PŘEDNÁŠKA 5, 14. 3. 2022

VLASTNOSTI LIMITY FUNKCE. SPOJITOST FUNKCE V BODĚ

• *Jednostranná limita funkce.* Na rozdíl od $\mathbb{C}$ nebo od prostorů $\mathbb{R}^n$ dimenze $n \geq 2$ se reálná osa $\mathbb{R}$ vypuštěním jednoho bodu rozpadne, a to na dva oddělené kusy. Jsou tedy právě dva směry, z kterých se lze v $\mathbb{R}$ k danému bodu limitně blížit. Odpovídají jim dvě jednostranné limity funkce v daném bodě, limita zleva a limita zprava. Týkají se ale jen vlastních bodů, nikoli nekonečen.

Definice 1 (jednostranná okolí) *Pro reálná čísla ε a b definujeme levé, resp. pravé, ε-okolí bodu b jako*

$$U^-(b,\,\varepsilon) := (b-\varepsilon,\,b],\ \textit{resp.}\ U^+(b,\,\varepsilon) := [b,\,b+\varepsilon)\ .$$

Podobně je levé, resp. pravé, prstencové ε-okolí bodu b definované jako

$$P^-(b,\,\varepsilon) := (b-\varepsilon,\,b),\ \textit{resp.}\ P^+(b,\,\varepsilon) := (b,\,b+\varepsilon)\ .$$

Opět tedy $P^-(b,\,\varepsilon) = U^-(b,\,\varepsilon) \setminus \{b\}$ a $P^+(b,\,\varepsilon) = U^+(b,\,\varepsilon) \setminus \{b\}$. Pomocí těchto okolí definujeme jednostranné limitní body.

Definice 2 (jednostranné limitní body) *Bod $b \in \mathbb{R}$ je levým, resp. pravým, limitním bodem množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud*

$$\forall\,\delta > 0:\ \ P^-(b,\,\delta) \cap M \neq \emptyset\ ,$$

resp.

$$\forall\,\delta > 0:\ \ P^+(b,\,\delta) \cap M \neq \emptyset\ .$$

Jako dříve je bod b levým (resp. pravým) limitním bodem množiny M, právě když existuje taková posloupnost (a_n) ležící v $(-\infty, b) \cap M$ (resp. v $(b, +\infty) \cap M$), že $\lim a_n = b$. Levý (resp. pravý) limitní bod množiny je jejím limitním bodem. Limitní bod množiny je i jejím levým nebo pravým limitním bodem, ale nemusí být současně jejím levým i pravým limitním bodem.

Definice 3 (jednostranné limity) *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, a je levý (resp. pravý) limitní bod množiny M a nechť*

$$f\colon M \to \mathbb{R}\ .$$

Pak píšeme $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, resp. $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, a řekneme, že funkce f má v bodě a limitu zleva, resp. zprava, rovnou L, pokud

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon\, \exists \delta: \quad & f[P^-(a, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)\ , \\ & \textit{resp. } f[P^+(a, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)\ . \end{aligned}$$

Vždy platí, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a^\pm} f(x) = L$$

nebo jednostranná limita funkce f v bodě a není definovaná, protože a není příslušným levým či pravým limitním bodem definičního oboru. Vždy platí, že

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L\ .$$

Lehce se ovšem stane, že $\lim_{x\to a^-} f(x) = L \neq L' = \lim_{x\to a^+} f(x)$, pak $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje. Například *funkce signum*

$$\mathrm{sgn}(x)\colon \mathbb{R} \to \{-1,\, 0,\, 1\}\ ,$$

definovaná jako $\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$, má v nule různé jednostranné limity

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \ \text{ a } \ \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \ .$$

Takže $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje. Jednoznačnost limity a její Heineho definice fungují pro jednostranné limity velmi podobně jako pro oboustranné limity.

• *Spojitost funkce v bodě.* Následující definice patří v analýze k nejdůležitějším.

