá, $F(x) = 0$, $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, $g(a) \neq g(x)$ (podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě) a na I se

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!} \cdot (x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{i!} \cdot i(x-t)^{i-1} \right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n \; . \end{aligned}$$

Podle Cauchyovy věty o střední hodnotě (rovnost $(*)$) existuje číslo $c \in I^0$, že

$$-\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{g(x) - g(a)} = \frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} \stackrel{(*)}{=} \frac{F'(c)}{g'(c)} = -\frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n! \cdot g'(c)} \; .$$

Vztah (R) teď plyne lehkou úpravou. $\square$

Pro všech devět vzorců pro TP výše nyní uvedeme, pro jaké $x \in \mathbb{R}$ dávají Taylorovu řadu funkce f se středem v 0 konvergující k $f(x)$. Důkazy pomineme, snadno se provedou pomocí předešlé věty.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $\sin x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$.
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se $\cos x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$.
4. $\forall\, x \in (-1,1)$ a $\forall\, a \in \mathbb{R}$ se $(1+x)^a = \sum_{n\geq 0} \binom{a}{n} x^n$.
5. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\log(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} x^n/n$.
6. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} x^n/n$.
7. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\arctan x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$.
8. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\arcsin x = \sum_{n\geq 0} \binom{n-1/2}{n} x^{2n+1}/(2n+1)$.
9. $\forall\, x \in (-1,1)$ se $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0} \binom{n-1/2}{n} x^{2n+1}/(2n+1)$.

Některé z těchto rozvojů platí i v širších oborech. Rozvoj 4 s $a \in \mathbb{N}_0$ platí pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rozvoj 5 platí i pro $x = 1$, rozvoj 6 platí i pro $x = -1$, rozvoj 7 platí i pro $x = 1$ a rozvoje 8 a 9 platí i pro $x = -1$.

Koeficienty v Taylorových řadách se dají často vyložit kombinatoricky. Uvedeme bez důkazu jeden příklad z mnoha.

Tvrzení 7 (Bellova čísla B_n) *$\forall\, x \in (-1,1)$ platí rozvoj*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1} = \exp(\exp(x) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}\ ,$$

kde B_n je počet rozkladů n-prvkové množiny.

Například $B_3 = 5$ díky pěti rozkladům $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$ a $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ množiny $\{1,2,3\}$.

• *Primitivní funkce.* Interval $I \subset \mathbb{R}$ je *netriviální*, pokud $I \neq \emptyset, \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Netriviální jsou přesně ty neprázdné intervaly, jejichž každý bod je jejich limitním bodem.

Definice 8 (primitivní funkce) *Pro funkce $F, f\colon I \to \mathbb{R}$ definované na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$ řekneme, že F je primitivní (funkce) k f, a píšeme $F = \int f$, pokud F má na I vlastní derivaci a*

$$\forall\, b \in I\colon\, F'(b) = f(b)\ .$$

Někdy se F také nazývá antiderivací funkce f.

Zdůrazňujeme, protože se v tom ostatní literatura většinou liší (neboť definuje derivace jen ve vnitřních bodech), že pro každé $b \in I$, i v krajních bodech intervalu, je zde $F'(b)$ vždy obyčejná, oboustranná derivace. Z dřívějšího výsledku o derivaci plyne, že primitivní funkce je vždy spojitá. Například $ax^2/2 + bx + c$ je primitivní k lineární funkci $ax + b$ na každém netriviálním intervalu, e^x je na $\mathbb{R}$ primitivní sama k sobě, $c + \arcsin x$ je na $(-1, 1)$ antiderivací funkce $1/\sqrt{1 - x^2}$ a $2x^{3/2}/3$ je na $[0, +\infty)$ PF funkce $\sqrt{x}$.

Antiderivace dané funkce není určena jednoznačně, ale každé dvě se liší jen konstantním posunem.

Věta 9 (nejednoznačnost PF) *$F_1, F_2, f\colon I \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a F_1 i F_2 je primitivní k f. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$, že*

$$F_1 - F_2 = c \text{ na } I\ .$$

Naopak, je-li F primitivní k f, potom pro každé $c \in \mathbb{R}$ je také $F + c$ primitivní k f.

