PŘEDNÁŠKA 3, 28. 2. 2022
ARITMETIKA LIMIT. LIMITY A USPOŘÁDÁNÍ. ŘADY

• *Aritmetika limit.* V minulé přednášce jsme se zabývali existencí limit reálných posloupností. Teď se podíváme na vztah limit a aritmetických operací, a pak na vztah limit a uspořádání. Připomínáme, že (a_n), (b_n) a (c_n) označují reálné posloupnosti a že $\mathbb{R}^*$ je rozšířená reálná osa. Připomeňte si také počítání s nekonečny. Snadno se dokáže *obměna* Δ-ové nerovnosti $|a+b| \le |a| + |b|$, že

$$|a-b| \ge |a| - |b|\ .$$

Pro výpočet limit se nejčastěji používá následující věta. V důkazu použijeme tuto verzi vlastní limity:

$$\lim a_n = a \iff a_n =: a + \underbrace{e_n}_{\text{chyba}} \text{ s } e_n \to 0\ .$$

Věta 1 (aritmetika limit). *Nechť* $\lim a_n = K \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = L \in \mathbb{R}^*$. *Pak*

1. $\lim\,(a_n + b_n) = K + L$, *je-li pravá strana definovaná,*
2. $\lim a_n b_n = KL$, *je-li pravá strana definovaná a*
3. $\lim a_n/b_n = K/L$, *je-li pravá strana definovaná. Pro* $b_n = 0$ *klademe* $a_n/b_n := 0$.

PS v 1 není def. $\iff$ $K = -L = \pm\infty$. *PS ve 2 není def.* $\iff$ $K = 0$ *a* $L = \pm\infty$ *nebo* $K = \pm\infty$ *a* $L = 0$. *PS ve 3 není def.* $\iff$ $L = 0$ *nebo* $K = \pm\infty$ *a* $L = \pm\infty$.

Důkaz. 1. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Existuje n_0, že $n \ge n_0$ $\Rightarrow a_n =: K + c_n$ a $b_n =: L + d_n$ s $|c_n|, |d_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $n \ge n_0 \Rightarrow$ $a_n + b_n = K + L + \underbrace{c_n + d_n}_{e_n}$ s $|e_n| \le |c_n| + |d_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Tedy $a_n + b_n \to K + L$.

Nechť $K \neq -\infty$, $L = +\infty$ a je dáno c. Pak $a_n > d$ pro každé n a nějaké d a $b_n > -d + c$ pro každé $n \ge n_0$. Tedy $n \ge n_0 \Rightarrow$ $a_n + b_n > d + (-d) + c = c$ a $a_n + b_n \to +\infty$. Případ, že $K = -\infty$ a $L \neq +\infty$ je podobný.

2. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon \in (0, 1)$. Existuje n_0, že $n \ge n_0$ $\Rightarrow a_n =: K + c_n$ a $b_n =: L + d_n$ s $|c_n|, |d_n| < \varepsilon$. Tedy $n \ge n_0 \Rightarrow$ $a_n b_n = KL + \underbrace{c_n L + d_n K + c_n d_n}_{e_n}$ a

$$|e_n| \overset{\Delta\text{-ner.}}{\le} \varepsilon(|K| + |L| + 1) \to 0 \ \text{ pro } \ \varepsilon \to 0\ .$$

Tedy $a_n b_n \to KL$.

Nechť $K > 0$, $L = -\infty$ a je dáno $c < 0$. Pak $a_n > d > 0$ pro každé $n \ge n_0$ a nějaké $d > 0$ a $b_n < c/d$ pro každé $n \ge n_0$. Tedy $n \ge n_0 \Rightarrow a_n b_n < d(c/d) = c$ a $a_n b_n \to -\infty$. Ostatní případy s $K = \pm\infty$ nebo $L = \pm\infty$ jsou podobné.

3. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ s $L \neq 0$ a je dáno ε. Existuje n_0, že $n \ge n_0$ $\Rightarrow a_n =: K + c_n$ a $b_n =: L + d_n$ s $|c_n| < \varepsilon$ a $|d_n| < \min(\varepsilon, |L|/2)$. Pro každé $n \ge n_0$ pak je

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{K + c_n}{L + d_n} = \frac{K/L + c_n/L}{1 + d_n/L} = \frac{K}{L} \underbrace{- \frac{K d_n/L^2}{1 + d_n/L} + \frac{c_n/L}{1 + d_n/L}}_{e_n}$$

a, díky $|1 + d_n/L| \geq 1 - |d_n|/|L| \geq 1 - 1/2 = 1/2$,

$$|e_n| \overset{\Delta\text{-ner. a obměna}}{\leq} \frac{|K|\varepsilon/L^2}{1/2} + \frac{\varepsilon/|L|}{1/2} = \varepsilon \cdot \left(\frac{2|K|}{L^2} + \frac{2}{|L|}\right) \to 0$$

pro $\varepsilon \to 0$. Tedy $a_n/b_n \to K/L$.

Nechť $K \in \mathbb{R}$, $L = -\infty$ a je dáno ε. Tedy (a_n) je omezená, $|a_n| < c$ pro každé n a nějaké $c > 0$, a existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow b_n < -c/\varepsilon$. Tedy $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n/b_n| < c/|b_n| < c/(c/\varepsilon) = \varepsilon$ a $a_n/b_n \to 0$. Ostatní případy, kdy $L \neq 0$ a buď $K = \pm\infty$ anebo $L = \pm\infty$ jsou podobné. $\square$

Věta zdaleka nepopisuje aritmetiku limit beze zbytku. I když její předpoklady nejsou splněné, tedy K nebo L neexistuje nebo pravá strana není definovaná, neznamená to ještě, že (jednoznačná) limita na levé straně neexistuje. Mnohdy existuje a několik takových případů teď bez důkazu uvedeme.

Tvrzení 2 (dodatek 1) *I když limita $K = \lim a_n$ neexistuje, platí následující.*

1. *(a_n) omezená a $L = \lim b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = L$.*
2. *(a_n) omezená a $L = \lim b_n = 0 \Rightarrow \lim a_n b_n = 0$.*
3. *(a_n) splňuje $a_n > c > 0$ pro $n \geq n_0$ a $L = \lim b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim a_n b_n = L$.*
4. *(a_n) je omezená a $L = \lim b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim a_n/b_n = 0$.*
5. *(a_n) splňuje $a_n > c > 0$ pro $n \geq n_0$, $b_n > 0$ pro $n \geq n_0$ a $L = \lim b_n = 0 \Rightarrow \lim a_n/b_n = +\infty$.*

Často se ale také stane, že když předpoklady věty nejsou splněny, není limita levé strany jednoznačně určená nebo neexistuje.

Tvrzení 3 (dodatek 2) $\forall\, A \in \mathbb{R}^* \;\exists\, (a_n),\, (b_n),$ *že*

1. $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ *a* $\lim\,(a_n + b_n) = A$,
2. $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = \pm\infty$ *a* $\lim a_n b_n = A$ *a*
3. $\lim a_n = \lim b_n = 0$ *nebo* $\lim a_n = \pm\infty$, $\lim b_n = \pm\infty$ *a* $\lim a_n/b_n = A$.

Limity $\lim\,(a_n + b_n)$, $\lim a_n b_n$ *a* $\lim a_n/b_n$ *v 1–3 také nemusí existovat.*

• *Rekurentní posloupnosti.* Jejich limity jsou vlastně první opravdové limity posloupností, dosavadní příklady jako $\lim\,(n^{1/3} - n^{1/2})$, $\lim \frac{2n-3}{5n+4}$ apod. jsou ve skutečnosti úlohy na limity funkcí. Počítání limit rekurentních posloupností vysvětlíme v důkazu tvrzení níže. Užijeme v něm tzv. *AG nerovnost* (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem), že pro každá dvě čísla $a, b \ge 0$ je

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}\,.$$

Tvrzení 4 (rekurentní limita). *Nechť* (a_n) *splňuje* $a_1 = 1$ *a, pro* $n \ge 2$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\,.$$

Pak $\lim a_n = \sqrt{2}$.

