PŘEDNÁŠKA 12, 9. 5. 2022
RIEMANNŮV INTEGRÁL

• *Riemannův integrál podle B. Riemanna.* V přednášce 10 jsme zavedli Riemannovy součty a v důsledku 3 jsme tam dokázali, že každá spojitá funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná. V této přednášce tuto teorii plně rozvineme. Uvažujeme funkce typu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, dělení $P = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ intervalu $[a,b]$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, testovací body $\overline{t} = (t_1, \dots, t_k)$ z P, kde $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$, a Riemannovy součty

$$R(P,\, \overline{t},\, f) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)\ .$$

Již dříve jsme si všimli, že $R(P, \overline{t}, f)$ je oznaménkovaná plocha sloupcového grafu $B_f = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i] \times I(0, f(t_i))$, kde $I(c,d)$ označuje uzavřený reálný interval s koncovými body c a d. Pro malou normu $\Delta(P) = \max_{1 \le i \le k}(a_i - a_{i-1})$ dělení P množina B_f dobře aproximuje oblast D_f pod grafem G_f funkce f a limity Riemannových součtů (definice 2 v přednášce 10) se použijí pro definici plochy A_f této oblasti D_f (část 2 definice 5 v přednášce 10). Tuto definici zde zopakujeme v jiné podobě a zavedeme pomocí ní Riemannův integrál. Jde o základní definici v matematické analýze, vedle definic derivace, spojitosti atd.

Definice 1 (Riemannův integrál) *Řekneme, že funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je riemannovsky integrovatelná, a napíšeme, že* $f \in \mathrm{R}(a,b)$*, pokud existuje takové číslo* $L \in \mathbb{R}$*, že pro* $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta$ *tak, že pro jakékoli dělení* P *intervalu* $[a,b]$ *a jakékoli testovací body* $\overline{t}$ *z* P *platí, že*

$$\Delta(P) < \delta \Rightarrow |R(P, \overline{t},\, f) - L| < \varepsilon\ .$$

Pak také píšeme

$$(\mathrm{R})\int_a^b f = L \quad \textit{nebo} \quad (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L$$

a řekneme, že (Riemannův) integrál funkce f *přes interval* $[a,b]$ *se rovná* L*.*

Pro jednoduchost zápisu vynecháme upřesnění (R), když je jasné, že integrál je Riemannův. Poslední zápis $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, který pochází od G. W. Leibnize, odkazuje na Riemannovy součty: znaménko sumy $\sum$ se proměnilo ve znaménko integrálu $\int$ a $\mathrm{d}x$ označuje společnou délku $a_i - a_{i-1}$ intervalů v *ekvidělení* P intervalu $[a,b]$ na stejně dlouhé intervaly $[a_{i-1}, a_i]$. Význam symbolu $\int_a^b f$ mírně rozšíříme tím, že definujeme $\int_a^a f := 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a jakoukoli funkci f a $\int_b^a f := -\int_a^b f$ pro $f \in \mathrm{R}(a,b)$. Protože je tato definice důležitá, uvádíme dvě její další ekvivalentní formy. Důkaz ekvivalence všech tří definic necháváme na zainteresovaném čtenáři.

Tvrzení 2 ($\iff$ definice r. integrovatelnosti) *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce. Následující tři tvrzení jsou logicky ekvivalentní.*

1. $f \in \mathrm{R}(a,b)$.
2. *(Cauchyova podmínka)* $\forall\,\varepsilon\ \exists\,\delta$, *že pro všechna dělení P a Q intervalu $[a,b]$ s příslušnými testovacími body $\overline{t}$ a $\overline{u}$ platí, že když $\Delta(P), \Delta(Q) < \delta$, pak $|R(P,\overline{t},f) - R(Q,\overline{u},f)| < \varepsilon$.*
3. *(Heineho definice) Pro každou posloupnost (P_n) dělení intervalu $[a,b]$ s testovacími body $\overline{t(n)}$ platí, že když $\lim \Delta(P_n) = 0$, pak posloupnost $\big(R(P_n,\overline{t(n)},f)\big)$ konverguje.*

Pokud platí 1, pak každá posloupnost Riemannových součtů v 3 s normami jdoucími k 0 má limitu $\lim R(P_n,\overline{t(n)},f) = \int_a^b f$.

V příští přednášce uvedeme ještě další ekvivalentní definici riemannovské integrovatelnosti, která je založená na přístupu J.-G. Darbouxe.