Definice 4 (spojitost funkce v bodě) *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bodě a, když*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta: \ f[U(a,\, \delta) \cap M] \subset U(f(a),\, \varepsilon) \ .$$

Oproti limitě funkce v bodě a se tedy L nahradilo hodnotou $f(a)$ a $P(a, \delta)$ se nahradilo (větším) okolím $U(a, \delta)$.

Jinými slovy napsáno, funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M$, právě když

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\colon x \in M \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

Jinak je f v bodě a *nespojitá*. Například $\operatorname{sgn}(x)$ je nespojitá v 0, ale v každém bodě $x \neq 0$ je spojitá.

Tvrzení 5 (o spojitosti v bodě) *Nechť je* $b \in M \subset \mathbb{R}$, b *je limitní bod množiny* M *a je dána funkce* $f\colon M \to \mathbb{R}$. *Následující tři tvrzení jsou vzájemně ekvivalentní.*

1. *Funkce* f *je v bodě* b *spojitá.*
2. $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.
3. *Pro každou posloupnost* $(a_n) \subset M$ *s* $\lim a_n = b$ *se* $\lim f(a_n) = f(b)$.

Důkaz. Implikace $1 \Rightarrow 2$. Předpokládáme, že f je spojitá v b podle definice 4 a že je dáno ε. Tedy existuje takové δ, že $f[U(b,\delta) \cap M] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Tedy i $f[P(b,\delta) \cap M] \subset U(f(b),\varepsilon)$ a, podle definice limity funkce, $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.

Implikace $2 \Rightarrow 3$. Předpokládáme, že $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$, že je dána posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ a že je dáno ε. Tedy, podle definice limity funkce, existuje takové δ, že

$$f[P(b,\, \delta) \cap M] \subset U(f(b),\, \varepsilon)\ . \qquad (*)$$

Vezmeme takové n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(b,\delta)$. Odtud plyne, že $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(f(b),\varepsilon)$: buď $a_n \neq b$, kdy můžeme použít inkluzi (*), anebo $a_n = b$, pak ale $f(a_n) = f(b) \in U(f(b),\varepsilon)$. Proto $\lim f(a_n) = f(b)$.

Implikace $3 \Rightarrow 1$, to jest $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$. Předpokládáme, že f není spojitá v b podle definice 4. Tedy existuje takové ε, že pro každé δ existuje takové $a = a(\delta) \in U(b,\delta) \cap M$, že $f(a) \notin U(f(b),\varepsilon)$. Pro každé n *vybereme* nějaké takové $a_n := a(1/n)$ a dostáváme posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$, ale $f(a_n) \notin U(f(b),\varepsilon)$ pro každé n a $(f(a_n))$ nemá limitu $f(b)$. Část 3 neplatí. $\square$

V důkazu poslední implikace jsme opět použili axiom výběru z teorie množin.

Rozmyslíme si, co se děje se spojitostí funkce v bodě definičního oboru, který není jeho limitním bodem.

Definice 6 (izolované body) *Bod $b \in M \subset \mathbb{R}$ je izolovaným bodem množiny M, když*

$$\exists\, \varepsilon:\ U(b, \varepsilon) \cap M = \{b\}\ .$$

Pro $b \in M \subset \mathbb{R}$ se hned vidí, že

$$b \text{ není limitním bodem } M \iff b \text{ je izolovaným bodem } M\ .$$

Tvrzení 7 (spojitost v iz. bodě) *Nechť je $b \in M \subset \mathbb{R}$, bod b je izolovaným bodem množiny M a*

$$f\colon M \to \mathbb{R}$$

je libovolná funkce. Potom je f v bodě b vždy spojitá.

Důkaz. Nechť b, M a f jsou, jak je uvedeno. Pak existuje δ, že $U(b, \delta) \cap M = \{b\}$. Pro toto δ inkluze

$$f[U(b,\, \delta) \cap M] = \{f(b)\} \subset U(f(b),\, \varepsilon)$$

platí pro každé ε. Proto je f spojitá v b podle definice 4. $\square$

Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, chápaná jako funkce a z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, je tak spojitá v každém bodě $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ svého definičního oboru $\mathbb{N}$.

