PŘEDNÁŠKA 7, 28. 3. 2022[1]
DERIVACE FUNKCÍ

• *Derivace funkcí.* Představují další základní pojem matematické analýzy. Setkáváme se s nimi daleko za jejími hranicemi, zejména ve fyzice, ale i v ekonomických, biologických, sociologických a dalších modelech. Často se derivace v bodu a zavádí jen pro funkce definované na nějakém jeho okolí $U(a, \delta)$. Pak ale nemůžeme zderivovat v nule například funkci

$$0 \neq x \mapsto \frac{\sin(1/x)}{\sin(1/x)},\ 0 \mapsto 1\ ,$$

s definičním oborem $M = \mathbb{R} \setminus \{1/\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \ni 0$, který neobsahuje žádné okolí nuly $U(0, \delta)$. A jsou problémy s derivováním inverzní funkce, jak později vysvětlíme. Vydáme se proto obecnější cestou a derivaci funkce v bodě definujeme následovně.

Definice 1 (derivace funkce) *Nechť $a \in M$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ a $f = f(x)\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme*

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a řekneme, že tato limita $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) \in \mathbb{R}^*$ je derivace funkce f v bodě a.

Rovnost $(*)$ plyne dvojím použitím věty o limitě složené funkce (věta 14 v páté přednášce) nebo přímou úvahou. Je-li derivace f v a vlastní, tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$, řekneme, že f je v a *diferencovatelná.*

[1] Aktualizováno a upraveno 9. 4. 2022.

Pak se pro $x \in M$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{\text{lineární přiblížení k } f} + \underbrace{o((x-a))}_{\text{jeho chyba}} \quad (x \to a)$$

a f je v okolí bodu a aproximována s dobrou přesností lineární funkcí. V deváté přednášce tuto aproximaci zesílíme polynomiální aproximací. Definujeme jednostranné derivace.

Definice 2 (jednostranné derivace) *Nechť je $a \in M$ levý, resp. pravý, limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme*

$$f'_-(a) := \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\ ,$$

resp.

$$f'_+(a) := \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\ ,$$

a řekneme, že $f'_-(a) \in \mathbb{R}^*$, resp. $f'_+(a) \in \mathbb{R}^*$, je derivace funkce f v bodě a zleva, resp. zprava.

Obě rovnosti $(*)$ se zdůvodní podobně jako pro obyčejnou derivaci.

Derivace a jednostranné derivace mají následující vztahy. Když má f v a derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}^*$, pak má f v a alespoň jednu jednostrannou derivaci a $f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$, kdykoli jsou tyto hodnoty definované. Když má f v a shodné jednostranné derivace $f'_-(a) = f'_+(a) = L \in \mathbb{R}^*$, pak i $f'(a) = L$. Když se ale $f'_-(a) \neq f'_+(a)$, pak $f'(a)$ neexistuje.

- *Derivace a extrémy.* Uvažme funkci $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, a limitní body 0 a 1 jejího definičního oboru $[0,1]$. Pak

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

a podobně $f'(1) = 1$. Současně má f v 0 globální minimum a v 1 globální maximum. To ale znamená, že následující věta neplatí.

> Když má funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ v limitním bodu $b \in M$ množiny $M \subset \mathbb{R}$ derivaci $f'(b) \neq 0$, pak f nemá v b lokální extrém.

Existují skripta z matematické analýzy, která tuto větu úspěšně „dokazují". Abychom ji dostali ve větě 4 níže v platné podobě, zavedeme speciální druh limitních bodů.

Definice 3 (OLB) *Bod $a \in M$ je oboustranný limitní bod, krátce* OLB, *množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud*

$$\forall\, \delta\colon P^-(a,\delta) \cap M \neq \emptyset \neq P^+(a,\delta) \cap M\ .$$

Bod a tak má *nalevo i napravo* od sebe libovolně blízko další body z množiny M. Každý OLB množiny M je jejím limitním bodem, ale naopak to obecně neplatí.

