PŘEDNÁŠKA 6, 21. 3. 2022
VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCÍ

• *Heineho definice spojitosti funkce v bodě.* Z minulé přednášky víme, že spojitost funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in M \subset \mathbb{R}$ znamená, že

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta: \ f[U(a,\,\delta) \cap M] \subset U(f(a),\,\varepsilon)\ .$$

V této přednášce několikrát (konkrétně $9\times$) použijeme následující výsledek.

Tvrzení 1 (Heineho definice) *Funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M \subset \mathbb{R}$, právě když*

$$\forall\, (a_n) \subset M\colon\ \lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)\ .$$

Důkaz. Tuto ekvivalenci jsme už dokázali pro limitní body jako $1 \iff 3$ v tvrzení 5 minulé přednášky. Je-li $a \in M$ izolovaný bod množiny M, je f v a spojitá podle tvrzení 7 minulé přednášky. Pak však $\lim a_n = a$ znamená, že $a_n = a$ pro každé $n \geq n_0$. Tedy i $f(a_n) = f(a)$ pro každé $n \geq n_0$ a $\lim f(a_n) = f(a)$. $\square$

Definice 2 (spojitost na množině) *Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá (na M), je-li spojitá v každém bodu množiny M.*

• *Husté množiny.* Zavedeme vztah hustoty jedné množiny ve druhé.

Definice 3 (husté množiny) *Nechť je $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že množina N je hustá v množině M, když*

$$\forall\, a \in M\ \forall\, \delta:\ U(a,\, \delta) \cap N \neq \emptyset\ .$$

Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Je jasné, že množina N je hustá v M, právě když pro každý bod $a \in M$ existuje taková posloupnost $(b_n) \subset N$, že $\lim\, b_n = a$. Například množina zlomků $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 4 (hustota a spojitost) *Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$, množina N je hustá v M a $f,\, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou takové dvě spojité funkce, že $\forall\, x \in N\colon\ f(x) = g(x)$. Potom*

$$f = g\ ,$$

takže se funkce f a g úplně shodují.

Důkaz. Nechť $y \in M$ je libovolný bod a $(a_n) \subset N$ je posloupnost s $\lim\, a_n = y$. Pak

$$f(y) = f\,(\lim\, a_n) = \lim\, f(a_n) = \lim\, g(a_n) = g\,(\lim\, a_n) = g(y)\ .$$

Zde druhá a čtvrtá rovnost plynou z tvrzení 1. Třetí rovnost plyne z předpokladu rovnosti f a g na N. Proto $f = g$ úplně. $\square$

Připomeneme si, že když $A \subset B$ a C jsou množiny a $f\colon B \to C$ je funkce, její *zúžení* (či *restrikce*) na A je funkce $f \mid A\colon A \to C$ daná jako $\forall\, x \in A\colon (f \mid A)(x) := f(x)$.

Věta 5 (H. Blumberg, 1922) *Pro každou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existuje taková množina $M \subset \mathbb{R}$ hustá v $\mathbb{R}$, že restrikce $f \mid M$ je spojitá funkce.*

Henry Blumberg (1886–1950) byl americký matematik, který se narodil v Litvě.

- *Počet spojitých funkcí.* Pro $M \subset \mathbb{R}$ zavedeme značení

$$C(M) := \{f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\} ,$$

což tedy je množina všech spojitých reálných funkcí definovaných na množině M. Následující věta je základní výsledek v teorii množin.

> **Věta 6 (Cantor–Bernsteinova)** *Když existují prostá zobrazení $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$, pak existuje bijekce*
>
> $$h\colon X \to Y .$$
>
> *Tu lze navíc zvolit tak, že pro každé $x \in X$ se $h(x) = f(x)$ nebo se $h(x) = g^{-1}(x)$.*

Kolik je spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Tolik jako reálných čísel.

> **Věta 7 (počet spoj. funkcí)** *$\exists$ bijekce $h\colon \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$.*

Důkaz. Podle předešlé věty stačí nalézt injekce $f\colon \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$ a $g\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. První z nich je jasná,

$$f(a) := (b \mapsto a) ,$$

tj. $f(a)$ je konstantní funkce s hodnotou a.