Důkaz. Řekněme, že $L := \lim a_n \in \mathbb{R}$ existuje a je vlastní. Pak podle limity podposloupnosti i $\lim a_{n-1} = L$. Podle částí 3, 2 a 1 předchozí věty máme $\lim \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{L}$ pro $L \neq 0$, vždy $\lim \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{L}{2}$ a $\lim\left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$ pro $L \neq 0$. Tedy

$$L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \rightsquigarrow L^2 - L^2/2 = 1 \rightsquigarrow L^2 = 2$$

a máme dvě řešení $L = \sqrt{2}$ a $L = -\sqrt{2}$. Když dokážeme, že (a_n) konverguje, dostaneme hned, že $\lim a_n = \sqrt{2}$, protože zřejmě $a_n > 0$ pro každé n, a tedy $L \geq 0$ (čímž předbíháme do následující části přednášky).

Abychom ale vyloučili hodnotu $L = 0$, potřebujeme silnější nerovnost, než že $L \geq 0$. Nicméně hned uvidíme, že pro každé $n \geq 2$ je $a_n \geq \sqrt{2}$. Takže $L \geq \sqrt{2}$, pokud existuje, a L se jistě nerovná nule.

Použijeme větu o monotónní posloupnosti z minulé přednášky. Dokážeme, že (a_n) je nerostoucí od $n_0 = 2$. Potřebujeme, aby pro každé $n \geq 2$ bylo

$$a_n \geq a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \iff \frac{a_n^2}{2} \geq 1 \iff a_n \geq \sqrt{2}\,.$$

Pro $n \geq 2$ ale podle AG nerovnosti skutečně je

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + 2a_{n-1}^{-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1} \cdot 2a_{n-1}^{-1}} = \sqrt{2}\,.$$

Takže (a_n) je nerostoucí od $n_0 = 2$ a je kladná, tedy omezená zdola. Podle věty o monotónní posloupnosti má (a_n) nezápornou vlastní limitu. Tedy, jak jsme spočítali, $\lim a_n = \sqrt{2}$. $\square$

Aby úvodní výpočet, to jest vyřešení rovnice získané nahrazením všech $a_n, a_{n-1}, \ldots$ v rekurenci limitou L, byl co platný, je vždy nutné dokázat, že limita posloupnosti (a_n) existuje. Například rekurentní posloupnost (a_n) daná jako $a_1 = 1$ a $a_n = -a_{n-1}$ *nemá* limitu $\lim a_n = 0$, přestože rovnice $L = -L$ má jediné řešení $L = 0$. Limita posloupnosti $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ totiž (jak jsme nahlédli už dříve) neexistuje.

V důkazu následujícího tvrzení užijeme prosté pozorování, že

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0 \; .$$

Skutečně, $a_n \to 0 \iff \forall\, \varepsilon\; \exists\, n_0\colon\; n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon \iff \forall\, \varepsilon\; \exists\, n_0\colon\; n \geq n_0 \Rightarrow \big|\,|a_n|\,\big| < \varepsilon \iff |a_n| \to 0$.

Tvrzení 5 (geometrická posloupnost) *Pro číslo $q \in \mathbb{R}$ limita*

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \dots\ |q| < 1,\ \textit{tj.}\ -1 < q < 1, \\ = 1 & \dots\ q = 1, \\ = +\infty & \dots\ q > 1\ \textit{a} \\ \textit{neexistuje} & \dots\ q \leq -1\;. \end{cases}$$

Důkaz. 1. Nechť $|q| < 1$. Podle pozorování lze navíc předpokládat, že $q \geq 0$. Potom je (q^n) nerostoucí, zdola omezená (díky $q^n \geq 0$) a podle věty o monotónní posloupnosti má nezápornou vlastní limitu L. Protože $q^n = q \cdot q^{n-1}$, platí rovnice $L = q \cdot L \rightsquigarrow L = 0/(1-q) = 0$.

