# PŘEDNÁŠKA 2, 21. 2. 2022
## VĚTY O EXISTENCI LIMIT POSLOUPNOSTÍ

• *Opakování.* Připomeňte si, co je to $\mathbb{R}$ a co jsou přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Pomocí $i$, $j$, $k$, $l$, $m$, $m_0$, $m_1$, $\dots$, $n$, $n_0$, $n_1$, $\dots$ označujeme přirozená čísla a $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $\delta$, $\varepsilon$ a $\theta$, případně s indexy, jsou reálná čísla. Vždy $\delta, \varepsilon, \theta > 0$ a představujeme si je jako blízká nule. Připomeňte si, co je to reálná posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

• *Počítání s nekonečny.* Pro definici nevlastních limit přidáme k $\mathbb{R}$ *nekonečna* $+\infty$ a $-\infty$. Dostaneme tak *rozšířenou reálnou osu*

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \; .$$

S nekonečny počítáme následovně.

> Bereme vždy jen horní nebo jen dolní znaménka:
>
> $$\begin{aligned} A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \;&\Rightarrow\; A + (\pm\infty) = \pm\infty + A := \pm\infty \; , \\ A \in (0,\, +\infty) \cup \{+\infty\} \;&\Rightarrow\; A \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot A := \pm\infty \; , \\ A \in (-\infty,\, 0) \cup \{-\infty\} \;&\Rightarrow\; A \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot A := \mp\infty \; , \\ a \in \mathbb{R} \;&\Rightarrow\; \frac{a}{\pm\infty} := 0 \; , \end{aligned}$$
>
> $-(\pm\infty) := \mp\infty$, $-\infty < a < +\infty$ a $-\infty < +\infty$.

Odečtení prvku $A \in \mathbb{R}^*$ se redukuje na přičtení $-A$ a dělení nenulovým $a$ převedeme na násobení číslem $1/a$. Všechny ostatní hodnoty operací, to jest ($A \in \mathbb{R}^*$)

$$\frac{A}{0},\; (\pm\infty) + (\mp\infty),\; 0 \cdot (\pm\infty),\; (\pm\infty) \cdot 0,\; \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \;\text{ a }\; \frac{\pm\infty}{\mp\infty} \; ,$$

jsou nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy*. Prvky v $\mathbb{R}^*$ obvykle označujeme pomocí $A$, $B$, $K$ a $L$.

• *Okolí bodů a nekonečen.* Rozpomeňme se na značení reálných intervalů:

$$(a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\},\ (-\infty,\, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

atd.

**Definice 1 (okolí)** *$\varepsilon$-okolí bodu $b$ a prstencové $\varepsilon$-okolí bodu $b$ definujeme po řadě jako*

$$U(b,\, \varepsilon) := (b-\varepsilon,\, b+\varepsilon) \ \text{ a } \ P(b,\, \varepsilon) := (b-\varepsilon,\, b) \cup (b,\, b+\varepsilon)\ ,$$

*takže $P(b,\varepsilon) = U(b,\varepsilon)\setminus\{b\}$. Definujeme $\varepsilon$-okolí nekonečen:*

$$U(-\infty,\, \varepsilon) := (-\infty,\, -1/\varepsilon) \ \text{ a } \ U(+\infty,\, \varepsilon) := (1/\varepsilon,\, +\infty)\ .$$

*Klademe $P(\pm\infty,\varepsilon) := U(\pm\infty,\varepsilon)$.*

*Hlavní vlastnost* okolí je, že když $V, V' \in \{U, P\}$, pak

$$A,\, B \in \mathbb{R}^*,\, A < B \Rightarrow \exists\, \varepsilon :\ V(A,\, \varepsilon) < V'(B,\, \varepsilon)\ ,$$

to jest $a < b$ pro každé $a \in V(A,\varepsilon)$ a každé $b \in V'(B,\varepsilon)$. Speciálně platí, že $A \ne B \Rightarrow \exists\, \varepsilon :\ V(A,\varepsilon) \cap V'(B,\varepsilon) = \emptyset$.

• *Limity posloupností.* Není-li řečeno jinak, $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ označují reálné posloupnosti. Definice níže patří k nejdůležitějším v analýze (i v matematice).