Teď ukážeme, že konečně mnoho změn funkčních hodnot neovlivní Riemannův integrál.

Tvrzení 3 (změny hodnot funkcí) *Předpokládáme, že $f \in \mathrm{R}(a,b)$ a že $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se od f liší pouze v konečně mnoha hodnotách. Potom $g \in \mathrm{R}(a,b)$ a $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathrm{R}(a,b)$. Předpokládáme, že g se liší od f v k

hodnotách v bodech $c_1, \dots, c_k \in [a, b]$. Nechť (P_n) je libovolná posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ s $\Delta(P_n) \to 0$ a $\overline{t(n)}$ jsou testovací body z P_n. Pak

$$\lim R(P_n, \overline{t(n)}, f) = \textstyle\int_a^b f$$

podle předchozího tvrzení. Ale pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$R(P_n, \overline{t(n)}, g) = R(P_n, \overline{t(n)}, f) + O(k \cdot \Delta(P_n)) \ .$$

Implicitní konstantu v O lze vzít jako $\max_{1 \le i \le k} |g(c_i) - f(c_i)|$. Protože $\lim \Delta(P_n) = 0$, také

$$\lim R(P_n, \overline{t(n)}, g) = \textstyle\int_a^b f \ .$$

Díky předchozímu tvrzení jsme hotovi. $\square$

Rovněž pokud $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \notin \mathrm{R}(a, b)$ a g se liší od f pouze v konečně mnoha hodnotách, pak také $g \notin \mathrm{R}(a, b)$ (proč?). Tato stabilita (R) $\int_a^b f$ kontrastuje se skutečností, že (N) $\int_a^b f$ může přestat existovat už po jediné změně hodnoty funkce f (pokud porušíme Darbouxovu vlastnost funkce f), ovšem viz poznámku na závěr o $(\mathrm{N_e}) \int$. Díky tvrzení 3 definici Riemannova integrálu rozšíříme na libovolný netriviální omezený interval.

Definice 4 ($\int_a^b f$ pro f definovanou na (a, b)) *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f \colon I \to \mathbb{R}$ pro interval typu $I = (a, b)$ nebo $I = (a, b]$ nebo $I = [a, b)$. Funkci f rozšíříme na $f_0 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ libovolnými hodnotami v a a v b a definujeme*

$$\int_a^b f := \int_a^b f_0 \ ,$$

pokud pravá strana existuje.

Stejně jako u Newtonova integrálu zachovává restrikce riemannovskou integrovatelnost. Pro jednoduchost zápisu v následujícím tvrzení vynecháme symboly restrikcí $f \mid [a, b]$ a $f \mid [b, c]$.

Tvrzení 5 (o restrikcích) *Jestliže $a < b < c$ jsou reálná čísla a $f\colon [a, c] \to \mathbb{R}$, pak*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, c) \iff f \in \mathrm{R}(a,\, b) \cap f \in \mathrm{R}(b,\, c)\ .$$

V kladném případu $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť jsou dány $f \in \mathrm{R}(a, c)$ a ε. Pro restrikci f na $[a, b]$ dokážeme Cauchyho podmínku ve tvrzení 2. Nechť P_0 a Q_0 jsou dvě dělení intervalu $[a, b]$ s příslušnými testovacími body $\overline{t(0)}$ a $\overline{u(0)}$ a takové, že $\Delta(P_0), \Delta(Q_0) < \delta$, kde δ zaručuje splnění Cauchyho podmínky pro f na $[a, c]$ a pro ε. P_0 a Q_0 libovolně rozšíříme na dělení P a Q intervalu $[a, c]$, ale tak, že $\Delta(P), \Delta(Q) < \delta$ a že body v P a ve Q obsažené v $[b, c]$ se shodují. Testovací body $\overline{t(0)}$ a $\overline{u(0)}$ také rozšíříme identickými body $t_i = u_i \in [b, c]$ na testovací body $\overline{t}$ a $\overline{u}$ z P a ze Q. Pak

