PŘEDNÁŠKA 8, 4. 4. 2022
VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ A JEJICH DŮSLEDKY

- *Věty o střední hodnotě.* Uvedeme a dokážeme tři.

Věta 1 (Rolleova věta) *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s $f(a) = f(b)$ je spojitá funkce, která má v každém bodu intervalu (a,b) vlastní či nevlastní derivaci. Potom*

$$\exists\, c \in (a,\, b)\colon\ f'(c) = 0\ .$$

Důkaz. Když je f konstantní, to jest $f(x) = f(a) = f(b)$ pro každé $x \in [a,b]$, pak $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$. Nechť f není konstantní a $f(x) > f(a) = f(b)$ pro nějaké $x \in (a,b)$, případ s $f(x) < f(a) = f(b)$ se probere podobně. Podle principu minima a maxima (viz předminulá přednáška) funkce f nabývá v nějakém $c \in [a,b]$ svou největší hodnotu. Patrně $c \in (a,b)$. Podle předpokladu o derivacích a věty 4 z minula se $f'(c) = 0$. $\square$

Věta 2 (Lagrangeova) *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodu intervalu (a,b) vlastní či nevlastní derivaci. Potom*

$$\exists\, c \in (a,\, b)\colon\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

Důkaz. Uvažme funkci

$$g(x) := f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}\ .$$

Splňuje předpoklady Rolleovy věty, zejména $g(a) = g(b) = f(a)$, takže

$$0 = g'(c) = f'(c) - (f(b) - f(a))/(b - a)$$

pro nějaké $c \in (a, b)$ a jsme hotovi. $\square$

Geometricky tato věta praví, že za uvedených předpokladů vždy existuje tečna ke G_f v nějakém bodě $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$, která je rovnoběžná se sečnou $\kappa(a, f(a), b, f(b))$.

Věta 3 (Cauchyova v.) *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ s $g(b) \neq g(a)$ jsou spojité funkce, které mají v každém bodu intervalu (a, b) derivaci. Derivace funkce f mohou být nevlastní, ale derivace funkce g jsou povoleny jen vlastní. Potom*

$$\exists\, c \in (a,\, b)\colon\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)\ .$$

Důkaz. Uvažme funkci

$$h(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \colon [a,\, b] \to \mathbb{R}\ .$$

Splňuje předpoklady Rolleovy věty, zejména $h(a) = h(b) = f(a)$, takže

$$0 = h'(c) = f'(c) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$$

pro nějaké $c \in (a, b)$ a jsme hotovi. $\square$

• *Derivace a monotonie funkcí.* Nezáporná (resp. nekladná) derivace znamená, že původní funkce neklesá (resp. neroste). Kladná (resp. záporná) derivace znamená, že původní funkce roste (resp.

klesá). Podrobněji v následující větě. Pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ označíme jako $M^0 := \{a \in M \mid \exists\, \delta\colon U(a,\delta) \subset M\}$ její *vnitřek*. Vnitřek libovolného intervalu I je otevřený interval $I^0 \subset I$, který vznikne z I vynecháním koncových bodů.

Věta 4 (derivace a monotonie 1) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodu vnitřku I^0 intervalu I vlastní či nevlastní derivaci. Pak platí následující.*

1. *$f' \ge 0$, resp. $f' \le 0$, na $I^0 \Rightarrow f$ je na I neklesající, resp. nerostoucí.*
2. *$f' > 0$, resp. $f' < 0$, na $I^0 \Rightarrow f$ je na I rostoucí, resp. klesající.*

Důkaz. Nechť je $f' < 0$ na I^0 a $x < y$ jsou libovolná čísla v I. Podle věty 2 se

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) < 0$$

pro nějaké $z \in (x, y) \subset I^0$. Protože jmenovatel $y - x > 0$, je čitatel záporný, tedy $f(x) > f(y)$ a f na I klesá. Další tři možnosti v 1 a 2 se proberou podobně. □

Důkaz následujícího tvrzení je velmi podobný důkazu věty 4 v minulé přednášce a proto ho pomineme.