**Definice 2 (limita posloupnosti)** *Nechť* $(a_n)$ *je reálná posloupnost a* $L \in \mathbb{R}^*$. *Pokud*

$$\forall \varepsilon \, \exists n_0 : \; n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon) \, ,$$

*píšeme, že* $\lim a_n = L$, *a řekneme, že posloupnost* $(a_n)$ *má limitu* $L$.

Pro $L \in \mathbb{R}$ mluvíme o *vlastní* limitě a pro $L = \pm\infty$ o limitě *nevlastní*. Posloupnost s vlastní limitou *konverguje*, jinak *diverguje*. Vlastní $\lim a_n = a$ znamená, že pro každé reálné (a jakkoli malé) $\varepsilon > 0$ existuje takový index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \in \mathbb{N}$ velký alespoň $n_0$ je vzdálenost mezi $a_n$ a $a$ menší než $\varepsilon$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \, .$$

Nevlastní $\lim a_n = -\infty$ znamená, že pro každé (jakkoli záporné) $c \in \mathbb{R}$ existuje takový index $n_0$, že pro každý index $n$ velký alespoň $n_0$ je

$$a_n < c \, .$$

Podobně s opačnou nerovností pro limitu $+\infty$. Další používané značení pro limity je $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ a $a_n \to L$. Nejjednodušším příkladem konvergentní posloupnosti je *eventuálně konstantní* posloupnost $(a_n)$ s $a_n = a$ pro každé $n \geq n_0$, pak samozřejmě $\lim a_n = a$. Představa o limitě, že „posloupnost se k limitě neomezeně blíží, nikdy jí ale nedosáhne (leda snad v nekonečnu)“, rozšířená ve veřejnosti, je poetická, ale nesprávná.

**Tvrzení 3 (jednoznačnost lim)** *Limita posloupnosti je jednoznačná,* $\lim a_n = K$ *a* $\lim a_n = L \Rightarrow K = L$.

**Důkaz.** Nechť $\lim a_n = K$ i $\lim a_n = L$ a $\varepsilon$ je libovolné. Podle definice 2 existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(K,\varepsilon)$ i $a_n \in U(L,\varepsilon)$. Tedy $\forall\,\varepsilon:\ U(K,\varepsilon)\cap U(L,\varepsilon) \neq \emptyset$. Pak ale podle hlavní vlastnosti okolí uvedené výše se $K = L$. $\square$

• *Dvě limity.* Ukážeme, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. Což je jasné, pro dané $\varepsilon$ a každé $n \geq n_0 := 1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil$ je

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\underbrace{1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil}_{> 1/\varepsilon}} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \rightsquigarrow 1/n \in U(0,\, \varepsilon)\ .$$

Zde $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ označuje *horní celou část* čísla $a$, nejmenší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \geq a$. Podobně *dolní celá část* $\lfloor a \rfloor$ čísla $a$ je největší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \leq a$. Druhý příklad je, že

$$\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \to -\infty\ .$$

Pro dané $c < 0$ totiž pro každé $n \geq n_0 > \max(4c^2, 2^6)$ je

$$\overbrace{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}^{\text{netriviální}} = \overbrace{n^{1/2} \cdot \underbrace{(n^{-1/6} - 1)}_{n > 2^6 \Rightarrow \cdots < -1/2}}^{\text{triviální}} < \underbrace{-n^{1/2}}_{\cdots < -2|c|} /2 < -2|c|/2 = c\ .$$

Nemusíme nalézt optimální hodnotu indexu $n_0$ v závislosti na $\varepsilon$ či $c$, to se dá udělat jen v nejjednodušších případech typu $\lim \frac{1}{n}$, jinak to bývá problém. Stačí mít libovolnou hodnotu $n_0$, aby pro každé $n \geq n_0$ platila nerovnost (resp. náležení) v definici limity. I k tomu je ale dobré umět zacházet s nerovnostmi a odhady.

• *Podposloupnosti posloupností.*

**Definice 4 (podposloupnost)** *Posloupnost* $(b_n)$ *je podposloupností posloupnosti* $(a_n)$*, pokud existuje taková posloupnost (přir. čísel)* $m_1 < m_2 < \dots$*, že pro každé* $n$ *je*

$$b_n = a_{m_n} \, .$$

*Zavedeme značení* $(b_n) \preceq (a_n)$*.*

Lehce se vidí, že relace $\preceq$ na množině posloupností je reflexivní a tranzitivní. Lehce se také vymyslí posloupnosti $(a_n)$ a $(b_n)$, že $(a_n) \preceq (b_n)$ i $(b_n) \preceq (a_n)$, ale $(a_n) \neq (b_n)$.