$$\begin{aligned} |R(P_0,\, \overline{t(0)},\, f) - R(Q_0,\, \overline{u(0)},\, f)| \ &=\ |R(P,\, \overline{t},\, f) - R(Q,\, \overline{u},\, f)| \\ &<\ \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Důkaz Cauchyho podmínky pro restrikci f na $[b, c]$ je podobný. Identita $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ plyne sloučením dělení intervalů $[a, b]$ a $[b, c]$ s normami jdoucími k 0 do dělení intervalu $[a, c]$ (opět s normami jdoucími k 0) a pomocí posledního tvrzení ve tvrzení 2.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $f \in \mathrm{R}(a, b) \cap \mathrm{R}(b, c)$. Z toho podle tvrzení 8 níže plyne, že f je omezená a omezující konstantu označíme jako $d > 0$. Nechť P je libovolné dělení intervalu $[a, c]$ s testovacími body $\bar{t}$. P rozdělíme na dělení P_1 a P_2 intervalů $[a,b]$ a $[b,c]$ s $\Delta(P_1), \Delta(P_2) \le \Delta(P)$ a s příslušnými testovacími body $\overline{t(1)}$ a $\overline{t(2)}$ následovně. Pokud $b \in P$, rozdělení provedeme zřejmým způsobem. Pokud $b \notin P$, dělení P_1 a P_2 získáme rozdělením toho intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ z P, že $b \in (a_{i-1}, a_i)$, na dva intervaly $[a_{i-1}, b]$ a $[b, a_i]$ a $\overline{t(1)}$ a $\overline{t(2)}$ získáme výběrem dvou libovolných testovacích bodů ve dvou nových intervalech. Pak

$$R(P, \bar{t}, f) = R(P_1, \overline{t(1)}, f) + R(P_2, \overline{t(2)}, f) + O(\Delta(P)d) .$$

Odtud lehce vidíme, že splnění Cauchyho podmínky pro f na $[a,c]$ vyplývá z jejího splnění pro f na $[a,b]$ a na $[b,c]$. Identita $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ plyne stejným způsobem jako pro opačnou implikaci. □

V minulé přednášce jsme pro Newtonův integrál uvedli pouze analogii implikace $\Rightarrow$. Nyní uvádíme i opačnou implikaci. Její důkaz necháme čtenáři.

Tvrzení 6 ($\Leftarrow$ pro Newtonův $\int$) *Nechť $A < C < B < D$ jsou v $\mathbb{R}^*$, $f\colon (A,D) \to \mathbb{R}$ a nechť $f \in \mathrm{N}(A,B) \cap \mathrm{N}(C,D)$. Pak $f \in \mathrm{N}(A,D) \cap \mathrm{N}(C,B)$ a*

$$(\mathrm{N})\int_A^D f = (\mathrm{N})\int_A^B f + (\mathrm{N})\int_C^D f - (\mathrm{N})\int_C^B f .$$

Uvádíme už čtvrtou definici plochy oblasti pod grafem. Symboly D_f a G_f byly definovány v přednášce 10 .

Definice 7 (opět A_f) *Pokud* $f \in \mathrm{R}(a,b)$, *pak plochu* A_f *oblasti* D_f *pod grafem* G_f *funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *(nebo funkce* $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, *…) definujeme jako*

$$A_f := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

• *Existence a neexistence Riemannova integrálu.* Začneme dvěma výsledky o jeho neexistenci. Připomeňme, že pro $M \subset \mathbb{R}$ je funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ omezená, pokud $\exists\, c\ \forall\, x \in M\colon |f(x)| < c$. Jinak je f neomezená.

Tvrzení 8 (neomezené funkce jsou špatné) *Pokud je funkce* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neomezená, pak* $f \notin \mathrm{R}(a,b)$.

Důkaz. Předpokládáme, že $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je neomezená a ukážeme, že pro každé n existuje takové dělení P intervalu $[a,b]$ s testovacími body $\overline{t}$, že

$$\Delta(P) < 1/n \ \text{ a } \ |R(P,\,\overline{t},\,f)| > n\ .$$

To je v rozporu s Cauchyho podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost funkce f.

Z neomezenosti f a z kompaktnosti $[a,b]$ vyplývá, že existuje konvergentní posloupnost $(b_n) \subset [a,b]$ s limitou $\lim b_n = \alpha \in [a,b]$ a s $\lim |f(b_n)| = +\infty$. Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Jako P vezmeme libovolné dělení $P = (a_0,\ldots,a_k)$ intervalu $[a,b]$ s $\Delta(P) < 1/n$, ale takové, že existuje *jediný* index $j \in \{1,\ldots,k\}$, že $\alpha \in [a_{j-1},a_j]$. Pak vybereme libovolné testovací body $t_i \in [a_{i-1},a_i]$ pro každé