Tvrzení 5 (derivace a monotonie 2) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce a jednostranné derivace níže mohou být nevlastní. Platí následující.*

1. *Když je a levý limitní bod množiny M a $f'_-(a) < 0$, resp. $f'_-(a) > 0$, pak existuje takové δ, že*

$$f[P^-(a,\delta) \cap M] > \{f(a)\}, \ \ \textit{resp.} \ \ < \{f(a)\} \ .$$

2. *Když je a pravý limitní bod množiny M a $f'_+(a) < 0$, resp. $f'_+(a) > 0$, pak existuje takové δ, že*

$$f[P^+(a,\delta) \cap M] < \{f(a)\}, \ \ \textit{resp.} \ \ > \{f(a)\} \ .$$

Minule jsme spočítali, že $(|x|)'_-(0) = -1$ a $(|x|)'_+(0) = 1$. Podle předchozího tvrzení tak má funkce $|x|$ v 0 ostré lokální minimum. To je pochopitelně jasné i bez jakékoli teorie.

- *Limitní rozšiřování derivací.*

Tvrzení 6 (rozšiřování derivací) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce s vlastní derivací na intervalu (a,b) a $\lim_{x\to a} f'(x) =: L \in \mathbb{R}^*$. Potom i*

$$f'_+(a) = L \ .$$

Důkaz. Nechť a, b, f a L jsou, jak uvedeno, a nechť je dáno ε. Existuje takové $\delta \le b - a$, že $x \in P^+(a,\delta) \Rightarrow f'(x) \in U(L,\varepsilon)$. Nechť $x \in P^+(a,\delta)$ je libovolné. Podle věty 2 existuje takové $y \in (a,x) \subset P^+(a,\delta)$, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(y) \in U(L,\,\varepsilon) \ .$$

Tedy $f'_+(a) = L$. $\square$

Obdobné tvrzení platí pro derivace zleva.

• *l'Hospitalovo pravidlo.* Jde o metodu pro počítání limit podílů funkcí $f(x)/g(x)$ vedoucích na neurčité výrazy $0/0$ a $\pm\infty/\pm\infty$.

Věta 7 (l'Hospitalovo pravidlo) *$A \in \mathbb{R}$, pro nějaké δ jsou $f, g\colon P^+(A, \delta) \to \mathbb{R}$ funkce mající na $P^+(A, \delta)$ vlastní derivace, přičemž $g' \neq 0$ na $P^+(A, \delta)$, a platí, že*

1. $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} g(x) = 0$ *nebo*
2. $\lim_{x\to A} g(x) = \pm\infty$.

Potom

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ ,$$

pokud poslední limita existuje. Tato věta platí i pro levá okolí $P^-(A, \delta)$, obyčejná okolí $P(A, \delta)$ a pro $A = \pm\infty$.

Důkaz. 1. Nechť $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} g(x) = 0$, nechť dále $\lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L \in \mathbb{R}^*$ a $A \in \mathbb{R}$. Definujeme $f(A) = g(A) := 0$. A je limitním bodem definičního oboru zlomku $f(x)/g(x)$, protože nelze, aby se $g = 0$ na nějakém $P^+(A, \theta)$, pak by se na $P^+(A, \theta)$ anulovala i g'. Položíme

$$P_0^+(A,\, \delta) := \{x \in (A,\, A + \delta) \mid g(x) \neq 0\} \ .$$

Podle věty 3 existuje taková funkce $c\colon P_0^+(A, \delta) \to P^+(A, \delta)$, že pro každé $x \in P_0^+(A, \delta)$ je

$$c(x) \in (A, x) \ \text{ a } \ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(A)}{g(x) - g(A)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \ .$$

Patrně $\lim_{x\to A} c(x) = A$. Protože samozřejmě $A \notin P^+(A,\delta)$, je splněna podmínka 1 věty o limitě složené funkce. Podle této věty dostáváme, že

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y\to A} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L\ .$$

Pro funkce definované na $P^-(A,\delta)$ je důkaz podobný. $P(A,\delta)$ redukujeme na $P^-(A,\delta)$ a $P^+(A,\delta)$. Konečně nechť $A = +\infty$, případ s $A = -\infty$ se probere podobně. Substitucí $x := 1/y$ a větou o limitě složené funkce to převedeme na limitu v 0 a definiční obor $P^+(0,\delta)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)}$$

a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{y\to 0} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'(1/y)\cdot(-y^{-2})}{g'(1/y)\cdot(-y^{-2})} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{(f(1/y))'}{(g(1/y))'}\ ,\end{aligned}$$

kde první rovnost platí díky větě o limitě složené funkce a poslední díky vzorci pro derivaci složené funkce.