Věta 4 (příznak extrému) *Předpokládejme, že $b \in M$ je* OLB *množiny $M \subset \mathbb{R}$ a že $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce, pro níž derivace $f'(b) \in \mathbb{R}^*$ existuje a není nula. Potom*

$$\forall\, \delta\ \exists\, c,\, d \in U(b,\delta) \cap M\colon f(c) < f(b) < f(d)$$

— funkce f nemá v bodě b lokální extrém, to jest nemá v bodě b ani lokální minimum ani lokální maximum.

Důkaz. Nechť b, M a f jsou, jak je uvedeno, a nechť je dáno číslo δ. Předpokládáme, že $f'(b) < 0$, případ s $f'(b) > 0$ je podobný. Vezmeme tak malé ε, že $U(f'(b), \varepsilon) < \{0\}$ (tj. $y \in U(f'(b), \varepsilon) \Rightarrow y < 0$). Nyní podle definice 1 existuje takové θ, že

$$x \in P(b,\, \theta) \cap M \Rightarrow \overbrace{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}}^{\text{toto je} < 0} \in U(f'(b),\, \varepsilon)\ .$$

Tedy když $x \in P^-(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) > f(b)$, protože $x - b < 0$ a hořejší zlomek je záporný. Podobně když $x \in P^+(b, \theta) \cap M$, pak $f(x) < f(b)$. Můžeme předpokládat, že $\theta \le \delta$, a vzít jakékoli

$$c \in P^+(b,\, \theta) \cap M \ \text{ a } \ d \in P^-(b,\, \theta) \cap M\ .$$

Oba prvky c a d existují díky tomu, že b je OLB množiny M (tady právě výše zmíněná skripta chybují, když b není OLB množiny M). Dostáváme, že $c, d \in U(b, \delta) \cap M$, $f(c) < f(b)$ a $f(d) > f(b)$. $\square$

Jinak řečeno, funkce může mít lokální extrém jen v těch bodech, které (i) nejsou OLB jejího definičního oboru nebo (ii) v nich její derivace neexistuje nebo (iii) v nich je její derivace nulová.

• *Derivace a spojitost.* Existence vlastní derivace funkce v daném bodě je silnější vlastnost, než její spojitost v tomto bodě.

Tvrzení 5 (derivace a spojitost) *Nechť $b \in M \subset \mathbb{R}$ je limitní bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Má-li f vlastní derivaci $f'(b) \in \mathbb{R}$, je f v bodě b spojitá. Totéž platí pro obě jednostranné derivace a odpovídající jednostranné spojitosti.*

Důkaz. Podle věty o aritmetice limit funkcí se limita

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to b} f(x) &= \lim_{x\to b}\left(f(b) + (x-b)\cdot\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\right)\\
&= \lim_{x\to b} f(b) + \lim_{x\to b}(x-b)\cdot\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\\
&= f(b) + 0\cdot f'(b)\\
&= f(b)
\end{aligned}$$

a podle tvrzení 5 v páté přednášce je f v b spojitá. Stejný výpočet funguje pro obě jednostranné derivace, limity a spojitosti. □

Verzi s jednostrannými derivacemi použijeme příště pro konvexní a konkávní funkce.

Patrně

$$\mathrm{sgn}'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sgn}(x)-\mathrm{sgn}(0)}{x-0} = \frac{1}{0^+},\ \frac{-1}{0^-} = +\infty\ .$$

Existence nevlastní derivace tak obecně neimplikuje spojitost funkce v daném bodě, protože $\mathrm{sgn}(x)$ je v nule nespojitá, dokonce tam není spojitá ani zleva ani zprava.

Ve druhém příkladu spočítáme v nule jednostranné derivace funkce absolutní hodnoty. Jsou různé,

$$(|x|)'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0} = -1 \ \text{ a } \ (|x|)'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0} = 1\ ,$$

takže $(|x|)'(0)$ neexistuje. Ovšem $|x|$ je v nule spojitá, tudíž spojitost funkce v daném bodě nezaručuje existenci derivace.