$i \neq j$ a uvážíme neúplný Riemannův součet

$$s := \sum_{i=1,\, i\neq j}^{k} (a_i - a_{i-1}) f(t_i) \ .$$

Nyní vybereme zbývající testovací bod $t_j \in [a_{j-1}, a_j]$ tak, aby $|(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| > |s| + n$ (což lze, protože $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro každé dostatečně velké n). Pak definujeme $\overline{t}$ jako sestávající ze všech těchto testovacích bodů a pomocí trojúhelníkové nerovnosti $|u + v| \geq |u| - |v|$ dostaneme, že

$$|R(P, \overline{t}, f)| \geq |(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| - |s| > n \ ,$$

jak se požadovalo. □

Tvrzení 9 (stejně jako příliš nespojité funkce) *Je-li funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nespojitá v každém bodě nějakého podintervalu $[c, d] \subset [a, b]$ s $c < d$, pak $f \notin \mathrm{R}(a, b)$.*

Například Dirichletova funkce $d\colon [0, 1] \to \{0, 1\}$, daná jako $d(x) = 0$ pro racionální x a $d(x) = 1$ pro iracionální x, je všude nespojitá, takže není riemannovsky integrovatelná. To se snadno vidí přímo, zkuste si to jako cvičení. Dokázat tvrzení 9 v jeho obecnosti je o něco těžší než dokázat tvrzení 8 a potřebujeme k tomu následující větu 10, která je zajímavá i sama o sobě. Nechť $a < b$ jsou reálná čísla. Množina $M \subset [a, b]$ je *řídká (v $[a, b]$)*, pokud pro každé okolí $U(c, \varepsilon)$ s $c \in [a, b]$ existuje takové okolí $U(d, \delta) \subset U(c, \varepsilon) \cap [a, b]$, že $U(d, \delta) \cap M = \emptyset$.

Věta 10 (Baireova) *Jsou-li $a < b$ reálná čísla a $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá množina M_n není řídká.*

Důkaz. Předpokládáme, že ve sjednocení $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je každá množina M_n řídká a odvodíme spor. Protože M_1 je řídká, existuje takový podinterval $[a_1, b_1] \subset [a,b]$, že $a_1 < b_1$ a $[a_1, b_1] \cap M_1 = \emptyset$. Protože M_2 je řídká, existuje takový podinterval $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, že $a_2 < b_2$ a $[a_2, b_2] \cap M_2 = \emptyset$. Pokračujeme-li tímto způsobem, získáme takovou posloupnost vnořených intervalů

$$[a,\, b] \supset [a_1,\, b_1] \supset [a_2,\, b_2] \supset \cdots \supset [a_n,\, b_n] \supset \dots\ ,$$

že pro každé n je $a_n < b_n$ a $[a_n, b_n] \cap M_n = \emptyset$. Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a,b]$. Tato limita existuje a leží v $[a,b]$, protože posloupnost (a_n) je neklesající a je zdola omezená číslem a a shora číslem b. Dokonce $a_n < b_m$ pro každé n a každé m, takže $\alpha \in [a_n, b_n]$ pro každé n. Pak ale $\alpha \notin M_n$ pro každé n, ve sporu s tím, že $\alpha \in [a,b]$. □

Důkaz tvrzení 9. Nechť f, a, b, c a d jsou, jak je uvedeno (v předpokladu implikace). Ukážeme, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé n existuje dělení P intervalu $[a,b]$ s testovacími body $\overline{t}$ a $\overline{u}$, že

$$\Delta(P) < 1/n \ \text{ a } \ R(P,\, \overline{t},\, f) - R(P,\, \overline{u},\, f) > \varepsilon\ .$$

To je v rozporu s Cauchyho podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost funkce f.

Pro $j \in \mathbb{N}$ definujeme množinu $M_j \subset [c,d]$ jako

$$\{x \in [c,\, d] \mid \forall\, \delta\ \exists\, y,\, z \in U(x,\delta) \cap [c,\, d] \colon f(y) - f(z) > 1/j\}\ .$$

Protože f je nespojitá na $[c,d]$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = [c,d]$. Podle Baireovy věty existuje takové $m \in \mathbb{N}$, že M_m není v $[c,d]$ řídká. To znamená, že existuje takový podinterval $[c_1, d_1] \subset [c,d]$, že $c_1 < d_1$ a pro každé okolí $U(e,\delta)$ protínající $[c_1, d_1]$ průnik obsahuje bod z M_m.