**Tvrzení 5 ($\preceq$ zachovává limity)** *Nechť* $(b_n) \preceq (a_n)$ *a* $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^*$*. Pak i* $\lim b_n = L$*.*

**Důkaz.** Plyne hned z definic 2 a 4, protože posloupnost $(m_n)$ v poslední definici splňuje, že $m_n \geq n$ pro každé $n$. □

Platí také následující užitečné tvrzení, ze kterého později dokážeme jen první část.

**Tvrzení 6 (o podposloupnostech)** *Nechť* $(a_n)$ *je reálná posloupnost a* $A \in \mathbb{R}^*$*. Platí následující.*

1. *Existuje posloupnost* $(b_n)$*, že* $(b_n) \preceq (a_n)$ *a* $(b_n)$ *má limitu.*

2. *Posloupnost* $(a_n)$ *nemá limitu* $\iff$ $(a_n)$ *má dvě podposloupnosti, které mají různé limity.*

3. *Není pravda, že* $\lim a_n = A$ $\iff$ *existuje posloupnost* $(b_n)$*, že* $(b_n) \preceq (a_n)$ *a* $(b_n)$ *má limitu různou od* $A$*.*

Abychom vyvrátili, že daná posloupnost má limitu, je vždy možné předvést její dvě podposloupnosti s různými limitami. Např.

$$(a_n) := ((-1)^n) = (-1,\, 1,\, -1,\, 1,\, -1,\, \dots)$$

nemá limitu, protože $(1, 1, \dots) \preceq (a_n)$ i $(-1, -1, \dots) \preceq (a_n)$.

• *Limita $n$-té odmocniny z $n$.* Je dobré umět poznat, kdy je výpočet dané limity „triviální“ a kdy „netriviální“. První případ nastává, když v limitěném výrazu žádné dva růsty nejdou proti sobě, jinak nastává druhý případ. Třeba výpočty limit $\lim\,(2^n + 3^n)$ a $\lim \frac{4}{5n-3}$ jsou triviální, kdežto výpočty limit $\lim\,(2^n - 3^n)$ a $\lim \frac{4n+7}{5n-3}$ jsou netriviální. Často netriviální limitu spočítáme tak, že ji algebraickými úpravami převedeme na triviální limitu, jako v hořejším příkladu s $\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$. Následující limita z $n^{1/n}$ je netriviální, protože $n \to +\infty$, ale $1/n \to 0$ a $(+\infty)^0$ je také neurčitý výraz. Jak hned uvidíme, exponent převládne a $n^{1/n} \to 1$.

**Tvrzení 7 ($n^{1/n} \to 1$)** *Platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ .$$

**Důkaz.** Vždy $n^{1/n} \ge 1$. Kdyby $n^{1/n} \not\to 1$, existovalo by číslo $c > 0$ a posloupnost $2 \le n_1 < n_2 < \dots$, že pro každé $i$ je $n_i^{1/n_i} > 1 + c$. Podle Binomické věty by pro každé $i$ bylo

$$\begin{aligned} n_i \ &>\ (1+c)^{n_i} = \textstyle\sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} c^j = 1 + \binom{n_i}{1} c + \binom{n_i}{2} c^2 + \cdots + \binom{n_i}{n_i} c^{n_i} \\ &\ge\ \tfrac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 \end{aligned}$$

a tedy, pro každé $i$,

$$n_i > \frac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 \rightsquigarrow 1 + \frac{2}{c^2} > n_i\ .$$

To je spor, posloupnost $n_1 < n_2 < \ldots$ není shora omezená. $\square$

• *Kdy limita posloupnosti existuje?* Uvedeme čtyři věty (9, 10, 13 a 15) v tomto duchu, druhá z nich je nepovinná. Je jasné, že existence limity posloupnosti se nezruší ani její hodnota se nezmění žádnou změnou jen konečně mnoha členů posloupnosti. Vlastnosti posloupností zaručující existenci limity by měly být taky tak *robustní*, neměly by být ovlivnitelné žádnou změnou jen konečně mnoha členů posloupnosti. Například omezenost posloupnosti, kterou definujeme za chvíli, je robustní. Následující věta o monotónní posloupnosti se často uvádí jen pro posloupnost $(a_n)$ monotónní pro každé $n$, což není robustní vlastnost. My ve všech čtyřech větách použijeme robustní vlastnosti.