Ve třetím příkladu spočteme derivace funkce odmocniny

$$\sqrt{x}\colon [0,\,+\infty) \to [0,\,+\infty)\ .$$

Nechť $a > 0$. Pak

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ .\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí díky aritmetice limit funkcí. V nule je

$$(\sqrt{x})'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty\ .$$

Ovšem $\sqrt{x}$ je v 0 spojitá. Nevlastní derivace tedy není na překážku spojitosti. Mohli jsme napsat i $(\sqrt{x})'_+(0)$ a není to špatně, ale je to zavádějící, protože z hlediska definice 1 je levý konec 0 intervalu $[0,+\infty)$ prostě jeho limitní bod jako každý jiný. Psát $(\sqrt{x})'_+(0)$ musí ti, kdo definují obyčejnou (oboustrannou) derivaci pouze ve vnitřních bodech, protože v krajních ji pak nemají k dispozici. Hodnota $(\sqrt{x})'_-(0)$ není definovaná, protože 0 není levý limitní bod definičního oboru $[0,+\infty)$.

V posledním čtvrtém příkladu spočítáme derivace konstantních funkcí a derivace mocnin s přirozeným exponentem.

Tvrzení 6 (c' a $(x^n)'$) *Platí následující vzorce.*

1. *Je-li pro $c \in \mathbb{R}$ pomocí $f_c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ označena konstantní funkce s hodnotou c, pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ se*

$$f_c'(a) = 0\ .$$

2. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $a \in \mathbb{R}$ je*

$$(x^n)'(a) = na^{n-1}\ .$$

Důkaz. 1. Nechť $a, c \in \mathbb{R}$. Pak je

$$f_c'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f_c(x) - f_c(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} 0 = 0\ .$$

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$. Pak je

$$\begin{aligned}
(x^n)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}) \\
&= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{n \text{ sčítanců}} = na^{n-1}\ .
\end{aligned}$$

Předposlední rovnost platí díky větě o aritmetice limit funkcí. □

V tvrzení 18 uvedeme příklad nespojité derivace.

• *Geometrie derivací: tečny.* V této pasáži uvedeme dvě (vlastně dokonce tři) definice tečny ke grafu funkce, v různých možných přístupech k tomuto pojmu. *Graf* funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je množina bodů v rovině

$$G_f := \{(x,\ f(x)) \mid x \in M\} \subset \mathbb{R}^2\ .$$

První definice tečen je tato.

Definice 7 (standardní) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce, která je v a diferencovatelná. Tečnou ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$ rozumíme přímku ℓ danou rovnicí*

$$\ell\colon y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)\ ,$$

tedy jedinou přímku se sklonem (směrnicí) $f'(a)$, která prochází bodem $(a, f(a))$.

Tímto vzorcem bychom mohli skončit a často jím také vyprávění o tečnách končívají. My se ale vydáme dále a ukážeme, jak tečny definovat i bez zmínky o derivaci. Často se totiž uvádí, že tečna v daném bodě B je nějak limitou sečen, přímek procházejících B a dalším bodem B' grafu, když se B' limitně blíží k B. Ovšem podrobnosti tohoto limitního přechodu nebývají uvedeny. My ho zde popíšeme.

Pro dva různé body $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$ v rovině definujeme jimi jdoucí *přímku* jako množinu

$$\kappa(a,\, b,\, a',\, b') := \{(a,\, b) + t \cdot (a' - a,\, b' - b) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2\ . \quad (\kappa)$$

Když $\lambda \subset \mathbb{R}^2$ je přímka a $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$ jsou dva různé body, pak se lehce vidí, že

$$\lambda = \kappa(a,\, b,\, a',\, b') \iff (a,\, b) \in \lambda \wedge (a', b') \in \lambda\ .$$

Pro každou přímku je v každé její reprezentaci (κ) buď vždy $a = a'$, anebo vždy $a \neq a'$. V prvním případě mluvíme o *svislé* přímce a ve druhém případě o *nesvislé* přímce. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. *Sečnou* grafu G_f funkce f je každá přímka

$$\kappa(x,\, f(x),\, x',\, f(x')),\ x,\, x' \in M,\ x \neq x'\ .$$

Každá sečna je nesvislá. Je-li dán význačný bod $(a, f(a)) \in G_f$, *hlavní* sečny procházejí jím a nějakým dalším *vedlejším* bodem grafu G_f. Ostatní sečny grafu G_f jsou *nehlavní*.