2. Nechť $\lim_{x\to A} g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L \in \mathbb{R}^*$. Důkaz tohoto případu provedeme později pomocí integrálů. $\square$

V této větě se někdy vyskytuje poněkud zmatečné značení $\lim_{x\to A^+}$. Ovšem díky definičnímu oboru $P^+(A,\delta)$ stačí mluvit jednodušeji o obyčejných limitách $\lim_{x\to A}$.

Spočítáme „lapitalem“ pár limit. Například

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\log x &= \lim_{x\to 0}\frac{(\log x)'}{(1/\sqrt{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{(-1/2)x^{-3/2}}\\ &= -2\lim_{x\to 0}x^{1/2} = 0\end{aligned}$$

a obecněji $\lim_{x\to 0} x^c \log x = 0$ pro každé $c > 0$. Nebo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x - 1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(\cos x - 1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{-\sin x}\\ &= -2\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(\sin x)'} = -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = -2\;.\end{aligned}$$

• *Derivace vyšších řádů.* Definiční obory funkcí teď většinou budou otevřené množiny. Každý bod takové množiny je její OLB.

Definice 8 ($f^{(n)}(x)$) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná otevřená množina a $f = f(x)\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Pro $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ definujeme indukcí konečnou či nekonečnou posloupnost funkcí $f^{(n)}(x)\colon M \to \mathbb{R}$.*

1. *Na začátku $f^{(0)}(x) := f(x)$.*
2. *Pro $n > 0$, když je funkce $f^{(n-1)}(x)$ definovaná a má v každém bodu $a \in M$ vlastní derivaci, pro každé $a \in M$ definujeme hodnotu n-té funkce jako*

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)}(x))'(a)\;.$$

Funkci $f^{(n)}$ nazveme derivací řádu n funkce f či n-tou derivací funkce f.

Funkce $f^{(0)}$ je tedy f sama a $f^{(1)}$ je její derivace f'. Pokud je $f^{(n-1)}\colon M \to \mathbb{R}$ definovaná a má v $b \in M$ derivaci, i nevlastní, stále píšeme

$$f^{(n)}(b) := (f^{(n-1)})'(b) \in \mathbb{R}^*$$

a mluvíme o n-té derivaci funkce f v bodě b. Funkci $f^{(2)}$, druhou derivaci funkce f, označíme též jako f''. Například, pro $M = \mathbb{R}$, $(x \sin x)'' = (\sin x + x \cos x)' = 2 \cos x - x \sin x$. Druhou derivaci lze použít ke zdůvodnění existence extrémů funkcí.

Tvrzení 9 (f'' a extrémy) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, kde M je otevřená množina, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce, existuje vlastní $f'\colon M \to \mathbb{R}$ s $f'(a) = 0$ a existuje $f''(a) \in \mathbb{R}^*$, i nevlastní. Pak platí následující.*

1. *$f''(a) > 0 \Rightarrow f$ má v a ostré lokální minimum.*
2. *$f''(a) < 0 \Rightarrow f$ má v a ostré lokální maximum.*

Množinu M lze zřejmě vždy brát ve tvaru $U(a, \delta)$.

Důkaz. Dokážeme jen první část, důkaz druhé je podobný. Nechť tedy $M = U(a, \delta)$, na $U(a, \delta)$ existuje vlastní f', $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$. Podle tvrzení 5 existuje takové $\theta \le \delta$, že $f' < f'(0) = 0$ na $P^-(a, \theta)$ a $f' > f'(0) = 0$ na $P^+(a, \theta)$. Nechť $x \in P^-(a, \theta)$ je libovolné. Podle věty 2 existuje $y \in (x, a) \subset P^-(a, \theta)$, že

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(y) < 0\ .$$

Protože jmenovatel $a - x$ je kladný, je čitatel záporný a $f(a) < f(x)$. Pro $x \in P^+(a, \theta)$ je $f'(y) > 0$, jmenovatel je záporný, čitatel je tedy opět záporný a opět $f(a) < f(x)$. Proto má f v a ostré lokální minimum. $\square$

Když $f''(a) = 0$, tvrzení nic neříká. Tento případ lze částečně rozhodnout zobecněním tvrzení na derivace řádů > 2.