- *Jednostranná spojitost.* Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Funkce f je *zleva*, resp. *zprava*, *spojitá* v bodě a, když

$$\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta:\quad \begin{array}{l} f[U^-(a,\,\delta)\cap M]\subset U(f(a),\,\varepsilon)\;, \\ \text{resp. }\; f[U^+(a,\,\delta)\cap M]\subset U(f(a),\,\varepsilon)\;. \end{array}$$

Lehce se dokáže, že

$$f \text{ je v } a \text{ sp.} \iff f \text{ je v } a \text{ zleva sp.} \wedge f \text{ je v } a \text{ zprava sp.}$$

- *Riemannova funkce.* Tato funkce

$$r\colon \mathbb{R}\to\{0\}\cup\{1/n\mid n\in\mathbb{N}\}$$

je definovaná jako

$$r(x)=\begin{cases} 0 & \dots\quad x \text{ je iracionální číslo a} \\ \frac{1}{n} & \dots\quad x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q} \text{ a } \frac{m}{n} \text{ je zlomek v základním tvaru}\;. \end{cases}$$

Tvrzení 8 (o Riemannově funkci) *Riemannova funkce je spojitá právě a jenom v iracionálních číslech.*

Důkaz. Nechť $x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, kde $\frac{m}{n}$ je zlomek v základním tvaru, a nechť $\varepsilon\le\frac{1}{n}$. Pro každé δ patrně existuje v $U(x,\delta)$ iracionální číslo α. Ale $r(\alpha)=0\notin U(r(x),\varepsilon)=U(\frac{1}{n},\varepsilon)$, takže funkce r není v bodě x spojitá.

Nechť je číslo $x\in\mathbb{R}$ iracionální a je dáno $\varepsilon\in(0,1)$. Definujeme kladné δ jako $\delta:=\min(M)$ pro množinu

$$M:=\{|x-\tfrac{m}{n}|\mid \tfrac{m}{n}\in\mathbb{Q},\,\tfrac{m}{n}\in U(x,\,1),\,1/n\ge\varepsilon\}\;.$$

Toto $\delta>0$ existuje, protože množina M je neprázdná konečná množina kladných čísel. (To podrobněji vysvětlím ústně.) Též $y\in U(x,\delta)\Rightarrow r(y)\in U(r(x),\varepsilon)=U(0,\varepsilon)$, protože pro každé $y\in$

$U(x, \delta)$ je $r(y) = 0$ nebo $r(y) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Proto je funkce r spojitá v bodě x. $\square$

• *Limita monotónní funkce.* Monotonie funkcí se definuje podobně jako pro posloupnosti reálných čísel.

Definice 9 (monotonie funkcí) *Nechť M je množina reálných čísel a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Funkce f*

1. *je neklesající (na M), když pro každé $x, y \in M$ platí, že $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, a*
2. *je nerostoucí (na M), když pro každé $x, y \in M$ platí, že $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*

Funkce f je monotónní (na M), je-li neklesající nebo nerostoucí.

Připomeňte si, kdy je množina reálných čísel shora (resp. zdola) omezená a kdy je shora (resp. zdola) neomezená. Následující věta je z důvodu vysvětleného po důkazu formulována pro jednostrannou limitu a ne pro oboustrannou.

Věta 10 (limita monotónní funkce) *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *je levý limitní bod množiny* M *a nechť*

$$f\colon M \to \mathbb{R}$$

je funkce, která je pro nějaké δ *neklesající na množině* $P^-(a,\delta) \cap M$. *Pak limita funkce* f *v bodě* a *zleva existuje. S označením* $N := f[P^-(a,\delta) \cap M] \subset \mathbb{R}$ *je*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & \dots \quad N \textit{ je shora neomezená a} \\ \sup(N) \in \mathbb{R} & \dots \quad N \textit{ je shora omezená .} \end{cases}$$