Popíšeme druhou injekci $g\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. S prvky v $\mathbb{R}$ budeme zacházet jako s nekonečnými desetinnými rozvoji, například $-\pi = -3.141592\dots$ nebo $2022.00000\dots$. Podle tvrzení 4 je každá funkce $j \in C(\mathbb{R})$ jednoznačně určená už svými spočetně mnoha hodnotami $j(x)$, $x \in \mathbb{Q}$. Nechť $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jsou bijekce, například $(k, l, n \in \mathbb{N})$

$$s(n) = s(2^{k-1} \cdot (2l - 1)) = (s_1(n),\, s_2(n)) := (k,\, l)\ .$$

Desítkové cifry 0, 1, ..., 9, desetinnou tečku . a znaménko minus $-$ kódujeme dvěma desítkovými ciframi:

$$c(0) := 00,\ c(1) := 01,\ \ldots,\ c(9) := 09,\ c(.) := 10\ \text{ a }\ c(-) := 11\ .$$

Zobrazení $g\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ má na funkci $j \in C(\mathbb{R})$ hodnotu

$$g(j) := 0.a_1\, a_2\, a_3\ \ldots\ a_{2n-1}\, a_{2n}\ \ldots\ =: \alpha\ .$$

Cifry $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ definujeme následovně. Pro každé $k, l \in \mathbb{N}$ uvážíme desetinný rozvoj

$$j(r(k)) =: b(1,\, k)\, b(2,\, k)\ \ldots\ b(l,\, k)\ \ldots$$

hodnoty $j(r(k))$ funkce j na zlomku $r(k) \in \mathbb{Q}$, s použitými symboly $b(l, k) \in \{0, 1, \ldots, 9, ., -\}$. Pak definujeme

$$a_{2n-1}\, a_{2n} = c(b(l, k)) := c(b(s_1(n),\, s_2(n)))\ .$$

Po chvíli přemýšlení vidíme, že takto definované zobrazení g je prosté: v jediném desetinném rozvoji α jsou totiž uloženy všechny hodnoty funkce j na všech racionálních číslech. $\square$

• *Spojitá funkce nabývá všechny mezihodnoty.* Obraz funkce signum je množina $\{-1, 0, 1\}$, ale nic mezi těmito třemi body. Obraz intervalu spojitou funkcí takto vypadat nemůže.

Věta 8 (nabývání mezihodnot) *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$. Pak*

$$\exists\, d \in (a, b)\colon\ f(d) = c\ .$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Nechť

$$A := \{x \in [a, b] \mid f(x) < c\} \ \text{ a } \ d := \sup(A) \in [a,\, b]\ .$$

Číslo d je korektně definované, protože množina A je neprázdná ($a \in A$) a shora omezená (např. b je její horní mez). Ukážeme, že jak $f(d) < c$, tak $f(d) > c$ vede ke sporu, takže $f(d) = c$. Ze spojitosti funkce f v a a v b plyne, že $d \in (a, b)$. Nechť $f(d) < c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že existuje δ, že $x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) < c$. Pak ale A obsahuje čísla větší než d, ve sporu s tím, že d je horní mez množiny A. Nechť $f(d) > c$. Ze spojitosti funkce f v d plyne, že existuje δ, že $x \in U(d, \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) > c$. Pak ale každé $x \in [a, d)$ dostatečně blízké d leží mimo A, což je ve sporu s tím, že d je nejmenší horní mez množiny A. □

Důsledek 9 (spojitý obraz intervalu) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval (tj. konvexní množina) a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak*

$$f[I] = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$$

je též interval.

Důkaz. Předešlá věta ukazuje, že množina $f[I]$ je konvexní. □

Následující důsledek věty o nabývání mezihodnot si můžete zkusit vyřešit jako úlohu.

Důsledek 10 (horolezení) *Horolezec začne o půlnoci stoupat na horu, po 24 hodinách dosáhne opět o půlnoci jejího vrcholu a okamžitě zase 24 hodin sestupuje do základního tábora. Dokažte, že existuje čas* $t_0 \in [0, 24]$*, kdy se v těchto dvou dnech horolezec nachází pokaždé ve stejné nadmořské výšce.*

Následující důsledek ale dokážeme. Připomeňme si, že funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je *rostoucí*, resp. *klesající*, (na $M \subset \mathbb{R}$), pokud pro každé $x, y \in M$ je $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$.

Důsledek 11 (spojitost a prostota na intervalu) *Nechť* $I \subset \mathbb{R}$ *je interval a* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *je spojitá prostá funkce. Potom* f *je buď rostoucí anebo klesající.*

Důkaz. Kdyby f nebyla ani rostoucí ani klesající, existovala by v I taková tři čísla $a < b < c$, že $f(a) < f(b) > f(c)$ nebo $f(a) > f(b) < f(c)$. V prvním případu se každé d splňující $f(a), f(c) < d < f(b)$ nabývá podle věty 8 jako hodnoty $d = f(x) = f(y)$ pro nějaké $x \in (a, b)$ a $y \in (b, c)$, což je ve sporu s prostotou funkce f. Ve druhém případu máme velmi podobný spor. □

• *Spojité funkce na kompaktních množinách.* Kompaktní množiny hrají v analýze, ale i jinde (třeba v optimalizaci), důležitou roli.