• *Konvexita a konkavita funkcí.* Nechť $B := (c, d) \in \mathbb{R}^2$ je bod v rovině a ℓ je nesvislá přímka, daná rovnicí $y = sx + b$. Platí-li nerovnost $d \geq sc + b$, resp. $d > sc + b$, píšeme $B \geq \ell$, resp. $B > \ell$, a řekneme, že B *leží nad* ℓ, resp. že B *leží ostře nad* ℓ. Otočením nerovností definujeme, že B *leží pod* ℓ, resp. že B *leží ostře pod* ℓ, symbolicky $B \leq \ell$, resp. $B < \ell$.

Definice 10 (konvexní a konkávní) *Nechť* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *je funkce definovaná na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$*. Je (na* I*) konvexní, pokud pro každou trojici čísel* $a < b < c$ *v* I *platí „nerovnost“*

$$(b,\ f(b)) \leq \kappa(a,\ f(a),\ c,\ f(c))\ .$$

Je-li tato „nerovnost“ ostrá, je f *(na* I*) ryze konvexní. Platí-li opačné „nerovnosti“, nazveme funkci* f *konkávní, resp. ryze konkávní (na* I*).*

Připomínáme, že $\kappa(a, f(a), c, f(c))$ je sečna grafu G_f jdoucí body $(a, f(a))$ a $(c, f(c))$. Typickým příkladem ryze konvexní funkce je

$$f(x) = x^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ .$$

Funkce

$$f(x) = -x^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

pak je ryze konkávní. Obecně $f\colon I \to \mathbb{R}$ je (ryze) konvexní $\iff$ $-f$ je (ryze) konkávní. (Ryzí) konvexita, resp. (ryzí) konkavita, se zachovává při zúžení funkce na podinterval.

Uvedeme bez důkazu zajímavý fakt, že konvexita a konkavita implikují spojitost.

Věta 11 ($\exists$ jednostranné derivace) *Každá konvexní, resp. konkávní, funkce $f\colon I\to\mathbb{R}$ definovaná na otevřeném intervalu $I\subset\mathbb{R}$ má vlastní jednostranné derivace*

$$f'_-,\ f'_+\colon I\to\mathbb{R}$$

a ty jsou neklesající, resp. nerostoucí.

Podle tvrzení 5 v minulé přednášce pak f je v každém bodě $b\in I$ zleva i zprava spojitá a je tedy spojitá na I. Ovšem derivace $f'(b)$ nemusí vždy existovat, jak ukazuje konvexní funkce $|x|$.

Věta 12 (konvexita a konkavita a f'') *Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval a spojitá funkce $f\colon I\to\mathbb{R}$ má v každém $b\in I^0$ druhou derivaci $f''(b)\in\mathbb{R}^*$, i nevlastní. Pak platí následující.*

1. *$f''\geq 0$, resp. $f''\leq 0$, na $I^0 \Rightarrow f$ je na I konvexní, resp. konkávní.*
2. *$f''>0$, resp. $f''<0$, na $I^0 \Rightarrow f$ je na I ryze konvexní, resp. ryze konkávní.*

Pro důkaz této věty budeme potřebovat následující geometrické lemma, jehož důkaz ponecháme jako cvičení. Říká, že když jdeme zleva doprava a na nesvislou úsečku $(a,a')(b,b')$ napojíme další nesvislou úsečku $(b,b')(c,c')$ se stejným či větším sklonem, pak společný bod (b,b') leží pod přímkou jdoucí krajními body (a,a') a (c,c').