Každé dvojici $(s, b) \in \mathbb{R}^2$ můžeme ale také přiřadit množinu (jak uvidíme, přímku)

$$\ell(s,\, b) := \{(x,\, sx + b) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{ℓ}$$

se *sklonem* s. Není těžké dokázat, že (i) každá množina $\ell(s, b)$ je nesvislá přímka, že (ii) každá nesvislá přímka je tvaru (ℓ) a že (iii) pro každou nesvislou přímku κ existuje právě jedna dvojice $(s, b) \in \mathbb{R}^2$, že $\kappa = \ell(s, b)$. Zobrazení

$$(s,\, b) \mapsto \ell(s,\, b),\ \text{viz } (\ell)\ ,$$

je tedy bijekce z $\mathbb{R}^2$ do množiny všech nesvislých přímek. Sklon nesvislé přímky je proto určen jednoznačně. Sklon s nesvislé přímky $\kappa(a,\, b,\, a',\, b')$ se snadno spočte jako

$$s = \frac{b' - b}{a' - a}\ .$$

Definujeme limitu posloupnosti nesvislých přímek.

Definice 8 (limity přímek) *Když ℓ je nesvislá přímka, (ℓ_n) je posloupnost nesvislých přímek a jejich reprezentace (ℓ) $\ell = \ell(s, b)$ a $\ell_n = \ell(s_n, b_n)$ splňují vztahy*

$$\lim s_n = s \wedge \lim b_n = b\ ,$$

potom píšeme $\lim \ell_n = \ell$ *a řekneme, že přímky ℓ_n mají limitu ℓ.*

Limity přímek jsou jednoznačné, protože jednoznačné jsou reprezentace (ℓ) i limity reálných posloupností. Uvedeme druhou definici tečen.

Definice 9 (limitní) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce a nechť ℓ je nesvislá přímka. Pokud pro každou posloupnost $(x_n) \subset M \setminus \{a\}$ s $\lim x_n = a$ máme ve smyslu definice 8, že*

$$\lim \kappa(a,\, f(a),\, x_n,\, f(x_n)) = \ell\ ,$$

pak přímku ℓ prohlásíme tečnou ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$.

Tečna v $(a, f(a))$ je tak v této definici limita každé posloupnosti hlavních sečen grafu, jejichž vedlejší body jdou v limitě k $(a, f(a))$. Je to (rigorózní!) definice tečny bez použití $f'(a)$. Níže ve větě 11 uvedeme ještě třetí definici tečny, která dokonce ani nezmiňuje bod $(a, f(a))$.

Ukážeme, že tečna ℓ v bodě $(a, f(a))$ tímto bodem prochází. Označíme si

$$\kappa_n := \kappa(a, f(a), x_n, f(x_n)) = \ell(s_n, f(a) - s_n a)\ .$$

Pak $\lim s_n = s$, kde s je sklon tečny ℓ, a $\lim \kappa_n = \ell(s, f(a) - sa)$. Tato limita přímek je jednoznačná, takže $\ell = \ell(s, f(a) - sa)$ a podle (ℓ) je $(a, f(a)) \in \ell$.

Následující věta dokazuje ekvivalenci obou definic tečen.

Věta 10 (ekvivalence definic) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce a ℓ je nesvislá přímka. Dvě následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Přímka ℓ je tečnou ke G_f v bodě $(a, f(a))$ podle definice 9.*

2. *Funkce f má derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$ a*

$$\ell = \ell(f'(a),\ f(a) - a \cdot f'(a)) \ ,$$

takže ℓ je tečnou ke G_f v $(a, f(a))$ podle definice 7.

Důkaz. Nechť a, M, f a ℓ jsou, jak uvedeno.