Definice 12 (kompaktní množiny) *Množina* $M \subset \mathbb{R}$ *je kompaktní, když každá posloupnost* $(a_n) \subset M$ *má konvergentní podposloupnost* (a_{m_n}) *s* $\lim a_{m_n} \in M$.

Podle Bolzano–Weierstrassovy věty a věty o limitě a uspořádání víme, že každý interval $[a, b]$ je kompaktní. Všechny kompaktní množiny popíšeme přesně později. Teď o nich a o spojitých funkcích dokážeme důležitou větu.

Věta 13 (princip minima a maxima) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existují takové body $a, b \in M$, že*

$$\forall\, x \in M\colon f(a) \le f(x) \le f(b)\ .$$

Řekneme, že f nabývá v $a \in M$ na M minimum (svou nejmenší hodnotu) $f(a)$ a že f nabývá v $b \in M$ na M maximum (svou největší hodnotu) $f(b)$.

Důkaz. Dokážeme existenci maxima funkce f, důkaz existence minima je velmi podobný. Patrně $f[M] \neq \emptyset$ a ukážeme, že tato množina je shora omezená. Kdyby nebyla, existovala by posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim f(a_n) = +\infty$. Podle kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $a := \lim a_{m_n} \in M$. Pak i $\lim f(a_{m_n}) = +\infty$. To je ale spor s tím, že podle tvrzení 1 je $\lim f(a_{m_n}) = f(a)$. Lze tedy definovat

$$s := \sup(f[M]) \in \mathbb{R}$$

a podle definice suprema existuje $(a_n) \subset M$ s $\lim f(a_n) = s$. Díky kompaktnosti M má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $b := \lim a_{m_n} \in M$. Podle tvrzení 1 je $\lim f(a_{m_n}) = f(b) = s$. Protože $s = f(b)$ je horní mez množiny $f[M]$, je $f(b) \ge f(x)$ pro každé $x \in M$. $\square$

Pro nekompaktní M věta nemusí platit. Třeba funkce $f\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, je spojitá, ale není shora omezená a nemá tak na

$[0,1)$ maximum. Funkce $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, je spojitá a shora omezená, ale stále na $[0,1)$ nemá maximum. Připomeneme definici globálních a lokálních extrémů.

Definice 14 (globální a lokální) *Nechť je $a \in M \subset \mathbb{R}$ a nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f má v a na M globální maximum, resp. globální minimum, když*

$$\forall\, x \in M\colon\, f(x) \le f(a), \quad \textit{resp.} \quad f(x) \ge f(a)\ .$$

Funkce f má v a na M lokální maximum, resp. lokální minimum, když

$$\exists\, \delta\; \forall\, x \in U(a,\, \delta) \cap M\colon\, f(x) \le f(a), \quad \textit{resp.} \quad f(x) \ge f(a)\ .$$

Platí-li tyto nerovnosti jako ostré ($<$, resp. $>$) pro každé $x \ne a$, mluvíme o ostrém globálním maximu, atd.

• *Kompaktní množiny v $\mathbb{R}$.* Víme, kdy je množina $M \subset \mathbb{R}$ omezená: $\exists\, c\; \forall\, a \in M:\ |a| < c$. Je *uzavřená*, když

$$\forall\, (a_n) \subset M\colon\, \lim\, a_n = a \Rightarrow a \in M\ .$$

Je *otevřená*, když

$$\forall\, a \in M\; \exists\, \delta:\ U(a,\, \delta) \subset M\ .$$

Tvrzení 15 (uzavřené množiny) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená, právě když je množina $\mathbb{R} \setminus M$ otevřená.*

Důkaz. $\mathbb{R} \setminus M$ není otevřená, právě když existuje bod $a \in \mathbb{R} \setminus M$, že pro každé δ je $U(a, \delta) \cap M \ne \emptyset$. Ekvivalentně (volbou bodů

$a_n \in U(a, 1/n) \cap M$) existuje bod $a \in \mathbb{R} \setminus M$ a posloupnost $(a_n) \subset M$, že lim $a_n = a$. Ekvivalentně, M není uzavřená. $\square$

Díky následujícímu strukturnímu popisu si lze otevřené množiny celkem dobře představit. Otevřenými intervaly v něm rozumíme intervaly tvaru $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ a (a, b) s $a < b$.