• *Monotónní posloupnosti.*

**Definice 8 (monotonie)** *Posloupnost $(a_n)$ je*

- *neklesající, když $a_n \le a_{n+1}$ pro každé $n$,*
- *neklesající od $n_0$, když $a_n \le a_{n+1}$ pro každé $n \ge n_0$,*
- *nerostoucí, když $a_n \ge a_{n+1}$ pro každé $n$,*
- *nerostoucí od $n_0$, když $a_n \ge a_{n+1}$ pro každé $n \ge n_0$,*
- *monotónní, je-li neklesající nebo nerostoucí,*
- *monotónní od $n_0$, je-li neklesající od $n_0$ nebo nerostoucí od $n_0$.*

*Nerovnosti $a_n < a_{n+1}$, resp. $a_n > a_{n+1}$, dávají (ostře) rostoucí, resp. (ostře) klesající, posloupnost.*

Posloupnost $(a_n)$ je *shora omezená*, pokud $\exists\, c\, \forall\, n:\ a_n < c$, jinak je $(a_n)$ *shora neomezená*. Otočením nerovnosti máme *omezenost*, resp. *neomezenost*, posloupnosti $(a_n)$ *zdola*. Tato posloupnost je *omezená*, je-li shora i zdola omezená. Každá z těchto pěti vlastností posloupností je robustní.

**Věta 9 (o monotónní posloupnosti)** *Reálná posloupnost $(a_n)$, která je monotónní od $n_0$, má limitu. Je-li $(a_n)$ neklesající od $n_0$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup(\{a_n \mid n \geq n_0\}) & \ldots\ (a_n) \textit{ je shora omez. a} \\ +\infty & \ldots\ (a_n) \textit{ je shora neomez.} \end{cases}$$

*Je-li $(a_n)$ nerostoucí od $n \geq n_0$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf(\{a_n \mid n \geq n_0\}) & \ldots\ (a_n) \textit{ je zdola omez. a} \\ -\infty & \ldots\ (a_n) \textit{ je zdola neomez.} \end{cases}$$

**Důkaz.** Probereme pouze první případ posloupnosti neklesající od $n_0$, druhý případ je velmi podobný. Když je $(a_n)$ shora neomezená, pak pro dané $c$ existuje $m$, že $a_m > \max(c, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0})$. Tedy $a_m > c$ i $m > n_0$, a tudíž pro každé $n \geq m$ je

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_m > c \leadsto a_n > c$$

a $a_n \to +\infty$.

Pro $(a_n)$ omezenou shora položíme $s := \sup(\{a_n \mid n \geq n_0\})$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice suprema existuje $m \geq n_0$, že $s - \varepsilon < a_m \leq s$. Tedy pro každé $n \geq m$ je

$$s - \varepsilon < a_m \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq s \leadsto s - \varepsilon < a_n \leq s$$

a $a_n \to s$. □

• *Kvazimonotónní posloupnosti (nepovinná pasáž).* Řekneme, že posloupnost $(a_n)$ je *kvazimonotónní od* $n_0$, když

$$n \geq n_0 \Rightarrow \text{každá množina } \{m \mid a_m < a_n\} \text{ je konečná}$$

nebo

$$n \geq n_0 \Rightarrow \text{každá množina } \{m \mid a_m > a_n\} \text{ je konečná} \ .$$

Zřejmě když je posloupnost monotónní od $n_0$, je i kvazimonotónní od téhož $n_0$. Není těžké vymyslet posloupnost, která není monotónní od $n_0$ pro žádné $n_0$, ale je kvazimonotónní od nějakého $n_0$.

V následující větě používáme veličiny lim sup a lim inf posloupnosti, které jsou vždy definované, mohou nabývat i hodnoty $\pm\infty$ a které zavedeme příště.