Implikace $1 \Rightarrow 2$. Předpokládáme, že ℓ je tečna ke G_f v bodě $(a, f(a))$ podle definice 9. Nechť $(x_n) \subset M \setminus \{a\}$ je libovolná posloupnost s $\lim x_n = a$, nechť $\kappa_n := \kappa(a, f(a), x_n, f(x_n))$ a nechť s_n je sklon sečny κ_n. Podle předpokladu je $\lim \kappa_n = \ell$, takže podle vzorečku pro sklon je

$$\lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim s_n = s \ ,$$

kde s je sklon přímky ℓ. Podle Heineho definice limity funkce a definice 1 máme, že $f'(a) = s$. Výše jsme dokázali, že tečna ℓ jde bodem $(a, f(a))$, tudíž

$$\ell = \ell(s,\ f(a) - a \cdot s) = \ell(f'(a),\ f(a) - a \cdot f'(a)) \ .$$

Implikace $1 \Leftarrow 2$. Předpokládáme, že existuje $f'(a) \in \mathbb{R}$ a že ℓ je dána uvedeným vzorcem. Nechť $(x_n) \subset M \setminus \{a\}$ je libovolná posloupnost s $\lim x_n = a$. Podle předpokladu a Heineho definice limity funkce je

$$\lim \underbrace{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}_{s_n} = f'(a)\ .$$

Protože zlomek s_n je sklon hlavní sečny $\kappa_n := \kappa(a, f(a), x_n, f(x_n)) = \ell(s_n, f(a) - s_n a)$, tyto sečny mají limitu

$$\lim \kappa_n = \ell(f'(a),\ f(a) - f'(a) \cdot a) = \ell\ .$$

Podle definice 9 je tedy ℓ tečnou ke G_f v bodě $(a, f(a))$. $\square$

Tato věta není zase až tak překvapivá. Zajímavější je následující věta, pro jejíž důkaz bohužel nemáme čas (časem viz článek "*New look* ..." na `https://arxiv.org/`).

Věta 11 (limity nehlavních sečen) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je* OLB *množiny M, $f\colon M \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ je funkce a ℓ je nesvislá přímka. Dvě následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Funkci f lze rozšířit hodnotou $f(a) = f_0(a)$ na funkci $f_0\colon M \to \mathbb{R}$ tak, že ℓ je tečna ke G_{f_0} v bodě $(a, f_0(a))$.*
2. *Pro libovolné dvě posloupnosti $(x_n), (x'_n) \subset M \setminus \{a\}$ splňující, že $\lim x_n = \lim x'_n = a$ a $x_n < a < x'_n$ pro každé n, platí podle definice 8 limita přímek*

$$\lim \kappa(x_n,\ f(x_n),\ x'_n,\ f(x'_n)) = \ell\ .$$

Tečna je tak podle druhé části limita všech posloupností nehlavních sečen grafu, jejichž dvojice určujících bodů jdou v limitě k $(a, f_0(a))$ a členy dvojic jsou bodem $(a, f_0(a))$ oddělené. Je tak podána definice tečny v neexistujícím bodě $(a, f(a))$ grafu G_f!

• *Aritmetika derivací.* Probereme vztahy derivací a aritmetických operací.

Tvrzení 12 (linearita derivací) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, dále $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom rovnost*

$$(\alpha f(x))'(a) = \alpha f'(a)$$

platí, kdykoli je jedna strana definovaná, a rovnost

$$(f(x) + g(x))'(a) = f'(a) + g'(a)$$

platí, kdykoli je pravá strana definovaná. Stejné vzorce platí i pro jednostranné derivace.

Důkaz. Podle aritmetiky limit funkcí je

$$(\alpha f(x))'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(a)}{x - a} = \alpha \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha f'(a)\ .$$

Nechť $h(x) := f(x) + g(x)$. Pak podle aritmetiky limit funkcí též

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a)\ , \end{aligned}$$

je-li poslední výraz definovaný v aritmetice $\mathbb{R}^*$. Pro jednostranné derivace jsou oba výpočty stejné. $\square$

Například (definiční obor je $[0, +\infty)$)

$$(\mathrm{sgn}(x) + \sqrt{x})'(0) = \mathrm{sgn}'(0) + (\sqrt{x})'(0) = +\infty + (+\infty) = +\infty\ .$$

Jako úlohu zkuste vypočítat $(\mathrm{sgn}(x) - \sqrt{x})'(0)$.

Věta 13 (Leibnizův vzorec) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M a nechť $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Když je f nebo g spojitá v a, pak*

$$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \ ,$$

je-li pravá strana definovaná. Totéž platí pro jednostranné derivace a jednostranné spojitosti.