Lemma 13 (o sklonech) *Nechť (a, a'), (b, b') a (c, c') jsou v $\mathbb{R}^2$ a je $a < b < c$. Pak*

$$\frac{b' - a'}{b - a} \le \frac{c' - b'}{c - b} \Rightarrow (b,\, b') \le \kappa(a,\, a',\, c,\, c')\ .$$

Dále ostrá nerovnost implikuje ostrou „nerovnost" a obě tyto implikace platí i pro opačné nerovnosti a „nerovnosti".

Důkaz věty 12. Předpoklad existence f'' znamená, že existuje vlastní $f'\colon I^0 \to \mathbb{R}$. Spojitost f musíme předpokládat, aby platila i v krajních bodech intervalu I. Nechť $f'' \ge 0$ na I^0, další tři případy v 1 a 2 se proberou podobně. Nechť $a < b < c$ jsou tři libovolná čísla v I. Podle věty 2 existují $y \in (a, b)$ a $z \in (b, c)$, že

$$s := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(y) \ \text{ a } \ t := \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(z)\ .$$

Podle věty 4 je f' na I^0 neklesající, protože f'' je nezáporná. Protože $y < z$, je sklon $s = f'(y)$ úsečky $(a, f(a))(b, f(b))$ nejvýše roven sklonu $t = f'(z)$ úsečky $(b, f(b))(c, f(c))$. Podle předchozího lemmatu tak bod $(b, f(b))$ leží pod přímkou

$$\kappa(a,\, f(a),\, c,\, f(c))\ .$$

Tím je splněna podmínka v definici 10 a f je na I konvexní. $\square$

• *Inflexní body.* Lze je definovat různě, ale pro nás to jsou ty body grafu funkce, kde přechází z jedné strany tečny na druhou. Přesná definice následuje.

Definice 14 (inflexe) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, kde a je* OLB *množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a ℓ je tečna ke G_f v $(a, f(a))$. Bod $(a, f(a))$ nazveme inflexním bodem grafu funkce f, pokud existuje δ, že pro každé $x \in P^-(a,\delta) \cap M$ a každé $x' \in P^+(a,\delta) \cap M$ je*

$$(x,\, f(x)) \le \ell \ \text{ a } \ (x',\, f(x')) \ge \ell\ ,$$

anebo vždy platí opačné „nerovnosti".

Například bod $(0,0)$ je inflexním bodem grafu funkce

$$f(x) = x^3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,$$

protože v něm G_f přechází z dolní na horní stranu tečny $y = 0$ (tento příklad spadá pod větu 16).

Následující tvrzení podává nutnou podmínku pro inflexi: funkce je v daném bodě diferencovatelná (aby tam existovala tečna) a druhá derivace neexistuje nebo je nulová.

Tvrzení 15 (inflexe není) *Nechť $f\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a existuje druhá derivace $f''(a) \in \mathbb{R}^*$, která ale není nulová. Pak*

$$(a, f(a)) \text{ není inflexním bodem grafu funkce } f\ .$$

Důkaz. Předpoklad o f'' znamená, že (po případném zmenšení δ) existuje vlastní $f'\colon U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. Nechť $f''(a) > 0$, případ s $f''(a) < 0$ se probere podobně. Nechť ℓ je tečna ke G_f v $(a, f(a))$, takže má sklon $f'(a)$ a prochází bodem $(a, f(a))$. Podle tvrzení 5 existuje $\theta \le \delta$, že pro každé $x \in P^-(a,\theta)$ a každé $x' \in P^+(a,\theta)$ je

$$f'(x) < f'(a) \ \text{ a } \ f'(x') > f'(a)\ . \tag{1}$$

Nechť $x \in P^{-}(a, \theta)$ a $x' \in P^{+}(a, \theta)$ jsou libovolná čísla a s a t jsou po řadě sklony sečen

$$\kappa(x,\, f(x),\, a,\, f(a)) \ \text{ a } \ \kappa(a,\, f(a),\, x',\, f(x'))$$

grafu G_f. Díky nerovnostem (1) a větě 2 o střední hodnotě snadno vidíme, že $s < f'(a) < t$. Tedy

$$(x,\, f(x)) > \ell \wedge (x',\, f(x')) > \ell$$

a podmínka v definici 14 není splněna. $\square$

Postačující podmínku pro inflexi uvedeme bez důkazu.