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Jako P vezmeme jakékoli dělení intervalu $[a,b]$ s $\Delta(P) < 1/n$ a takové, že body c_1 a d_1 leží v P. Pro intervaly $[a_{i-1}, a_i]$ z P s vnitřky disjunktními s $[c_1, d_1]$ vybereme testovací body $t_i = u_i \in [a_{i-1}, a_i]$ libovolně. Pokud $[a_{i-1}, a_i] \subset [c_1, d_1]$, můžeme vybrat takové body $t_i, u_i \in [a_{i-1}, a_i]$, že $f(t_i) - f(u_i) > 1/m$ (protože M_m je hustá v $[c_1, d_1]$). Pak definujeme $\overline{t}$, resp. $\overline{u}$, jako sestávající ze všech těchto bodů t_i, resp. u_i. Z toho vyplývá, že rozdíl $R(P, \overline{t}, f) - R(P, \overline{u}, f)$ se rovná

$$\sum_{[a_{i-1},\, a_i] \subset [c_1,\, d_1]} (a_i - a_{i-1})(f(t_i) - f(u_i)) \ ,$$

což je

$$> \frac{1}{m} \sum_{[a_{i-1},\, a_i] \subset [c_1,\, d_1]} (a_i - a_{i-1}) = \frac{d_1 - c_1}{m} \ .$$

Můžeme tedy položit $\varepsilon := (d_1 - c_1)/m$. □

Existuje mocné kritérium — Lebesgueova věta níže — s jehož pomocí se obvykle snadno určí, zda je daná funkce riemannovsky integrovatelná nebo ne. K jeho formulaci potřebujeme dvě definice. Pro libovolnou funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ s $M \subset \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathrm{DC}(f) := \{x \in M \mid f \text{ je nespojitá v } x\} \ .$$

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ *má míru* 0, pokud pro každé ε existují takové intervaly $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ a $a_n < b_n$, že

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n,\, b_n] \ \text{ a } \ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon \ .$$

Je snadné vidět, že každá nejvýše spočetná množina má míru 0, že každé spočetné sjednocení množin míry 0 má míru 0, že každá podmnožina množiny míry 0 má míru 0 a že žádný netriviální interval nemá míru 0. Následující větu H. Lebesguea nebudeme dokazovat, ale s ohledem na tvrzení 8 a 9 je poměrně jasné, proč platí.

Věta 11 (Lebesgueova) *Pro každou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ platí ekvivalence, že*

$$f \in \mathrm{R}(a,\, b) \iff f \text{ je omezená a } \mathrm{DC}(f) \text{ má míru } 0\,.$$

Lebesgueova věta implikuje uzavřenost třídy riemannovsky integrovatelných funkcí na několik operací.

Důsledek 12 (dobré operace pro r. integrov.) *Platí následující.*

1. $f, g \in \mathrm{R}(a,b) \Rightarrow cf+dg \in \mathrm{R}(a,b)$ *pro libovolné* $c, d \in \mathbb{R}$.
2. $f, g \in \mathrm{R}(a,b) \Rightarrow f \cdot g \in \mathrm{R}(a,b)$.
3. *Pokud* $g\colon [a,b] \to M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $g \in \mathrm{R}(a,b)$ *a* f *je spojitá a omezená, pak* $f(g) \in \mathrm{R}(a,b)$.
4. *Pokud* $g\colon [c,d] \to [a,b]$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, g *je spojitá a* $f \in \mathrm{R}(a,b)$, *pak* $f(g) \in \mathrm{R}(c,d)$.

Důkaz. 1. Předpokládáme, že $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné. Tedy f a g jsou omezené, stejně jako $cf+dg$. Protože $\mathrm{DC}(cf+dg) \subset \mathrm{DC}(f) \cup \mathrm{DC}(g)$ a poslední dvě množiny mají míru 0, i první množina má míru 0.

2. Tento důkaz je podobný předchozímu, pouze operaci lineární kombinace nahradíme násobením.

3. Vzhledem k tomu, že f je omezená, je omezená i složená funkce

$f(g)$. Protože platí inkluze $\mathrm{DC}(f(g)) \subset \mathrm{DC}(g)$ a druhá množina má míru 0, má míru 0 i první množina.

