PŘEDNÁŠKA 4, 7. 3. 2022

JEŠTĚ O ŘADÁCH. LIMITA FUNKCE. ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

• *Řady.* Pokračujme v povídání o řadách. *Řada*

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

je jednak posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, jejímž členům a_n teď říkáme *sčítance*, jednak limita

$$\lim s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \in \mathbb{R}^*$$

posloupnosti

$$(s_n) := (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

částečných součtů s_n, které říkáme *součet řady*. Má-li řada vlastní součet, pak *konverguje*, jinak *diverguje*. Konvergence řady se nenaruší změnou jen konečně mnoha sčítanců, ale na rozdíl od limity posloupnosti se její součet může změnit už změnou jediného sčítance.

U posloupností (a_n) se držíme indexů $n \in \mathbb{N}$, takže $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$, ale u řad sčítací index n často probíhá i množiny odlišné od $\mathbb{N}$ a často se také označuje dalšími symboly. Můžeme se tak setkat s řadami

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m, \ \ \sum_{j=6}^{100} b_j, \ \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \ \ \sum_{\substack{n\in A\\ n\ne x}} u_n, \ \ \sum_{k\ge 0} c_k$$

a podobně, nemluvě o dvojitých a vícenásobných řadách. Následující tvrzení plyne hned z věty o monotónní posloupnosti.

Tvrzení 1 *Když v řadě $\sum a_n$ jsou sčítance $a_n \geq 0$ pro každé $n \geq n_0$, pak $\sum a_n$ má součet a ten není $-\infty$.*

Podobně to platí pro řady se skoro všemi sčítanci nekladnými.

Tvrzení 2 (nutná podm. konvergence) *Konverguje-li řada $\sum a_n$, pak* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Když $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim s_n =: S \in \mathbb{R}$ (zde $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$). Podle výsledků o limitě podposloupnosti a podle aritmetiky limit je

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0\ .$$

$\square$

Podle tohoto tvrzení tedy obě řady

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

divergují. První má součet $+\infty$ (viz tvrzení 1) a druhá (uvedená už v závěru minulé přednášky) nemá součet.

• *Harmonická řada.* Opačná implikace v předešlém tvrzení ale neplatí: uvažme řadu se sčítanci

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = \frac{1}{8},\ \ldots$$
$$\ldots,\ a_{2^k} = a_{2^k+1} = \cdots = a_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2^{k+1}},\ \ldots\ .$$

Pak zřejmě $\lim a_n = 0$, ale $s_1 < s_2 < \ldots$ a

$$s_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2}\ ,$$

takže $\sum a_n = \lim s_n = +\infty$ (proč?) a řada diverguje. Dostáváme také následující výsledek.

Tvrzení 3 (harmonická řada) *Tzv.* harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

diverguje a má součet $+\infty$.

Důkaz. Nechť (h_n) jsou částečné součty harmonické řady a (s_n) jsou částečné součty předešlé řady $\sum a_n$. Pak $1/n > a_n$ pro každé n, tedy i $h_n > s_n$ pro každé n. Protože $\lim s_n = +\infty$, podle věty o jednom strážníkovi i $\lim h_n = +\infty$ a harmonická řada má součet $+\infty$. $\square$

Částečné součty harmonické řady jsou tzv. *harmonická čísla*. Uvedeme o nich bez důkazu dvě zajímavosti.

Věta 4 (o harmonických číslech) *Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažme harmonická čísla $h_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$.*

1. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ se*

$$h_n = \log n + \gamma + \Delta_n \ ,$$

kde $\gamma = 0.57721\ldots$ je tzv. Eulerova konstanta a pro čísla $\Delta_n \in \mathbb{R}$ platí, že $|\Delta_n| < c/n$ pro nějakou konstantu c a každé n.

2. *$h_n \in \mathbb{N} \iff n = 1$.*

Dokázat, že $\gamma \notin \mathbb{Q}$, je stále otevřený problém.

• *Riemannova věta.* Na začátku první přednášky jsme se v paradoxu nekomutativity nekonečných součtů setkali s řadou

$$1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n} + \ldots$$

se „zřejmým“ součtem 0. Ten jsme zpřeházením sčítanců změnili na kladný. Součet 0 je ale skutečně správný, protože řada má částečné součty 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, $0, \ldots$ a ty jdou v limitě k 0.