2. Pro $q = 1$ máme limitu konstantní posloupnosti $(1, 1, \dots)$.

3. Nechť $q > 1$. Podle části 1 tohoto tvrzení a části 5 tvrzení 2 je

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/q)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty \; .$$

4. Nechť $q \leq -1$. Pro $q = -1$ nemá $(q^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ limitu, protože má podposloupnost s limitou 1 a podposloupnost

s limitou -1. Pro $q < -1$ nemá (q^n) limitu, protože, podle části 3 tohoto tvrzení a aritmetiky limit, má podposloupnost s limitou $+\infty$ a podposloupnost s limitou $-\infty$. □

• *Limity a* $(\mathbb{R}^*, <)$. Vztah limit reálných posloupností a lineárního uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ popisují dvě následující věty.

Věta 6 (lim **a uspořádání).** *Nechť* $K, L \in \mathbb{R}^*$ *a* $(a_n), (b_n)$ *jsou dvě reálné posloupnosti s* $\lim a_n = K$ *a* $\lim b_n = L$. *Platí následující.*

1. *Když* $K < L$, *tak existuje* n_0, *že pro každé dva, ne nutně stejné, indexy* $m, n \geq n_0$ *je* $a_m < b_n$.
2. *Když pro každé* n_0 *existují indexy* m *a* n, *že* $m, n \geq n_0$ *a* $a_m \geq b_n$, *pak* $K \geq L$.

Důkaz. 1. Nechť $K < L$. Jak víme z minula, existuje ε, že $U(K, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Podle definice limity máme n_0, že $m, n \geq n_0$ $\Rightarrow a_m \in U(K, \varepsilon)$ a $b_n \in U(L, \varepsilon)$. Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m < b_n$.

2. Tento důkaz dostáváme zadarmo pomocí logiky: implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ je totéž, jako její obměna $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$. Obměna implikace v části 1 je ovšem právě část 2. □

Ostrá nerovnost mezi členy dvou posloupností může v limitě přejít v rovnost jejich limit: pro $(a_n) := (1/n)$ a $(b_n) := (0, 0, \dots)$ je $a_m > b_n$ pro každé m a n, ale

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \ .$$

Předešlá věta se často (vlastně skoro vždy) uvádí ve slabší formě, že když $K < L$, pak existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n < b_n$. Podobně pro druhou část.

Pro reálná čísla a a b označíme uzavřený interval s konci a a b jako $I(a,b)$:

$$I(a,b) = [a,b] \text{ pro } a \le b \text{ a } I(a,b) = [b,a] \text{ pro } a \ge b\ .$$

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je *konvexní*, pokud $\forall\, a,b \in M\colon I(a,b) \subset M$.

Tvrzení 7 (o intervalech) *Konvexní množiny reálných čísel jsou právě a jenom $\emptyset$, singletony $\{a\}$ pro $a \in \mathbb{R}$, celé $\mathbb{R}$ a intervaly (a,b), $(-\infty,a)$,*

$$(a,\,+\infty),\ (a,\,b],\ [a,\,b),\ [a,\,b],\ (-\infty,\,a]\ \text{ a }\ [a,\,+\infty)$$

pro reálná čísla $a < b$.

Například každé okolí $U(A,\varepsilon)$ je konvexní. Ale žádné prstencové okolí $P(a,\varepsilon)$ není konvexní.

Následující věta je populární vzhledem ke svému názvu.

Věta 8 (o dvou strážnících). *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a (a_n), (b_n) a (c_n) jsou takové tři reálné posloupnosti, že*

$$\lim a_n = \lim c_n = a \wedge \forall\, n \ge n_0\colon b_n \in I(a_n,\, c_n)\ .$$

Pak i $\lim b_n = a$*.*

Důkaz. Nechť a, (a_n), (b_n) a (c_n) jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Podle definice limity existuje n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n, c_n \in U(a,\varepsilon)$. Díky konvexitě okolí $U(a,\varepsilon)$ je $n \ge n_0 \Rightarrow I(a_n,c_n) \subset U(a,\varepsilon)$. Díky předpokladu tak $n \ge n_0 \Rightarrow b_n \in U(a,\varepsilon)$ a $b_n \to a$. $\square$