Důkaz. Nechť F_1, F_2, f a I jsou, jak uvedeno, a $a < b$ jsou dvě libovolná čísla z I. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě, použité pro funkci $F_1 - F_2$ a interval $[a, b]$, existuje $c \in (a, b)$, že

$$\begin{aligned} \frac{(F_1 - F_2)(b) - (F_1 - F_2)(a)}{b - a} &= (F_1 - F_2)'(c) = F_1'(c) - F_2'(c) \\ &= f(c) - f(c) = 0\ . \end{aligned}$$

Tedy $F_1(b) - F_2(b) = F_1(a) - F_2(a)$, takže $F_1(x) - F_2(x) = c$ pro nějakou konstantu c a každé $x \in I$.

Druhá část věty je jasná, $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$. □

Ve zbytku přednášky dokážeme existenci antiderivace ke každé spojité funkci. Nejprve si připravíme několik nástrojů.

• *Prohození limity a derivace.* V této pasáži je naším cílem věta popisující situaci, kdy lze beze změny výsledku prohodit operace limity pro $n \to \infty$ a derivování. Větu použijeme níže v důkazu věty 16 o existenci antiderivace. Nejdřív ale zavedeme bodovou a stejnoměrnou konvergenci a dokážeme Moore–Osgoodovu větu.

Definice 10 **($f_n \to f$)** *$M \subset \mathbb{R}$ je množina a $f, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce. Když*

$$\forall\, \varepsilon\; \forall\, x \in M\; \exists\, n_0 \colon n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ ,$$

píšeme $f_n \to f$ (na M) a řekneme, že funkce f_n konvergují na M bodově k funkci f.

Jinak řečeno, pro každé $x \in M$ se $\lim f_n(x) = f(x)$.

Definice 11 **($f_n \rightrightarrows f$)** *$M \subset \mathbb{R}$ je množina a $f, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce. Když*

$$\forall\, \varepsilon\; \exists\, n_0\; \forall\, x \in M \colon n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ ,$$

píšeme $f_n \rightrightarrows f$ (na M) a řekneme, že funkce f_n konvergují na M stejnoměrně k funkci f.

Teď se požaduje více, aby jediný index n_0 vyhovoval pro všechny $x \in M$. Patrně $f_n \rightrightarrows f$ implikuje, že $f_n \to f$, ale naopak to obecně neplatí.

Následující větě se také říká Moore–Osgoodova věta.

Věta 12 (výměna limit) *Nechť $f_n, f \colon M \to \mathbb{R}$, pro indexy $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ (na M), $A \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny M a $\lim_{x \to A} f_n(x) =: a_n \in \mathbb{R}$ pro každé n. Potom následující vlastní limity existují a rovnají se:*

$$\lim a_n = \lim_{x \to A} f(x), \quad \textit{tj.} \quad \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to A} f_n(x) = \lim_{x \to A} \lim_{n \to \infty} f_n(x)\ .$$

Důkaz. Z předpokladu, že $f_n \rightrightarrows f$ (na M), plyne, že $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$

je stejnoměrně Cauchyova pro $x \in M$, to jest pro každé ε existuje n_0, že pro každé $x \in M$ a každé $m, n \geq n_0$ je

$$|f_m(x) - f_m(x)| < \varepsilon\ .$$

Pro každé dva pevné indexy $m, n \geq n_0$ pak limitní přechod $\lim_{x \to A}$ dává nerovnost $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Tedy $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova posloupnost a má vlastní limitu $\lim a_n =: a \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí odhad

$$|f(x) - a| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{V_1} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{V_2} + \underbrace{|a_n - a|}_{V_3}\ .$$

Buď dáno ε. Protože $\lim a_n = a$, existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow V_3 < \varepsilon/3$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ (na M), existuje n_1, že $n \geq n_1 \Rightarrow V_1 < \varepsilon/3$ pro každé $x \in M$. Vezmeme index $m \geq \max(n_0, n_1)$. Protože $\lim_{x \to A} f_m(x) = a_m$, můžeme vzít δ, že $V_2 < \varepsilon/3$ pro $n := m$ a každé $x \in P(A, \delta) \cap M$. Pro $n := m$ a každé $x \in P(A, \delta) \cap M$ tak je

$$|f(x) - a| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

a $\lim_{x \to A} f(x) = a = \lim a_n$. $\square$

Zde je tedy věta o výměně limity a derivace.