**Věta 10 (o kvazimon. posloupnosti)** *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, která je kvazimonotónní od $n_0$, má limitu. Splňuje-li $(a_n)$ první, resp. druhou, podmínku definice, pak*

$$\lim\, a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}^*, \ \textit{resp.} \ \lim\, a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}^* \ .$$

**Důkaz.** Uvážíme jen případ, že $(a_n)$ splňuje první podmínku pro nějaké $n_0$, protože druhý případ je velmi podobný. Nechť je $(a_n)$ shora neomezená a je dáno $c$. Tedy existuje $m \geq n_0$, že $a_m > c$. Podle první podmínky existuje $k$, že $a_n \geq a_m > c$ pro každé $n \geq k$. Tedy $a_n \to +\infty = \limsup\, a_n$. Nechť je $(a_n)$ shora omezená, $s := \limsup\, a_n \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon$. Podle definice $\limsup\, a_n$ se v

$$s - \varepsilon < a_m < s + \varepsilon$$

první nerovnost splňuje pro nekonečně mnoho $m$ a druhá pro skoro všechna $m$. Podle první podmínky tedy existuje $k$, že $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$ platí pro každé $n \geq k$. Tedy $a_n \to s$. □

*Kvazimonotónní posloupnosti*, v nichž $n_0 = 1$, zavedl anglický matematik *Godfrey H. Hardy (1877–1947)*.

• *Bolzano–Weierstrassova věta.* Pro její důkaz potřebujeme pomocný výsledek, který je zajímavý sám o sobě.

**Tvrzení 11 (existence monotónní podposl.)** *Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.*

**Důkaz.** Pro danou posloupnost $(a_n)$ uvážíme množinu

$$M := \{n \mid \forall\, m:\ n \le m \Rightarrow a_n \ge a_m\}\ .$$

Když je nekonečná, $M = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$, máme nerostoucí podposloupnost $(a_{m_n})$. Když je $M$ konečná, vezmeme číslo $m_1 > \max(M)$. Pak jistě $m_1 \notin M$ a tedy existuje číslo $m_2 > m_1$, že $a_{m_1} < a_{m_2}$. Protože $m_2 \notin M$, existuje $m_3 > m_2$, že $a_{m_2} < a_{m_3}$. A tak dále, máme neklesající, dokonce ostře rostoucí, podposloupnost $(a_{m_n})$. □

Z věty o monotónní posloupnosti a z předešlého tvrzení hned dostáváme dva následující výsledky. První z nich je část 1 tvrzení 6.

**Důsledek 12 (podposl. s limitou)** *Posloupnost reálných čísel má vždy podposloupnost, která má limitu.*

**Věta 13 (Bolzano–Weierstrassova)** *Omezená posloupnost reálných čísel má vždy konvergentní podposloupnost.*

**Důkaz.** Nechť $(a_n)$ je omezená posloupnost a $(b_n) \preceq (a_n)$ je její monotónní podposloupnost zaručená podle předešlého tvrzení. Patrně je $(b_n)$ omezená a podle věty 9 má vlastní limitu. □

*Karl Weierstrass (1815–1897)* byl německý matematik, „otec moderní matematické analýzy". Kněz, filosof a matematik *Bernard Bolzano (1781–1848)* s italskými, německými a českými kořeny má v Praze po sobě pojmenovanou ulici u Hlavního nádraží, v Celetné ulici ho připomíná pamětní deska a na Olšanských hřbitovech se nachází jeho hrob.

- *Cauchyova podmínka.*

**Definice 14 (cauchyovskost)** *Posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *je Cauchyova (též cauchyovská), pokud*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0 :\ m,\, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon\ ,$$

*tj.* $a_m \in U(a_n, \varepsilon)$.

Cauchyovost posloupnosti reálných čísel je robustní vlastnost. Lehce se vidí, že každá Cauchyova posloupnost reálných čísel je omezená.

**Věta 15 (Cauchyova podmínka)** *Posloupnost reálných čísel* $(a_n)$ *je konvergentní, právě když* $(a_n)$ *je Cauchyova.*

**Důkaz.** Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim a_n = a$ a je dáno $\varepsilon$. Pak existuje $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2$. Tedy

$$m,\, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

a $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost. (Použili jsme vyjádření $a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$ a trojúhelníkovou nerovnost $|c+d| \leq |c| + |d|$.)

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $(a_n)$ je Cauchyova posloupnost. Jak víme, $(a_n)$ je omezená, a proto má podle Bolzano–Weierstrassovy věty konvergentní podposloupnost $(a_{m_n})$ s limitou $a$. Pro dané $\varepsilon$ tak máme $n_0$, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2$ a že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Vždy $m_n \geq n$, takže

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

Tedy $a_n \to a$. □

I francouzský matematik *Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)* pobýval v Praze, totiž v exilu v letech 1833–1838.

DĚKUJI ZA POZORNOST