Dva strážníci, posloupnosti (a_n) a (c_n), tak mezi sebou vedou podezřelého, posloupnost (b_n), ke společné limitě a. Pro nevlastní limitu stačí jen jeden strážník: když $\lim a_n = -\infty$ a $b_n \le a_n$ pro každé $n \geq n_0$, pak i $\lim b_n = -\infty$. Podobně pro limitu $+\infty$. Věta o dvou strážnících se často uvádí ve slabší podobě, s nerovnostmi $a_n \leq b_n \leq c_n$ místo náležení $b_n \in I(a_n, c_n)$. Pak mají strážníci pevně daná místa vlevo a vpravo vedle podezřelého, zatímco v naší verzi věty se mohou vyměňovat.

• *Limes inferior a limes superior posloupnosti.* Tyto termíny představují pozůstatky latinské matematické terminologie a po řadě znamenají „nejmenší limita“ a „největší limita“.

Definice 9 (hromadný bod) *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že A je hromadný bod posloupnosti (a_n), pokud má (a_n) podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = A$. Položíme*

$$H(a_n) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \textit{ je hromadný bod } (a_n)\} \subset \mathbb{R}^* \,.$$

Limes inferior reálné posloupnosti (a_n), značeno $\liminf a_n$, definujeme jako nejmenší prvek množiny $H(a_n)$ v lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$. Její *limes superior*, značeno $\limsup a_n$, pak je největší prvek množiny $H(a_n)$. Že tyto prvky vždy existují hned dokážeme.

Věta 10 (liminf a limsup) *Pro každou reálnou posloupnost (a_n) je množina $H(a_n)$ neprázdná a má v lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ minimum i maximum.*

Důkaz. Nechť (a_n) je reálná posloupnost. Minule jsme dokázali, že (a_n) má podposloupnost s limitou, takže $H(a_n) \neq \emptyset$. Dokážeme existenci $\max(H(a_n))$, existence minima se dokazuje podobně.

Ve čtyřech případech, které pokrývají všechny možnosti, definujeme prvek $A \in \mathbb{R}^*$. (i) Pokud $H(a_n) = \{-\infty\}$, pak $A := -\infty$. (ii) Pokud $+\infty \in H(a_n)$, pak $A := +\infty$. (iii) Pokud $H(a_n) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$

a tato množina je shora neomezená, pak $A := +\infty$. Konečně (iv) pokud $+\infty \notin H(a_n)$ a množina $H(a_n) \cap \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená, pak

$$A := \sup(H(a_n) \cap \mathbb{R}) \in \mathbb{R} \ .$$

Ukážeme, že vždy $A = \max(H(a_n))$. V případech (i) a (ii) to je zřejmé. V případech (iii) a (iv) je zřejmé, že $A \geq h$ pro každé $h \in H(a_n)$, a stačí dokázat, že $A \in H(a_n)$. V případech (iii) a (iv) je také jasné, že existuje posloupnost

$$(b_n) \subset H(a_n) \cap \mathbb{R} \text{ s } \lim b_n = A \ .$$

Protože každé číslo b_n je limitou nějaké podposloupnosti posloupnosti (a_n), snadno nalezneme její takovou podposloupnost (a_{m_n}), že

$$\forall\, n\colon a_{m_n} \in U(b_n,\, 1/n) \ .$$

Pak ale $\lim a_{m_n} = \lim b_n = A$ a $A \in H(a_n)$. □

Věta 11 (vlastnosti liminfu a limsupu). *Pro každou reálnou posloupnost (a_n) platí následující.*

1. *Když* $\lim a_n$ *existuje,* $H(a_n) = \{\lim a_n\}$.