Věta 13 (výměna df/dx a $\lim_{n\to\infty}$) *Pro indexy $n \in \mathbb{N}$ nechť $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$, které splňují tři následující podmínky.*

1. *Pro každé n existuje vlastní derivace $f_n'\colon I \to \mathbb{R}$.*
2. *$f_n' \rightrightarrows f$ (na I) pro nějakou funkci $f\colon I \to \mathbb{R}$.*
3. *Existuje $a \in I$, že posloupnost $(f_n(a)) \subset \mathbb{R}$ konverguje.*

Potom $f_n \to F$ (na I) pro nějakou funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$, existuje vlastní derivace $F'\colon I \to \mathbb{R}$ a

$$F' = f \text{ na } I, \text{ tj. } \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'\ .$$

Důkaz. Nechť f_n, I, f a a jsou, jak uvedeno, a $b \in I$ je libovolný bod. Nejprve dokážeme, že posloupnost $(f_n(b)) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova. Pro $b = a$ to podle podmínky 3 platí, proto můžeme předpokládat, že třeba $a < b$, případ s $b < a$ se probere podobně. Nechť je dáno ε. Z podmínek 2 a 3 plyne, že posloupnost funkcí (f_n') je na I stejnoměrně Cauchyova a že posloupnost $(f_n(a))$ je Cauchyova. Tedy existuje n_0, že $m, n \ge n_0 \Rightarrow |f_m'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in I$ a také $m, n \ge n_0 \Rightarrow |f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. Vezmeme dva libovolné indexy $m, n \ge n_0$ a na funkci $f_m - f_n$ a interval $[a, b]$ použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Tím pro nějaké číslo $c \in (a, b)$ dostaneme po řadě rovnost a odhad

$$\frac{(f_m - f_n)(b) - (f_m - f_n)(a)}{b - a} = (f_m - f_n)'(c)$$

a

$$\begin{aligned} |f_m(b) - f_n(b)| &\leq |b-a| \cdot |f'_m(c) - f'_n(c)| + |f_m(a) - f_n(a)| \\ &< (b-a)\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b-a+1) \ . \end{aligned}$$

Takže posloupnost $(f_n(b))$ je Cauchyova, tedy konvergentní, a pro každé $b \in I$ můžeme definovat

$$F(b) := \lim f_n(b) \in \mathbb{R} \ .$$

Tím jsme získali funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$, že $f_n \to F$ (na I).

Dokážeme, že $F' = f$ na I. Použijeme předešlou větu a pak ověříme, že jsou splněny její předpoklady. Pro libovolné $b \in I$ se opravdu

$$\begin{aligned} F'(b) &= \lim_{x\to b} \frac{F(x)-F(b)}{x-b} \\ &= \lim_{x\to b} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)-f_n(b)}{x-b} \\ &\overset{\text{věta 12}}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b} \frac{f_n(x)-f_n(b)}{x-b} \\ &= \lim_{n\to\infty} f'_n(b) = f(b) \ . \end{aligned}$$

Ověříme předpoklady tohoto použití věty 12. Použili jsme ji pro posloupnost funkcí

$$g_n(x) := \frac{f_n(x)-f_n(b)}{x-b} \colon I \setminus \{b\} \to \mathbb{R} \ .$$

Jistě $\lim_{x\to b} g_n(x) = f'_n(b)$ pro každé n a také $\lim f'_n(b) = f(b)$. Zbývá ověřit, že $g_n \rightrightarrows g$ (na $I \setminus \{b\}$) pro funkci

$$g(x) := \frac{F(x)-F(b)}{x-b} \ .$$

Pro to stačí ověřit, že posloupnost $(g_n(x))$ je na $I \setminus \{b\}$ stejnoměrně Cauchyova. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I \setminus \{b\}$ platí identita

$$\begin{aligned}
|g_m(x) - g_n(x)| &= \frac{|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(b) - f_n(b))|}{|x - b|} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\cancel{|x - b|} \cdot |f'_m(c) - f'_n(c)|}{\cancel{|x - b|}} \\
&= \underbrace{|f'_m(c) - f'_n(c)|}_{V}, \ c \text{ leží mezi } b \text{ a } x \,.
\end{aligned}$$