Věta 5 (Riemannova). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada stejného typu, jako je předchozí, tedy nechť platí:*

1. $\lim a_n = 0$*,*

2. $\sum a_{k_n} = +\infty$*, kde* a_{k_n} *jsou kladné sčítance řady, a*

3. $\sum a_{z_n} = -\infty$*, kde* a_{z_n} *jsou záporné sčítance řady.*

Pak $\forall\, S \in \mathbb{R}^*$ *existuje taková bijekce* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$$

— zpřeházením sčítanců lze získat libovolný součet. Pochopitelně existuje i taková bijekce π, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ vůbec součet nemá.

Věta nese jméno německého matematika *Bernharda Riemanna (1826–1866)*, jehož příjmení budeme zanedlouho skloňovat ve všech pádech, až se budeme učit integrál, který zavedl.

• *Absolutně konvergentní řady.* A pro které řady se naopak součet žádným zpřeházením sčítanců změnit nedá?

Definice 6 (AK řady) *Řada $\sum a_n$ je absolutně konvergentní, zkráceně* AK, *konverguje-li řada $\sum |a_n|$.*

Teprve AK řady představují správné zobecnění konečných součtů na nekonečné.

Tvrzení 7. *Každá* AK *řada konverguje.*

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ je AK řada a (s_n) jsou její částečné součty — ukážeme, že to je Cauchyova posloupnost. Ta má podle věty o Cauchyově podmínce vlastní limitu. Pro každé dva indexy $m \le n$ ale je

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \\ &\overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| = t_n - t_m = |t_n - t_m| \;, \end{aligned}$$

kde (t_n) jsou částečné součty řady $\sum |a_n|$. Ale (t_n) je Cauchyova, tedy i (s_n) je Cauchyova. □

Věta 8 (komutativita AK řad). *Je-li $\sum a_n$* AK *řada, pak pro každou bijekci $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i řada $\sum a_{\pi(n)}$ je* AK. *Součty původní a zpřeházené řady se rovnají,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} \;.$$

- *Geometrické řady.* Jsou to řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \ldots$$

s parametrem $q \in \mathbb{R}$, takzvaným *kvocientem.*

Věta 9 (o geometrické řadě). *Pro $q \leq -1$ nemá geometrická řada součet. Pro $-1 < q < 1$ geometrická řada konverguje a má součet*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \,.$$

Pro $q \geq 1$ má geometrická řada součet $+\infty$.

Důkaz. Pro každé $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí identita

$$s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} + \frac{q^n}{q-1} \,.$$

Pro $q < -1$ tedy podle aritmetiky limit máme $\lim s_{2n-1} = +\infty$, $\lim s_{2n} = -\infty$ a tedy $\lim s_n$ neexistuje — geometrická řada nemá součet. Pro $q = -1$ je podobně $s_{2n-1} = 1$, $s_{2n} = 0$ a geometrická řada opět nemá součet. Pro $-1 < q < 1$ je $\lim q^n = 0$, takže podle aritmetiky limit má geometrická řada součet $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$. Pro $q = 1$ je $s_n = n$, takže geometrická řada má součet $\lim s_n = +\infty$. Pro $q > 1$ je $\lim q^n = +\infty$, takže podle aritmetiky limit má geometrická řada součet $\lim s_n = +\infty$. $\square$

Jedno rychlé použití vzorce pro součet geometrické řady:

$$27.272727\cdots = 27(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots) = 27 \cdot \frac{1}{1-10^{-2}}$$
$$= \frac{27 \cdot 100}{99} = \frac{300}{11} \,.$$

Lehce se vidí, že pro $q \in (-1, 1)$ a $m \in \mathbb{Z}$ platí obecnější vzorec

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots = \frac{q^m}{1-q} \,.$$

Rovněž je jasné, že každá konvergentní geometrická řada je absolutně konvergentní.