4. Tento důkaz je podobný předchozímu, jedinou změnou je inkluze $\mathrm{DC}(f(g)) \subset \mathrm{DC}(f)$. $\square$

Jak třeba dokázat, že dělení zachovává riemannovskou integrovatelnost, pokud se vyhneme neomezeným funkcím? Nechť $g \in \mathrm{R}(a,b)$ je taková, že ani $0 \in g[[a,b]]$ ani 0 není limitním bodem $g[[a,b]]$. Použijeme část 3 důsledku pro g, $M := g[[a,b]]$ a $f(x) = 1/x$ a dostaneme, že $1/g \in \mathrm{R}(a,b)$.

Věta 13 (spojité funkce jsou r. integrovatelné)
Je-li $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $f \in \mathrm{R}(a,b)$.

Důkaz. To bezprostředně vyplývá z věty 11, protože jakákoli spojitá funkce definovaná na kompaktní množině je omezená a má $\mathrm{DC}(f) = \emptyset$. Ale také jsme to přímo dokázali již v důsledku 3 v přednášce 10. $\square$

Věta 14 (monotónní funkce jsou r. integrovatelné)
Pokud je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotónní, pak $f \in \mathrm{R}(a,b)$.

Důkaz. Předpokládáme, že f je neklesající, případ nerostoucí f je podobný. Stejně jako ve větě 13 nejprve větu odvodíme z Lebesgueovy věty a poté poskytneme přímý důkaz.

Funkce f je omezená, protože $f(a) \le f(x) \le f(b)$ pro každé $x \in [a,b]$. Definujeme injekci $\varphi\colon \mathrm{DC}(f) \to \mathbb{Q}$. Ta ukazuje, že $\mathrm{DC}(f)$ je nejvýše spočetná, má tedy míru 0 a $f \in \mathrm{R}(a,b)$ podle Lebesgueovy věty. Jestliže $p \in \mathrm{DC}(f)$, pak díky monotonii f obě jednostranné limity

$$l(p) := \lim_{x\to p^-} f(x) \ \text{ a } \ r(p) := \lim_{x\to p^+} f(x)$$

existují, jsou konečné, $l(p) \le f(p) \le r(p)$ a alespoň jedna ze dvou nerovností je ostrá. Hodnotu $\varphi(p)$ definujeme jako libovolný zlomek v $(l(p), r(p)) \cap \mathbb{Q}$. Zřejmě $\varphi(p) < \varphi(q)$ pro jakékoli $p < q$ v $\mathrm{DC}(f)$.

Teď dokážeme přímo, že $f \in \mathrm{R}(a, b)$. Pro f dokážeme Cauchyho podmínku z tvrzení 2. Nechť $P = (a_0, \ldots, a_k)$ a $Q = (b_0, \ldots, b_l)$ jsou dvě dělení intervalu $[a, b]$ s příslušnými testovacími body $\overline{t}$ a $\overline{u}$ a nechť je dáno ε. Položíme $\delta := +\infty$, když $f(a) = f(b)$ (tj. f je konstantní funkce), a jinak položíme $\delta := \varepsilon/2(f(b) - f(a))$.

Dále předpokládáme, že $P \subset Q$, tj. že $a_0 = b_{i_0} = a$, $a_1 = b_{i_1}, \ldots,$ $a_k = b_{i_k} = b$ pro nějaké indexy $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_k = l$. Stejně jako dříve redukujeme obecná dělení P a Q na tento případ. Nechť $k = 1$. Potom, protože f na $[a, b]$ neklesá, $R(P, \overline{t}, f) - R(Q, \overline{u}, f)$ je alespoň

$$(a_1 - a_0)f(a_0) - \sum_{i=1}^{l}(b_i - b_{i-1})f(b_l) = (b - a)\cdot(f(a) - f(b))$$

a podobně nanejvýš

$$(b - a)\cdot(f(b) - f(a)) \ .$$

Takže pro $k = 1$,

$$|R(P,\, \overline{t},\, f) - R(Q,\, \overline{u},\, f)| \le (b - a)\cdot(f(b) - f(a)) \ .$$

Pro obecné k použijeme tento odhad pro každé dělení $a_{r-1} = b_{i_{r-1}} < b_{i_{r-1}+1} < \cdots < b_{i_r} = a_r$ intervalu $[a_{r-1}, a_r]$, $r = 1, 2, \ldots, k$, tedy s a nahrazeným a_{r-1} a b nahrazeným a_r. Pokud $\Delta(P) < \delta$