Důkaz. Nechť N je shora neomezená a je dáno ε. Existuje tedy takové $x \in P^-(a,\delta) \cap M$, že $f(x) > 1/\varepsilon$. Protože f je neklesající na $P^-(a,\delta) \cap M$, pro $\theta := a - x$ je $y \in P^-(a,\theta) \cap M \Rightarrow x < y < a \Rightarrow f(y) \geq f(x) > 1/\varepsilon$. Tedy $f[P^-(a,\theta) \cap M] \subset U(+\infty,\varepsilon)$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

Nechť je N shora omezená, $s := \sup(N)$ a je dáno ε. Podle definice suprema existuje takové $x \in P^-(a,\delta) \cap M$, že $s - \varepsilon < f(x) \leq s$. Protože f je neklesající na $P^-(a,\delta) \cap M$, pro $\theta := a - x$ je $y \in P^-(a,\theta) \cap M \Rightarrow x < y < a \Rightarrow s - \varepsilon < f(x) \leq f(y) \leq s$. Tedy $f[P^-(a,\theta) \cap M] \subset U(s,\varepsilon)$ a $\lim_{x \to a^-} f(x) = s$. $\square$

Věta má několik dalších, nyní asi celkem jasných variant pro lokálně nerostoucí funkci a/nebo nevlastní limitní bod a/nebo limitu zprava. Existence oboustranné limity se pomocí monotonie funkce dokáže převedením na jednostranné limity. Problém monotonie a oboustranných limit se ukazuje třeba pro funkci $\operatorname{sgn}(x)\colon \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ ($\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$). Ta je monotónní (neklesající) na celém $\mathbb{R}$, ale přesto

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$$

neexistuje. Jak víme, $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ a $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

• *Aritmetika limit funkcí.* Následující větu formulujeme pro oboustranné limity a dokážeme ji pomocí Heineho definice limity funkce. Nebudeme se proto muset trápit odhady velikostí součtů, součinů a podílů. Už jsme si je odbyli v důkazu věty o aritmetice limit posloupností.

Věta 11 (aritmetika limit funkcí) *Nechť je $M \subset \mathbb{R}$, $A, K, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod množiny M a funkce*

$$f,\, g\colon M \to \mathbb{R}$$

mají limity $\lim_{x \to A} f(x) = K$ a $\lim_{x \to A} g(x) = L$. Pak platí následující.

1. $\lim_{x \to A}(f(x) + g(x)) = K + L$*, je-li pravá strana definovaná.*
2. $\lim_{x \to A} f(x)g(x) = KL$*, je-li pravá strana definovaná.*
3. $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = K/L$*, je-li pravá strana definovaná. Zde pro $g(x) = 0$ klademe $f(x)/g(x) := 0$.*

Důkaz. Protože důkazy všech tří částí si jsou velmi podobné, dokážeme jen část 3. Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = A$. Podle Heineho definice limity funkce (implikace $\Rightarrow$) se $\lim f(a_n) = K$ a $\lim g(a_n) = L$. Předpokládáme, že pravá strana je definovaná (tedy $L \neq 0$ a $g(a_n) \neq 0$ pro každé $n \geq n_0$).

Podle věty o aritmetice limit posloupností se pak

$$\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{K}{L} \ .$$

Protože toto platí pro každou posloupnost

$$(f(a_n)/g(a_n))$$

s (a_n) jako výše, podle Heineho definice limity funkce (implikace $\Leftarrow$) se i $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = K/L$. □

Platí i zřejmé verze předchozí věty pro jednostranné limity.

• *Limity funkcí a uspořádání.* Uvedeme větu o limitě a uspořádání a větu o dvou strážnících pro funkce. Připomeňme si, že pro $M, N \subset \mathbb{R}$ porovnání $M < N$ znamená, že pro každé $a \in M$ a $b \in N$ je $a < b$.

Věta 12 (limita funkce a uspořádání) *Buďte dány prvky $A, K, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ a funkce*

$$f,\, g\colon M \to \mathbb{R}$$

mají limity $\lim_{x \to A} f(x) = K$ a $\lim_{x \to A} g(x) = L$. Platí následující.