2. *Nastávají tři exkluzivní případy pokrývající všechny možnosti: (i)* (a_n) *je shora neomezená a* $\limsup a_n = +\infty$*, (ii)* $\lim a_n = -\infty$ *a* $\limsup a_n = -\infty$*, (iii)* $\limsup a_n$ *je vlastní a*

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup(\{a_m \mid m \geq n\})\big) \in \mathbb{R}\ .$$

3. *Nastávají tři exkluzivní případy pokrývající všechny možnosti: (i)* (a_n) *je zdola neomezená a* $\liminf a_n = -\infty$*, (ii)* $\lim a_n = +\infty$ *a* $\liminf a_n = +\infty$*, (iii)* $\liminf a_n$ *je vlastní a*

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf(\{a_m \mid m \geq n\})\big) \in \mathbb{R}\ .$$

4. *Vždy* $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ *a rovnost nastává, právě když existuje* $\lim a_n$ *a pak*

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n\ .$$

Důkaz. 1. To je zřejmé, podposloupnost dané posloupnosti s limitou má tutéž limitu.

2. První dva případy jsou víceméně jasné. Nechť ani jeden z nich nenastává. Pro každé n označíme $A_n := \{a_m \mid m \geq n\}$ a $b_n := \sup(A_n)$. Každá množina A_n je shora omezená a neprázdná, takže (b_n) je dobře definovaná reálná posloupnost, která je zřejmě nerostoucí. Podle věty o monotónní posloupnosti má limitu $L :=$

$\lim b_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ta není $-\infty$, protože pak by $\lim a_n = -\infty$. Tedy $L \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema

$$\forall\, n\ \exists\, m\ (\geq n):\ b_n - 1/n < a_m \leq b_n\ .$$

Odtud není těžké nahlédnout, že $\lim b_n = L \in H(a_n)$. Kdyby L nebyla největším prvkem $H(a_n)$, existovalo by $\delta > 0$, že pro nekonečně mnoho m je $a_m > L + \delta$. Pak bychom si vzali n, že $b_n < L + \delta$. Jenomže pak by existovalo $m \geq n$, že $a_m > L + \delta > b_n$, ve sporu s definicí čísla b_n. Tudíž $L = \max(H(a_n)) = \limsup a_n$.

3. Důkaz je podobný předchozímu.

4. První tvrzení je zřejmé. Abychom dokázali druhé, stačí dokázat, že když $\liminf a_n = \limsup a_n =: L$, pak $\lim a_n = L$. Když $L = \pm\infty$, je $\lim a_n = L$ podle případu (ii) v části 2 nebo v části 3. Nechť $L \in \mathbb{R}$ a buď dáno ε. Podle případu (iii) v částech 2 a 3 vezmeme n, že

$$L - \varepsilon < \inf(\{a_m \mid m \geq n\}) \leq \sup(\{a_m \mid m \geq n\}) < L + \varepsilon\ .$$

Pak $m \geq n \Rightarrow L - \varepsilon < a_m < L + \varepsilon$, takže $a_n \to L$. $\square$

• *Nekonečné řady.* Zavedeme základní pojmy teorie (nekonečných) řad. Více si o nich řekneme příště.

Definice 12 (nekonečné řady) *(Nekonečnou) řadou rozumíme opět posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Jejím součtem rozumíme limitu*

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots := \lim\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\ ,$$

když existuje. Posloupnost $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ je tvořena takzvanými částečnými součty (řady).

Symboly $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $a_1 + a_2 + \dots$ ovšem často označují i samotnou posloupnost (a_n). S řadami jsme se už setkali v první přednášce v paradoxech nekonečna. Je pravda, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0\ ?$$

Není to pravda. Jak vlastně rozumět těmto třem rovnostem? První rovnost platí, je to rovnost mezi dvěma posloupnostmi. Třetí rovnost také platí, říká, že součet řady samých nul je nula. Druhá rovnost ale neplatí: jako rovnost dvou posloupností neplatí a neplatí ani jako rovnost součtů dvou řad, protože řada $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ součet nemá, posloupnost jejích částečných součtů je $(1, 0, 1, 0, \dots)$ a nemá limitu.

DĚKUJI ZA POZORNOST!