• *Zeta (dzéta) funkce* $\zeta(s)$. Je to funkce $\zeta(s)\colon \mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$ definovaná řadou, ale zde ji definujeme jen pro reálné $s>1$. Použijeme funkci reálné mocniny a^b pro $a>0$, kterou zavedeme ve druhé polovině přednášky. Takže pro $s\in\mathbb{R}$ vezmeme řadu

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ .$$

Věta 10 (o zeta funkci). *Pro $s\le 1$ má řada $\zeta(s)$ součet $+\infty$. Pro $s>1$ (absolutně) konverguje.*

První tvrzení plyne hned z divergence harmonické řady. L. Euler odvodil vzorce pro hodnoty $\zeta(2n)$ pro každé n, například $\zeta(2)=\pi^2/6$ a $\zeta(4)=\pi^4/90$. Vzorec pro žádnou hodnotu $\zeta(2n-1)$ není znám. Je ale známo, že $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$.

• *Limity funkcí.* Pro $A\in\mathbb{R}^*$ si připomeňte ε-okolí $U(A,\varepsilon)$ a prstencové ε-okolí $P(A,\varepsilon)=U(A,\varepsilon)\setminus\{A\}$ prvku A.

Definice 11 (limitní body) *Prvek $L\in\mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M\subset\mathbb{R}$, když $\forall\,\varepsilon\colon P(L,\varepsilon)\cap M\ne\emptyset$.*

Jinými slovy, $L\in\mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M\subset\mathbb{R}$, právě když existuje posloupnost $(a_n)\subset M\setminus\{L\}$ s $\lim a_n = L$. Nyní zobecníme pojem limity z posloupností na funkce. Připomeňme si, že pro $f\colon A\to B$ a $C\subset A$ je $f[C]=\{f(x)\mid x\in C\}\subset B$.

Definice 12 (limita funkce) *Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, A je limitní bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce. Pokud*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\colon f[P(A,\, \delta) \cap M] \subset U(L,\, \varepsilon)\ ,$$

píšeme $\lim_{x \to A} f(x) = L$ *a řekneme, že funkce f má v A limitu L.*

Limita nezávisí na hodnotě $f(A)$ a f ani nemusí, a pro $A = \pm\infty$ ani nemůže, být v prvku A definovaná. Pro posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je

$$\lim a_n = \lim_{x \to +\infty} a(x)\ ,$$

kde napravo posloupnost chápeme jako funkci $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Když A není limitní bod M, pak pro nějaké δ je $M \cap P(K, \delta) = \emptyset$ a

$$\emptyset = f[P(A,\, \delta) \cap M] \subset U(L,\, \varepsilon)$$

pro *každé* $L \in \mathbb{R}^*$ *a každé* ε, což není dobré.

Tvrzení 13 (jednoznačnost limity) *Limita funkce je jednoznačná: když $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $K, L, L' \in \mathbb{R}^*$ a K je limitní bod množiny M, pak*

$$\lim_{x \to K} f(x) = L \wedge \lim_{x \to K} f(x) = L' \Rightarrow L = L'\ .$$

Důkaz. Přímo, stejně jako pro limitu posloupnosti. Pro každé ε je pro nějaké δ neprázdná množina $f[P(K, \delta) \cap M]$ obsažená v obou okolích $U(L, \varepsilon)$ a $U(L', \varepsilon)$. Speciálně je $\forall\, \varepsilon\colon U(L, \varepsilon) \cap U(L', \varepsilon) \neq \emptyset$. Tedy (podle dříve zmíněné hlavní vlastnosti okolí) se $L = L'$. □

Následující věta ukazuje, jak redukovat limitu funkce na limity posloupností.

Věta 14 (Heineho definice). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, K, L jsou prvky $\mathbb{R}^*$, K je limitní bod množiny M a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak*

$$\lim_{x\to K} f(x) = L \iff$$
$$\iff \forall\,(a_n) \subset M \setminus \{K\}:\ \lim a_n = K \Rightarrow \lim f(a_n) = L\ .$$

Tedy L je limita funkce f v K, právě když pro každou posloupnost (a_n) v M, která má limitu K, ale nikdy se K nerovná, funkční hodnoty $(f(a_n))$ mají limitu L.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že $\lim_{x\to K} f(x) = L$, že $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ má limitu K a je dáno ε. Pak existuje δ, že pro každé $x \in M \cap P(K,\delta)$ je $f(x) \in U(L,\varepsilon)$. Pro toto δ existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in P(K,\delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(L,\varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