Tvrzení 16 (struktura ot. množin) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, právě když existuje takový systém otevřených intervalů $\{I_j \mid j \in X\}$, že indexová množina X je nejvýše spočetná, intervaly I_j jsou vzájemně disjunktní a*

$$\bigcup_{j \in X} I_j = M\ .$$

Uzavřené množiny jsou doplňky otevřených, jsou to tedy sjednocení „mezer“ mezi hořejšími intervaly I_j. Pokud $|X| = n \in \mathbb{N}_0$, je těchto mezer nejvýše $n+1$. Obtížně představitelným faktem ale je, že pro spočetnou X množina mezer může být nespočetná. To je důvodem horší představitelnosti uzavřených množin.

Věta 17 (kompaktní množiny v $\mathbb{R}$) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, právě když M je omezená a uzavřená.*

Důkaz. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je omezená a uzavřená a $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost. Protože (a_n) je omezená, má podle Bolzano–Weierstrassovy věty konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $a :=$ lim $a_{m_n} \in \mathbb{R}$. Protože M je uzavřená, $a \in M$. Tedy M je kompaktní.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ není omezená. Sestrojíme takovou posloupnost $(a_n) \subset M$, že $|a_m - a_n| > 1$ pro každé dva indexy $m \neq n$.

Tuto vlastnost dědí i každá podposloupnost, která tedy nemůže být konvergentní a M není kompaktní. První člen posloupnosti $a_1 \in M$ volíme libovolně. Nechť už jsou definovány členy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující, že $|a_i - a_j| > 1$ pro každé dva indexy i, j s $1 \leq i < j \leq n$. Protože M není omezená, existuje bod $a_{n+1} \in M$, že $|a_{n+1}| > 1 + \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$. Pak patrně $|a_{n+1} - a_i| > 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Takto definujeme celou (a_n).

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ není uzavřená. Pak existuje konvergentní posloupnost $(a_n) \subset M$, že $a := \lim a_{m_n} \in \mathbb{R} \setminus M$. Stejnou limitu a má i každá její podposloupnost, která tedy nemá limitu v M. Tedy M není kompaktní. $\square$

• *Spojitost a různé operace.* Uvedeme několik operací, které ze spojitých funkcí vytvářejí opět spojité funkce. S následujícími funkcemi jsme už pracovali v aritmetice limit funkcí, ale raději zde jasně definujeme pro dvě funkce $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jejich *součtovou*, *součinovou* a *podílovou funkci* po řadě jako $(x \in M)$,

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \\
(fg)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \text{ a} \\
(f/g)\,(x) &:= f(x)/g(x)\ .
\end{aligned}
$$

Tvrzení 18 (aritmetika spojitosti) *Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ a $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Potom součtová i součinová funkce*

$$f + g,\ fg\colon M \to \mathbb{R}$$

je spojitá. Pokud $g \neq 0$ na M, je i podílová funkce

$$f/g\colon M \to \mathbb{R}$$

spojitá.

Důkaz. Všechny tři důkazy jsou podobné a proto dokážeme jen část pro podílovou funkci. Nechť $a \in M$ je libovolný bod a $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = a$. Podle tvrzení 1 (implikace $\Rightarrow$) je $\lim f(a_n) = f(a)$ a $\lim g(a_n) = g(a)$. Podle věty o aritmetice limit posloupností je

$$\begin{aligned}\lim\,(f/g)(a_n) &= \lim f(a_n)/g(a_n) = \lim f(a_n)/\lim g(a_n) \\ &= f(a)/g(a) = (f/g)(a)\ .\end{aligned}$$

Podle tvrzení 1 (implikace $\Leftarrow$) je funkce f/g spojitá v bodě a. □

Racionální funkce $r(x)$ je podíl dvou polynomů, tedy funkce tvaru

$$r(x) := \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}\colon M \to \mathbb{R}\ ,$$

kde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ a $a_m b_n \neq 0$, v čitateli povolujeme i identicky nulový polynom. Definičním oborem M této funkce je množina

$$M = \mathbb{R} \setminus \{z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_k\}\ ,$$

kde $z_i \in \mathbb{R}$ jsou všechny reálné kořeny polynomu ve jmenovateli ($k \in \mathbb{N}_0$ a $k \leq n$).