Věta 16 (inflexe je) *Nechť $f\colon U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, pro každé $b \in U(a, \delta)$ existuje vlastní $f''(b)$, $f''(a) = 0$, $f'' \geq 0$ na $P^{-}(a, \delta)$ a $f'' \leq 0$ na $P^{+}(a, \delta)$, anebo tyto dvě nerovnosti platí otočené. Pak*

$$(a,\, f(a)) \text{ je inflexním bodem grafu funkce } f\ .$$

• *Asymptoty funkce.* Asymptota funkce je přímka, která může být i svislá a k níž se graf funkce neomezeně blíží.

Definice 17 (svislé asymptoty) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý limitní bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Když*

$$\lim_{x \to b^{-}} f(x) = \pm\infty\ ,$$

nazveme přímku $x = b$ levou svislou asymptotou funkce f. Pravé svislé asymptoty se definují podobně.

Například $x = 0$ je levou i pravou svislou asymptotou funkce $f(x) = 1/x\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a je pravou svislou asymptotou funkce $f(x) = \log x\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Definice 18 (asymptoty v nekonečnu) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ je limitní bod množiny M, $s, b \in \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Když*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - sx - b) = 0 \ ,$$

nazveme přímku $y = sx + b$ asymptotou funkce f v $+\infty$. Asymptoty v $-\infty$ se definují podobně.

Patrně je $y = sx + b$ asymptotou funkce f v $+\infty$, právě když $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = s$ a $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - sx) = b$. Analogicky pro asymptoty v $-\infty$. Například $y = 0 = 0x + 0$ je asymptotou funkce $f(x) = 1/x$ v $+\infty$ i v $-\infty$.

• *Určení průběhu funkce.* Určení průběhu funkce f, obvykle dané vzorcem, začneme určením jejího definičního oboru, tedy množiny $M \subset \mathbb{R}$ maximální vzhledem k inkluzi, že $f\colon M \to \mathbb{R}$. Skoro vždy to je sjednocení nejvýše spočetně mnoha intervalů. Určíme, zda f není speciálního tvaru (sudá, lichá, periodická, ...). Určíme, kde je f spojitá a kde má f'. V bodech nespojitosti f a v limitních bodech množiny M ležících mimo M nalezneme jednostranné limity. Určíme průsečíky G_f se souřadnými osami a určíme obraz $f[M]$. Spočteme i jednostranné derivace, může pomoci tvrzení 6. Pomocí věty 4 určíme maximální intervaly monotonie. Najdeme lokální a globální extrémy.

Určíme, kde existuje f'', a pomocí věty 12 určíme maximální intervaly konvexity a konkavity. Pomocí tvrzení 15 a věty 16 nalezneme inflexní body grafu. Určíme asymptoty funkce f a pak případně rukou či počítačem načrtneme její graf.

Příklad 1. Nechť

$$f(x) := \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ .$$

Definiční obor je

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\pi n - \pi/2,\ \pi n + \pi/2) \ .$$

Funkce f je π-periodická, protože $\sin(\pi + x) = -\sin x$ a $\cos(\pi + x) = -\cos x$. Díky spojitost sinu a kosinu a díky aritmetice spojitosti je f spojitá na M. Pro $b(n) := \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, je

$$\lim_{x \to b(n)^-} f(x) = +\infty \ \text{ a } \ \lim_{x \to b(n)^+} f(x) = -\infty$$

— každá přímka $x = b(n)$ je tedy levá i pravá svislá asymptota. Ani v $-\infty$ ani v $+\infty$ asymptota neexistuje, neexistují ani limity $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Graf G_f protíná osu y pouze v bodě $(0, 0)$ a osu x právě v bodech $(b(n) - \frac{\pi}{2}, 0) = (\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Protože

$$f'(x) = 1/\cos^2 x > 0 \ \text{ na } \ M \ ,$$

je f na každém intervalu $(b(n) - \pi, b(n))$ rostoucí. Vzhledem k tomu a vzhledem k periodičnosti f nemá žádné extrémy. Díky spojitosti f (nabývání mezihodnot) a hořejším nekonečným limitám je jasné, že

$$f[M] = f[(b(n) - \pi,\ b(n))] = \mathbb{R} \ .$$

Druhá derivace je

$$f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \colon M \to \mathbb{R} \ .$$