(tedy i $\Delta(Q) < \delta$), pak pomocí trojúhelníkové nerovnosti máme, že

$$\begin{aligned}
&|R(P, \bar{t}, f) - R(Q, \overline{u}, f)| \\
&\le \sum_{r=1}^{k} (a_r - a_{r-1}) \cdot (f(a_r) - f(a_{r-1})) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))} \sum_{r=1}^{k} (f(a_r) - f(a_{r-1})) \\
&= \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon/2 \; .
\end{aligned}$$

Jsou-li P a Q obecná dělení intervalu $[a, b]$ s příslušnými testovacími body $\bar{t}$ a $\overline{u}$ a s $\Delta(P), \Delta(Q) < \delta$, položíme $R := P \cup Q$ (pak i $\Delta(R) < \delta$) a vezmeme libovolné testovací body $\overline{v}$ v R. Protože $P \subset R$ a $Q \subset R$, dostaneme podle předchozího případu, že

$$\begin{aligned}
&|R(P, \bar{t}, f) - R(Q, \overline{u}, f)| \le \\
&\le |R(P, \bar{t}, f) - R(R, \overline{v}, f)| + |R(R, \overline{v}, f) - R(Q, \overline{u}, f)| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \; .
\end{aligned}$$

□

• *Srovnání Riemannova integrálu a Newtonova integrálu.* Znovu se podíváme na vztah mezi Riemannovým integrálem a primitivními funkcemi, který jsme uvažovali v přednášce 10. V důsledku 4 jsme tam dokázali, že pro spojitou $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se (R) $\int_a^b f =$ (N) $\int_a^b f$. Nyní to rozšíříme na obecnější situaci. V důkazu následující věty, známé jako *Druhá základní věta analýzy*, opět využijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě.

Věta 15 (Zvana 2) *Nechť* $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$*, kde* $a<b$ *jsou reálná čísla, má primitivní funkci* $F\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ *a nechť* $f\in \mathrm{R}(a,b)$ *(viz definice 4). Pak existují konečné limity* $F(a):=\lim_{x\to a}F(x)$ *a* $F(b):=\lim_{x\to b}F(x)$ *a*

$$(\mathrm{R})\int_a^b f = F(b)-F(a) = (\mathrm{N})\int_a^b f\ .$$

Důkaz. Funkci f libovolně rozšíříme na funkci $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, také předpokládáme, že $f\in\mathrm{R}(a,b)$, a na (a,b) uvážíme její primitivní funkci F. Nejprve dokážeme, že limity

$$F(a):=\lim_{x\to a}F(x)\ \text{ a }\ F(b):=\lim_{x\to b}F(x)$$

existují a jsou vlastní. Za tím účelem dokážeme, že F je na (a,b) stejnoměrně spojitá (ve skutečnosti dokonce lipschitzovsky spojitá, viz definice před další větou). Z toho pak vyplývá, že pro libovolnou posloupnost $(a_n)\subset(a,b)$ s $\lim a_n=a$ je posloupnost $(F(a_n))$ Cauchyova a má tedy vlastní limitu $F(a)$, která nezávisí na posloupnosti (a_n), a podobně pro $F(b)$. Protože f je podle tvrzení 8 omezená, můžeme vzít omezující konstantu $C>0$. Lagrangeova věta o střední hodnotě implikuje, že pro jakýkoli podinterval $[c,d]\subset(a,b)$ s $c<d$ existuje takový bod $e\in(c,d)$, že $F(d)-F(c)=f(e)\cdot(d-c)$. Tím pádem

$$|F(d)-F(c)|=|f(e)|\cdot|d-c|<C|d-c|$$

a F je na (a,b) stejnoměrně spojitá.

Dále ukážeme, že $F(b)-F(a)=(\mathrm{R})\int_a^b f$. Nechť je dáno ε. V (a,b) můžeme vzít taková čísla $c<d$, že $|F(a)-F(c)|, |F(b)-F(d)|<\varepsilon$, $C|a-c|, C|b-d|<\varepsilon$ a že existuje takové dělení $P=$

$(a_0, \ldots, a_k)$ intervalu $[a, b]$, že $a_1 = c$, $a_{k-1} = d$ a že pro všechny testovací body $\overline{t}$ z P je $|\int_a^b f - R(P, \overline{t}, f)| < \varepsilon$. Z přednášky 10 víme, že existují takové testovací body $\overline{e}$ z restrikce dělení P na interval $[c, d] = [a_1, a_{k-1}]$, že

$$F(d) - F(c) = \sum_{i=2}^{k-1} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(e_i) \ .$$