Důkaz. Nechť je funkce g spojitá v a, druhý případ s f je symetrický. Podle předpokladů a podle věty o aritmetice limit funkcí je

$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))g(x) + f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&\overset{g \text{ je spojitá v } a}{=} f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ .
\end{aligned}$$

Pro jednostranné derivace je výpočet velmi podobný. □

Vzorec je nazván po německém filosofovi, matematikovi a polyhistorovi *Gottfriedu W. Leibnizovi (1646–1716)*, který vedle I. Newtona spoluobjevil diferenciální a integrální počet. Následující příklad ukazuje, že jsou-li f a g nespojité v a, Leibnizův vzorec nemusí platit. Pochopitelně to může nastat, jen když $f'(a)$ a $g'(a)$ jsou nevlastní, neboť vlastní derivace implikuje spojitost (tvrzení 5).

Nechť $a := 0$ a funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou dány jako

$$f(x) = -g(x) := \operatorname{sgn} x \ \text{ pro } \ x \neq 0, \ f(0) := -\tfrac{1}{2} \ \text{ a } \ g(0) := \tfrac{1}{2} \ .$$

Potom pravá strana Leibnizova vzorce je $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, ale levá není definovaná.

Tvrzení 14 (derivace podílu) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M a $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Když $g(a) \neq 0$ a g je spojitá v a, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}\ ,$$

je-li pravá strana definovaná. Totéž platí pro jednostranné derivace a jednostranné spojitosti.

Důkaz. Předpoklady a věta o aritmetice limit funkcí dávají, že

$$(f/g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f(x)/g(x)) - (f(a)/g(a))}{x - a} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} \frac{g(a)}{g(x)g(a)} - \lim_{x \to a} \frac{f(a)}{g(x)g(a)} \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
$$\overset{g \text{ je spojitá v } a}{=} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Pro jednostranné derivace je výpočet velmi podobný. □

Opět lze na příkladu ukázat, že vzorec pro derivaci podílu obecně neplatí pro g nespojitou v a.

• *Derivace složené funkce a derivace inverzní funkce.* Uvedeme vzorce pro tyto derivace. Pro stručnost neuvádíme verze pro jednostranné derivace a z časových důvodů také *zde* pomíjíme důkazy. Druhou zmíněnou větu ale zato předkládáme v obecnější a lepší podobě, než se nalezne kdekoli jinde.

Věta 15 (derivace složené funkce) *Nechť* $a \in M \subset \mathbb{R}$, *a je limitní bod množiny* M, $g\colon M \to N$ *je funkce spojitá v* a, *s derivací* $g'(a) \in \mathbb{R}^*$ *a taková, že* $g(a) \in N$ *je limitní bod množiny* $N \subset \mathbb{R}$, *a nechť* $f\colon N \to \mathbb{R}$ *je funkce s derivací* $f'(g(a)) \in \mathbb{R}^*$. *Pak složená funkce*

$$f(g)\colon M \to \mathbb{R}$$

má derivaci

$$(f(g))'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\ ,$$

je-li tento součin definovaný, tj. není to ani $0 \cdot (\pm\infty)$ *ani* $(\pm\infty) \cdot 0$.

Důkaz.
`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/slozfce.pdf`, až to ale sepíšu. □

[2]Obvyklé formulace věty o derivaci inverzní funkce jsou vzhledem k používaným derivacím — jen pro funkce definované na celých okolích bodů — příliš restriktivní. Jedna taková formulace je tato.

> Nechť I je nedegenerovaný interval a nechť a je vnitřním bodem I. Nechť f je spojitá a ryze monotónní funkce na I. Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.
>
> (a) Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak
>
> $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

[2]Tato poznámka směřuje k vyučujícím matematické analýzy.