1. *Když $K < L$, pak existuje δ, že $f[P(A, \delta) \cap M] < g[P(A, \delta) \cap M]$.*
2. *Když pro každé δ existují $x, y \in P(A, \delta) \cap M$ s $f(x) \geq g(y)$, pak $K \geq L$.*

Důkaz. 1. Protože $K < L$, existuje ε, že $U(K, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Pak podle předpokladu o limitách funkcí f a g existuje δ, že $f[P(A, \delta) \cap$

$M] \subset U(K, \varepsilon)$ a $g[P(A, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)$. Tedy

$$f[P(A, \delta) \cap M] < g[P(A, \delta) \cap M] \ .$$

2. Už víme (z důkazu tohoto pro posloupnosti), že část 2 je identická části 1, jen jen formulovaná obměnou implikace. Je-li část 1 implikace $\varphi \Rightarrow \psi$, pak část 2 je $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$. □

Připomeňme, že pro $a, b \in \mathbb{R}$ označuje $I(a, b)$ uzavřený reálný interval s konci a a b.

Věta 13 (dva funkční strážníci) *Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, A je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ a jsou dány funkce*

$$f,\ g,\ h\colon M \to \mathbb{R}$$

splňující podmínky, že $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} h(x) = L$ a že pro nějaké δ je $\forall\, x \in P(A, \delta) \cap M\colon g(x) \in I(f(x), h(x))$. Pak též

$$\lim_{x\to A} g(x) = L \ .$$

Důkaz. Nechť A, L, M, f, g a h jsou, jak je uvedeno, a je dáno ε. Tedy existuje δ, že množiny $f[P(A, \delta) \cap M]$ a $h[P(A, \delta) \cap M]$ jsou obsažené v $U(L, \varepsilon)$. Odtud a díky konvexitě okolí $U(L, \varepsilon)$ máme pro každé $x \in P(A, \delta) \cap M$, že $I(f(x), h(x)) \subset U(L, \varepsilon)$. Podle předpokladu je $g[P(A, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)$ a $\lim_{x\to A} g(x) = L$. □

• *Limita složené funkce.* Skládání zobrazení je operace bez obdoby u posloupností. Následující limitní věta pro ni je tak zajímavější než čtyři předchozí. Jak vysvětlíme po jejím důkazu, naše formulace zlepšuje formulace v jiných textech.

Věta 14 (limita složené funkce) *Nechť $A, K, L \in \mathbb{R}^*$, $M, N \subset \mathbb{R}$, A je limitní bod množiny M a K limitní bod množiny N a funkce*

$$g\colon M \to N \ \ a \ \ f\colon N \to \mathbb{R}$$

mají limity $\lim_{x\to A} g(x) = K$ a $\lim_{x\to K} f(x) = L$. Potom složená funkce $f(g)\colon M \to \mathbb{R}$ má limitu

$$\lim_{x\to A} f(g)(x) = L\ ,$$

<u>právě když</u> platí alespoň jedna ze dvou podmínek níže.

1. *Když $K \in N$ (takže $K \in \mathbb{R}$), pak $f(K) = L$ (takže $L \in \mathbb{R}$).*
2. *Existuje takové δ, že $K \notin g[P(A,\delta) \cap M]$.*

Neplatí-li ani 1 ani 2, pak limita $\lim_{x\to A} f(g)(x)$ neexistuje nebo $\lim_{x\to A} f(g)(x) = f(K) \neq L$.

Důkaz. Buď dáno ε. Podle předpokladu o limitách obou funkcí existuje takové δ, že (i) $f[P(K,\delta) \cap N] \subset U(L,\varepsilon)$, a takové θ, že (ii) $g[P(A,\theta) \cap M] \subset U(K,\delta)$.

Podmínka 1 je splněna. Pak inkluzi (i) zesílíme na $f[U(K,\delta) \cap N] \subset U(L,\varepsilon)$, v

$$f(g)[P(A,\,\theta)\cap M] = f[g[P(A,\,\theta)\cap M]] \subset f[U(K,\,\delta)\cap N] \subset U(L,\,\varepsilon)$$

díky tomu platí druhá inkluze a $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$.