Získali jsme ji v rovnosti $(*)$ Lagrangeovou větou o střední hodnotě, použitou pro funkcí $f_m(x) - f_n(x)$ a interval s konci b a x. Podle podmínky 2 pro dané ε existuje n_0, že pro každé $m, n \geq n_0$ a každé $c \in I$ je $|V| < \varepsilon$. Posloupnost $(g_n(x))$ je tedy na $I \setminus \{b\}$ stejnoměrně Cauchyova a důkaz je hotový. □

• *Spojitá funkce má primitivní funkci.* Abychom to dokázali, potřebujeme ještě jeden nástroj.

Definice 14 (stejnoměrná spojitost) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá (na M), pokud*

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta\colon a \in M \Rightarrow f[U(a, \delta) \cap M] \subset U(f(a), \varepsilon) \,.$$

Jediné δ tak vyhovuje pro všechny body $a \in M$.

Věta 15 (spojitost na kompaktu) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní množina. Je-li funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ spojitá, je stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní a $f\colon M \to \mathbb{R}$ není stejnoměrně spojitá. Tedy existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé n existují takové dva body $a_n, b_n \in M$, že $|a_n - b_n| < 1/n$, ale $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$. Využijeme kompaktnost množiny M a z (a_n) i (b_n) vybereme konvergentní podposloupnosti s limitami v M. Pro jednoduchost značení předpokládáme, že už (a_n) a (b_n) konvergují a mají limity $\lim a_n =: a \in M$ a $\lim b_n =: b \in M$. Z $|a_n - b_n| < 1/n$ plyne, že $a = b$. Z $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$ a konvergence (a_n) a (b_n) k a ale plyne, že pro každé δ

$$f[U(a, \delta) \cap M] \not\subset U(f(a), \varepsilon/2)\ .$$

Tedy funkce f není spojitá v bodu a a není spojitá na M. $\square$

Věta 16 ($\exists$ antiderivace) *Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Taková funkce f má vždy primitivní funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$.*

Stručný důkaz. I buď nejprve kompaktní, $I = [a, b]$ s $a < b$. Funkce $g\colon I \to \mathbb{R}$ je *lomená čára*, když je spojitá a existuje dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ intervalu I, že každá restrikce $g \,|\, [a_{i-1}, a_i]$ je lineární, tj. tvaru $g(x) = c_i x + d_i$. Díky větě 15

$$\forall\, n\ \exists \text{lomená čára } g_n\colon x \in I \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| < 1/n\ .$$

Protože $\int (cx+d) = cx^2/2 + dx + e$, podle tvrzení 6 minule existují $G_n\colon I \to \mathbb{R}$, že $G_n = \int g_n$ a $G_n(a) = 0$. Pak ale, protože $g_n \rightrightarrows f$ (na I) a $G_n' = g_n$ na I, podle věty 13 existuje $F\colon I \to \mathbb{R}$, že $G_n \to F$ (na I), ale hlavně $F' = f$ na I, to jest $F = \int f$.

Pokud interval I není kompaktní, vyjádříme ho jako sjednocení vnořených netriviálních kompaktních intervalů I_n: $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ a $\bigcup_{n \geq 1} I_n = I$. Na každém I_n vezmeme vhodnou $F_n = \int f \,|\, I_n$ a pak $F := \bigcup_{n \geq 1} F_n$ je na I primitivní funkce k f. $\square$

Na `https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/podrobnyduk.pdf` naleznete podrobnosti důkazu (až je ale sepíšu). P. Lundström, Primitives of continuous functions via polynomials, `https://arxiv.org/abs/2204.05012` uvádí podobný důkaz, ale s polynomy místo lomených čar. Jednodušším způsobem dokážeme tuto větu zanedlouho znovu pomocí Riemannova integrálu.

DĚKUJI ZA POZORNOST!