(b) Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I, pak

$$(f^{-1})'(b) = \infty.$$

(c) Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I, pak

$$(f^{-1})'(b) = -\infty.$$

Vidíme, že aby b byl vnitřním bodem definičního oboru funkce f^{-1} (a $(f^{-1})'(b)$ tak vůbec měla šanci být definovaná), byly na funkci f naloženy další podmínky a bylo značně zregulováno její chování *mimo bod* a. „Správná“ věta o derivaci inverzní funkce, kterou teď představíme, nesmí předpokládat o chování f mimo a (pochopitelně musí předpokládat prostotu f) a f^{-1} mimo b nic nad rámec růstu či klesání f v a, existence derivace f v a a spojitosti f^{-1} v b. Taková věta ovšem musí používat obecnější pojem derivace, definované v libovolném limitním bodu definičního oboru.

Definujeme, že $f\colon M \to \mathbb{R}$ *roste*, resp. *klesá, v bodě* $a \in M \subset \mathbb{R}$, pokud pro nějaké δ platí, že

$$x \in P^-(a, \delta) \cap M,\, x' \in P^+(a, \delta) \cap M \Rightarrow f(x) < f(a) < f(x')\ ,$$

resp. platí opačné nerovnosti. Tady je tedy naše verze věty o derivaci inverzní funkce. Je třeba připomenout, že je pro derivace podle definice 1.

Věta 16 (derivace inverzní funkce) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, a je limitní bod množiny M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce s derivací $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a inverzní funkce $f^{-1}\colon f[M] \to M$ je spojitá v $b := f(a)$. Potom platí následující.*

1. *Když $f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak f^{-1} má derivaci*
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\ .$$
2. *Když $f'(a) = 0$ a f roste, resp. klesá, v bodě a, pak f^{-1} má derivaci*
$$(f^{-1})'(b) = +\infty,\ \textit{resp.}\ (f^{-1})'(b) = -\infty\ .$$
3. *Když $f'(a) = \pm\infty$ a b je limitní bod množiny $f[M]$, pak f^{-1} má derivaci*
$$(f^{-1})'(b) = 0\ .$$

Důkaz.
`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/inverfce.pdf`, až to ale sepíšu. □

• *Tabulka derivací elementárních funkcí.* Uvedeme vzorce pro tyto derivace. Pár jsme jich už dokázali.

Věta 17 (tabulka derivací) *Platí následující derivace.*

1. *Na* $\mathbb{R}$ *se* $\exp(x)' = \exp(x)$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$, $(\mathrm{arccot}\, x)' = -1/(1+x^2)$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $c' = 0$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.
2. *Na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *se* $(x^b)' = bx^{b-1}$ *pro záporné* $b \in \mathbb{Z}$.
3. *Na* $(0, +\infty)$ *se* $(x^b)' = bx^{b-1}$ *pro* $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *a* $(\log x)' = 1/x$.
4. *Na* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *se* $(\tan x)' = 1/(\cos x)^2$.
5. *Na* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *se* $(\cot x)' = -1/(\sin x)^2$.
6. *Na* $(-1, 1)$ *se* $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ *a* $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$.

Důkaz.
`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/tabuderi.pdf`, až to ale sepíšu. □

Občas se lze setkat s omylem, že derivace funkce musí být spojitá. Je asi způsobený záměnou s platným tvrzením o spojitosti funkce v bodu, kde má vlastní derivaci. Závěrem proto uvedeme příklad funkce s nespojitou derivací.

Tvrzení 18 (nespojitá derivace) *Funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *kde* $f(x) := x^2\sin(1/x)$ *pro* $x \neq 0$ *a* $f(0) := 0$, *má všude definovanou derivaci*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \dots \quad x \neq 0 \quad a \\ 0 & \dots \quad x = 0\ , \end{cases}$$

jež je nespojitá v 0.

Důkaz. Pro $x \neq 0$ plyne vzorec pro $f'(x)$ z Leibnizova vzorce, vzorce pro derivaci sinu, vzorce pro derivaci složené funkce a vzorce pro derivaci funkce x^b. V nule máme podle definice 1

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0\ .$$

V 0 je f' zřejmě nespojitá, protože pro $x \to 0$ i $2x\sin(1/x) \to 0$, ale hodnoty funkce $\cos(1/x)$ oscilují s frekvencí jdoucí do ∞ v celém intervalu $[-1, 1]$. $\square$

DĚKUJI ZA POZORNOST!