Protože $f''(x) = 0 \iff x = b(n) - \frac{\pi}{2}$, $f'' < 0$ na $(b(n) - \pi, b(n) - \frac{\pi}{2})$ a $f'' > 0$ na $(b(n) - \frac{\pi}{2}, b(n))$, je f na $(b(n) - \pi, b(n) - \frac{\pi}{2}]$ ryze konkávní, na $[b(n) - \frac{\pi}{2}, b(n))$ ryze konvexní a inflexní body jsou právě

$$\big(b(n) - \tfrac{\pi}{2},\, 0\big) = (\pi n,\, 0)\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

Příklad 2. (Podle skript R. Černý a M. Pokorný, *Základy matematické analýzy pro studenty fyziky. 1*, MatfyzPress, Praha 2020, str. 193–194.) Nechť

$$f(x) := \arcsin\big(2x/(1+x^2)\big)\,.$$

Definiční obor je

$$M = \mathbb{R}\,,$$

protože definiční obor arkus sinu je $[-1, 1]$ a $2|x| \le 1 + x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ ($x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2 \ge 0$). Tato funkce je lichá, tj. $f(-x) = -f(x)$, protože funkce $\sin x$, $\arcsin x$ a $\frac{2x}{1+x^2}$ jsou liché. Podle vět o spojitosti inverzní funkce, racionální funkce a složené funkce je f spojitá na M. Patrně

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0\,,$$

protože $\frac{2x}{1+x^2} \to 0$ pro $x \to \pm\infty$, a $y = 0 = 0x+0$ tak je asymptotou funkce f v $-\infty$ i v $+\infty$. Nemá svislé asymptoty. G_f protíná obě osy právě a jen v počátku, v bodě $(0, 0)$. Vzorce pro derivaci arkus sinu, složené funkce a podílu dávají, že na $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x}{1+x^2} \ne \pm 1\} =$

$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x/(1+x^2))^2}} \cdot \frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= 2\cdot\frac{(1-x^2)/(1+x^2)^2}{|(1-x^2)/(1+x^2)|} = 2\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2\cdot\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}\,. \end{aligned}$$

Patrně $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \mp 1$ a podle tvrzení 6 se $f'_\pm(1) = \mp 1$. Vzhledem k lichosti f se $f'_\pm(-1) = \pm 1$. Protože $f' < 0$ na $(-\infty, -1)$, $f' > 0$ na $(-1, 1)$ a $f' < 0$ na $(1, +\infty)$, podle věty 4 f na $(-\infty, -1]$ klesá, na $[-1, 1]$ roste a na $[1, +\infty)$ klesá. Též $f(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f(x) > 0$ pro $x > 0$ (a $f(0) = 0$). Podle těchto intervalů monotonie a znamének a podle nulových limit výše vidíme, že f má v $x = -1$ ostré globální minimum s hodnotou $f(-1) = -\pi/2$, že v $x = 1$ má symetricky (díky lichosti) ostré globální maximum s hodnotou $f(1) = \pi/2$ a že nemá žádné další lokální extrémy. Z těchto extrémů a spojitosti f (nabývání mezihodnot) plyne, že

$$f[M] = f[\mathbb{R}] = [-\pi/2,\, \pi/2]\,.$$

Druhá derivace se na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ rovná

$$f''(x) = \frac{-4x\cdot\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,.$$

Protože $f'' < 0$ na $(-\infty, -1)$, $f'' > 0$ na $(-1, 0)$, $f'' < 0$ na $(0, 1)$, $f'' > 0$ na $(1, +\infty)$ a $f''(x) = 0 \iff x = 0$ (druhé derivace $f''(\pm 1)$ neexistují), podle věty 12, tvrzení 15 a věty 16 je f na $(-\infty, -1]$ ryze konkávní, na $[-1, 0]$ ryze konvexní, na $[0, 1]$ ryze konkávní, na $[1, +\infty)$ ryze konvexní a $(0, 0)$ je jediný inflexní bod (v bodech $(-1, f(-1))$ a $(1, f(1))$ neexistují tečny). Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

DĚKUJI ZA POZORNOST!