Implikace $\neg \Rightarrow \neg$. Předpokládáme, že $\lim_{x\to K} f(x) = L$ neplatí, a odvodíme z toho, že pravá strana ekvivalence neplatí. Takže existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje bod $b = b(\delta) \in M \cap P(K,\delta)$, že $f(b) \notin U(L,\varepsilon)$. Položíme $\delta = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a pro každé n *vybereme* takový bod $b_n := b(1/n) \in M \cap P(K, 1/n)$, že $f(b_n) \notin U(L,\varepsilon)$. Posloupnost (b_n) leží v $M \setminus \{K\}$ a limití ke K, ale posloupnost hodnot $(f(b_n))$ nelimití k L. Pravá strana ekvivalence tedy neplatí. □

V důkazu implikace $\Leftarrow$ jsme použili tzv. *axiom výběru.*

Spočítáme si alespoň jednu limitu funkce: díky identitě $x^2 - y^2 =$

$(x-y)(x+y)$ máme, že

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1}\\ &= \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

- *Exponenciální funkce.* Je z elementárních funkcí nejdůležitější.

Definice 15 (exponenciála) *Pro každé $x\in\mathbb{R}$ položíme*

$$\mathrm{e}^x=\exp(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,.$$

Tato řada je AK pro každé reálné (ba i komplexní) x, díky odhadu pomocí geometrické řady: $|x/n|<1$, jakmile $n>|x|$.

Tvrzení 16 (exponenciální identita) *Platí, že*

$$\forall\, x,\, y\in\mathbb{R}\colon\ \exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)\,.$$

Tvrzení 17 (vlastnosti exponenciály) *Platí, že*

1. $\exp(0) = 1$,
2. $\forall\, x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0 \wedge \exp(-x) = 1/\exp(x)$,
3. $\exp$ *je rostoucí funkce, takže* $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$,
4. $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$,
5. $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ *a*
6. $\exp$ *je bijekce z* $\mathbb{R}$ *do* $(0, +\infty)$.

Definice 18 (číslo e**)** *Definujeme* $\mathrm{e} := \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828\ldots$, *říká se mu Eulerovo číslo.*

Lze poměrně jednoduše dokázat, že e je iracionální číslo: $\mathrm{e} \not\in \mathbb{Q}$.

Logaritmus $\log x$ je inverzní funkce k exponenciále, takže

$$\log := \exp^{-1} \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}\ .$$

Jeho základní vlastnosti se proto dostanou invertováním vlastností exponenciály.

Tvrzení 19 (vlastnosti logaritmu) *Platí, že*

1. $\log(1) = 0$,
2. $\forall\, x, y \in (0, +\infty) : \log(xy) = \log x + \log y$,
3. $\log$ *je rostoucí funkce, takže* $x < y \Rightarrow \log(x) < \log(y)$,
4. $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$,
5. $\lim_{x\to +\infty} \log(x) = +\infty$ *a*
6. $\log$ *je bijekce z* $(0, +\infty)$ *do* $\mathbb{R}$.

• *Reálná mocnina* a^b. Zde zavedeme pouze její zjednodušenou verzi s nezáporným a. Samozřejmě ale dobře víme, že třeba $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Definice 20 (reálná mocnina) *Pro* $a, b \in \mathbb{R}$ *s* $a > 0$ *definujeme*

$$a^b := \exp(b \log a)\ .$$

Pro každé $b > 0$ *klademe* $0^b := 0$.

Pro číslo $\mathrm{e} = \exp(1)$ a každé reálné $x \in \mathbb{R}$ pak skutečně máme, že $\mathrm{e}^x = \exp(x \log(\exp(1))) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$.

Tvrzení 21 (mocninné identity) *Pro libovolná reálná čísla* $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ *s* $a, b > 0$ *platí identity*

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \& \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}\ .$$

Důkaz. 1. $(ab)^x = \exp(x \log(ab)) = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x \log a) \exp(x \log b) = a^x b^x$.

2. $a^x a^y = \exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp((x+y) \log a) = a^{x+y}$.

3. $(a^x)^y = \exp(y \log(\exp(x \log a))) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$. $\square$

Ovšem ale

$$\left((-1)^2\right)^{1/2} = 1^{1/2} = 1 \neq -1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot 1/2} \, .$$

Mocnina 0^0 je problematická z následujícího důvodu.