Podmínka 2 je splněna. Vezmeme θ menší, než je δ v ní, a inkluzi (ii) zesílíme na $g[P(A,\theta) \cap M] \subset P(K,\delta)$. V

$$f(g)[P(A,\,\theta)\cap M] = f[g[P(A,\,\theta)\cap M]] \subset f[P(K,\,\delta)\cap N] \subset U(L,\,\varepsilon)$$

díky tomu platí první inkluze a opět $\lim_{x \to A} f(g(x)) = L$.

Ani podmínka 1 ani podmínka 2 není splněna. Pak $K \in N$ ale $f(K) \neq L$ a pro každé n existuje $a_n \in P(A, 1/n) \cap M$, že $g(a_n) = K$. Pak posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$, má limitu $\lim a_n = A$ a

$$\lim f(g)(a_n) = \lim f(g(a_n)) = \lim f(K) = f(K) \neq L \ .$$

Podle Heineho definice limity funkce tedy buď $\lim_{x \to A} f(g)(x)$ neexistuje anebo $\lim_{x \to A} f(g)(x) = f(K) \neq L$. □

Podmínka 1 je splněna vždy, když $K \notin N$, například, když $K = \pm\infty$. Jinde není podmínka 1 formulována jako implikace zde, ale přímo jako požadavek, že $f(K) = L$. Rozšířením podmínky 1 zde jsme tak dostali (podtrženou) ekvivalenci. Další předností naší formulace je, že uvádíme, co nastane, když ani jedna podmínka není splněna.

• *Asymptotické symboly O, o a $\sim$.* To jsou nejčastěji používané symboly pro označení asymptotických vztahů mezi funkcemi. Dále se používají Θ, $\ll$, Ω a další.

Definice 15 (velké O) *Nechť je $M \subset \mathbb{R}$, $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ a $N \subset M$. Pokud*

$$\exists\, c > 0\ \forall\, x \in N \colon |f(x)| \leq c \cdot |g(x)| \ ,$$

píšeme $f(x) = O(g(x))$ $(x \in N)$ a řekneme, že funkce f je velké O z funkce g na množině N.

Příklady.

1. Je $x^2 = O(x^3)$ $(x \in \mathbb{R})$? Ne, problém je u 0.
2. Je $x^3 = O(x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$? Ne, problém je u nekonečen.

3. Je $x^3 = O(x^2)$ $(x \in (-20, 20))$? Ano.
4. Je $\log x = O(x^{1/3})$ $(x \in (0, +\infty))$? Ne, problém je u 0.
5. Je $\log x = O(x^{1/3})$ $(x \in (1, +\infty))$? Ano.

Zbylé dva asymptotické symboly se dají definovat pomocí limity.

Definice 16 (malé o a $\sim$) *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ a $g \neq 0$ na $P(A, \delta) \cap M$ pro nějaké δ.*

1. *Pro $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = 0$ píšeme $f(x) = o(g(x))$ $(x \to A)$ a řekneme, že funkce f je malé o z funkce g pro x jdoucí k A.*
2. *Pro $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = 1$ píšeme $f(x) \sim g(x)$ $(x \to A)$ a řekneme, že funkce f se asymptoticky rovná funkci g pro x jdoucí k A.*

Příklady.

1. Je $x^2 = o(x^3)$ $(x \to +\infty)$? Ano.
2. Je $x^3 = o(x^2)$ $(x \to 0)$? Ano.
3. Je $x^2 = o(x^3)$ $(x \to 0)$? Ne.
4. Je $(x+1)^3 \sim x^3$ $(x \to 1)$? Ne, podíl jde ke 2.
5. Je $(x+1)^3 \sim x^3$ $(x \to +\infty)$? Ano.
6. Je $e^{-1/x^2} = o(x^{20})$ $(x \to 0)$? Ne, e^{-1/x^2} jde k 0 rychleji než každá x^n.

DĚKUJI ZA POZORNOST!