Důsledek 19 (spojitost rac. funkcí) *Každá racionální funkce je spojitá na svém definičním oboru.*

Důkaz. Vyjdeme-li z toho, že identická funkce $f(x) = x$ i každá konstantní funkce $f(x) = c \in \mathbb{R}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, plyne spojitost racionální funkce na definičním oboru opakovaným užitím předchozího tvrzení. $\square$

Všechny dosud uvedené elementární funkce $\exp(x)$, $\log x$, $\cos x$, $\sin x$, a^x $(a \geq 0)$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\tan x$, $\arctan x$, $\cot x$ a $\mathrm{arccot}\, x$ jsou na svých definičních oborech spojité.

Tvrzení 20 (spojitost a skládání) *Nechť $M, N \subset \mathbb{R}$ a $g\colon M \to N$ a $f : N \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak i složená funkce*

$$f(g)\colon M \to \mathbb{R}$$

je spojitá.

Důkaz. Nechť $a \in M$ a $(a_n) \subset M$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = a$. Podle tvrzení 1 (implikace $\Rightarrow$) je $\lim g(a_n) = g(a)$ a také

$$\lim f(g)(a_n) = \lim f(g(a_n)) = f(g(a)) = f(g)(a) \ .$$

Tvrzení 1 (implikace $\Leftarrow$) dává, že funkce $f(g)$ spojitá v bodě a. $\square$

Každá prostá funkce $f\colon A \to B$ má inverzní funkci (či inverz) $f^{-1}\colon f[A] \to A$, daný jako

$$\forall\, y \in f[A]\, \forall\, x \in A\colon f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \ .$$

Věta 21 (spojitost inverzu) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá prostá funkce. Inverz $f^{-1}\colon f[M] \to M$ je spojitý, pokud (i) M je kompaktní nebo (ii) M je interval.*

Důkaz. (i) Předpokládáme, že M je kompaktní, $b \in f[M]$ je libovolný bod a že $(b_n) \subset f[M]$ je libovolná posloupnost s $\lim b_n = b$. Položíme $a := f^{-1}(b) \in M$ a $a_n := f^{-1}(b_n) \in M$. Dokážeme, že $\lim a_n = a$, což dokáže podle tvrzení 1 spojitost f^{-1} v b. Nechť (a_{m_n}) je libovolná podposloupnost posloupnosti $(a_n) \subset M$ s $\lim a_{m_n} = L \in \mathbb{R}^*$. Ale $L \in M$, protože M je omezená a uzavřená množina. Podle tvrzení 1 je $\lim f(a_{m_n}) = f(L) = b$, protože $(f(a_{m_n}))$ je podposloupnost posloupnosti (b_n). Vzhledem k prostotě f se $L = a$. Tedy posloupnost (a_n) nemá dvě podposloupnosti s různými limitami a podle části 2 tvrzení 6 ve druhé přednášce má limitu. Tou ovšem je, jak jsme právě nahlédli, číslo a.

(ii) Nechť M je interval. Podle důsledku 11 je f rostoucí nebo klesající. Nechť je f klesající, případ rostoucí funkce f je podobný. Podle důsledku 9 je $f[M]$ interval. Nechť $b \in f[M]$ a nechť je dáno ε. Ukážeme, že f^{-1} je zprava spojitá v b. Triviálně to platí, když b je pravý konec intervalu $f[M]$, protože pak $U^+(b, \delta) \cap f[M] = \{b\}$. Nechť b není pravý konec tohoto intervalu. Protože f^{-1} je klesající, $a := f^{-1}(b) \in M$ není levý konec intervalu M a můžeme předpokládat, že ε je tak malé, že $[a - \varepsilon, a] \subset M$. Položíme $\delta := f(a - \varepsilon) - f(a) = f(a - \varepsilon) - b$. Protože f^{-1} je klesající, posílá $[b, b + \delta] \subset f[M]$ do $[a - \varepsilon, a] \subset M$. Tedy

$$f^{-1}[U^+(b,\, \delta) \cap f[M]] \subset U(f^{-1}(b),\, \varepsilon) = U(a,\, \varepsilon)$$

a f^{-1} je zprava spojitá v b. Spojitost zleva se dokáže podobně a vidíme, že f^{-1} je spojitá v b. $\square$

Věta dále platí (iii) pro otevřenou M a (iv) pro uzavřenou M, když f je rostoucí či klesající, ale do těchto důkazů se už nebudeme pouštět. Z části (ii) věty plyne spojitost logaritmu a inverzních goniometrických funkcí.

DĚKUJI ZA POZORNOST!