Tvrzení 22 (0^0 je neurčitý výraz) *Pro každé $c \in [0,1]$ existují takové posloupnosti (a_n), $(b_n) \subset (0,+\infty)$, že*

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad a \quad \lim \left(a_n\right)^{b_n} = c \, .$$

Obě posloupnost pak lze volit (pomocí prolínání) i tak, že $\lim \left(a_n\right)^{b_n}$ *neexistuje.*

• *Kosinus a sinus.* I tyto funkce lze definovat pomocí řad, třebaže původně pocházejí z geometrie.

Definice 23 (kosinus a sinus) *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ definujeme funkce*

$$\cos t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \quad a \quad \sin t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \, ,$$

takže $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots$ *a* $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \ldots$, *běžící z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$.

Odhadem geometrickou řadou opět snadno vidíme, že obě řady jsou AK pro každé $t \in \mathbb{R}$. Základní geometrickou vlastnost kosinu a sinu zformulujeme lehkoatleticky.

Věta 24 (o běžkyni). *Nechť* $t \in \mathbb{R}$ *a*

$$S := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

je jednotková kružnice (tj. s poloměrem 1*) v rovině a se středem v počátku. Běžkyně, která vyběhne po dráze* S *jednotkovou rychlostí z bodu* $(1, 0) \in S$ *a běží proti směru hodinových ručiček pro* $t > 0$ *a po jejich směru pro* $t \le 0$*, se v čase* $|t|$ *nachází v bodě*

$$(\cos t,\, \sin t) \in S\ .$$

Kosinus a sinus se tedy shodují se stejnojmennými funkcemi s geometrickou definicí.

Definice 25 (číslo π) Číslo $\pi = 3.14159\dots$ *můžeme neformálně definovat tak, že obvod kružnice* S*, tedy čas, kdy běžkyně opět proběhne startem, je* 2π*. Formálně tak, že nejmenší kladný nulový bod (kořen) funkce* $\cos t$ *je* $\pi/2$*.*

Definice pomocí obvodu kružnice S je neformální, protože nemáme definovánu délku kruhového oblouku. Bez důkazu uvedeme základní vlastnosti sinu a kosinu.

Tvrzení 26 (vlastnosti sinu a kosinu) *Platí, že*

1. *kosinus a sinus jsou 2π-periodické funkce,* $\cos(t+2\pi) = \cos t$ *a* $\sin(t+2\pi) = \sin t$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}$,
2. *sinus na* $[0, \pi/2]$ *roste z* 0 *do* 1,
3. *pro každé* $t \in [0, \pi]$ *je* $\sin(t) = \sin(\pi - t)$ *a pro každé* $t \in [0, 2\pi]$ *je* $\sin(t) = -\sin(2\pi - t)$,
4. *pro každé* $t \in [0, 2\pi]$ *je* $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
5. *pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *se* $\cos^2 t + \sin^2 = 1$ *a*
6. *pro každé* $s, t \in \mathbb{R}$ *platí součtové vzorce* $\sin(s \pm t) = \sin s \cdot \cos t \pm \cos s \cdot \sin t$ *a* $\cos(s \pm t) = \cos s \cdot \cos t \mp \sin s \cdot \sin t$.

Z částí 2–4 plyne, že $\cos, \sin \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Část 4 říká, že graf kosinu je jen posunutý graf sinu.

Další trigonometrické funkce jsou *tangens* $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ a *kotangens* $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$. *Arkus sinus* (*inverzní sinus*) a *arkus kosinus* (*inverzní kosinus*) je, po řadě, inverz restrikce sinu a kosinu na interval $[-\pi/2, \pi/2]$ a $[0, \pi]$. Jsou to bijekce

$$\arcsin\colon [-1,\ 1] \to [-\pi/2,\ \pi/2] \ \text{ a } \ \arccos\colon [-1,\ 1] \to [0,\ \pi]\ .$$

Podobně *arkus tangens* a *arkus kotangens* je, po řadě, inverz restrikce funkce tangens a kotangens na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ a $(0, \pi)$. Jsou to bijekce

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2,\ \pi/2) \ \text{ a } \ \mathrm{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\ \pi)\ .$$

DĚKUJI ZA POZORNOST!