Testovací body $\overline{u}$ z P definujeme jako složené z $\overline{e}$ a ze dvou libovolných testovacích bodů u_1 a u_k v příslušných intervalech $[a, a_1] = [a, c]$ a $[a_{k-1}, b] = [d, b]$. Pak

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathrm{R}) \int_a^b f - (F(b) - F(a))\right| \\
&\le \left|(\mathrm{R}) \int_a^b f - R(P, \overline{u},\, f)\right| + \left|R(P, \overline{u},\, f) - (F(b) - F(a))\right| \\
&< \varepsilon + \left|R(P, \overline{u},\, f) - (F(d) - F(c))\right| + \left|(F(d) - F(c)) - \right. \\
&\left. - (F(b) - F(a))\right| \\
&\le \varepsilon + \left|(c - a) \cdot f(u_1) + (b - d) \cdot f(u_k)\right| + \left|F(d) - F(b)\right| + \\
&+ \left|F(a) - F(c)\right| \\
&< 3\varepsilon + C|c - a| + C|b - d| < 5\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Číslo $\varepsilon > 0$ může být libovolné, takže $(\mathrm{R}) \int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

V literatuře se Zvana 2 často objevuje ve formulačně složitější podobě, kde se existence limit $F(a)$ a $F(b)$ zahrnuje do předpokladů. Jak jsme právě viděli, není to nutné.

Následuje *První základní věta analýzy*. Definujeme pro ni, že funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je *lipschitzovsky spojitá*, pokud existuje taková konstanta $C > 0$, že

$$\forall\, x,\, y \in M\colon |f(x) - f(y)| \le C|x - y| \ .$$

Je to vlastnost silnější než spojitost nebo i stejnoměrná spojitost: každá lipschitzovsky spojitá funkce je stejnoměrně spojitá.

Věta 16 (Zvana 1) *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je v $\mathrm{R}(a,b)$. Potom pro každý bod $x \in (a,b]$ je $f \in \mathrm{R}(a,x)$ a funkce $F\colon [a,\,b] \to \mathbb{R}$, daná jako*

$$F(x) := \int_a^x f\ ,$$

je lipschitzovsky spojitá. Navíc pro ni platí, že $F'(x) = f(x)$ v každém bodu spojitosti $x \in [a,b]$ funkce f.

Důkaz. Nechť tedy $f \in \mathrm{R}(a,b)$. Podle tvrzení 5 je f riemannovsky integrovatelná na libovolném podintervalu $[a',b']$, $a' < b'$, intervalu $[a,b]$. Takže F je správně definována a $F(a) = 0$. Protože f je omezená (tvrzení 8), můžeme vzít omezující konstantu $c > 0$. Nechť $C := 1 + c$. Nechť $x < y$ jsou v $[a,b]$ a podle definice 1 nechť P je takové dělení intervalu $[x,y]$ s testovacími body $\overline{t}$, že $|\int_x^y f - R(P,\overline{t},f)| < y - x$. Podle tvrzení 5 a definice funkce F je

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_x^y f\right| \le y-x+|R(P,\,\overline{t},\,f)| \le y-x+c(y-x)$$

a $|F(y) - F(x)| \le C|y - x|$. F je tedy lipschitzovsky spojitá.

Dokážeme druhou část o derivaci funkce F. Nechť x_0 v $[a,b]$ je bod spojitosti funkce f a je dáno ε. Vezmeme δ tak, že $x \in U(x_0,\delta) \cap [a,b] \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0),\varepsilon)$. Nechť $x \in P(x_0,\delta) \cap [a,b]$ je libovolné, řekněme $x > x_0$ (pro $x < x_0$ je argument podobný). Potom vezmeme takové dělení P intervalu $[x_0,x]$ s testovacími body

$\bar{t}$, že $|\int_{x_0}^x f - R(P, \bar{t}, f)| < \varepsilon(x - x_0)$, a vidíme, že

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f - f(x_0)$$

je menší než

$$\begin{aligned} &\frac{R(P,\ \bar{t},\ f) + \varepsilon(x - x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \\ &< \frac{(x - x_0)(f(x_0) + \varepsilon + \varepsilon)}{x - x_0} - f(x_0) = 2\varepsilon\ , \end{aligned}$$

a podobně je i $> -2\varepsilon$. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Až když jsem psal tento důkaz Zvana 1, uvědomil jsem si (přestože tyto záležitosti vyučuji od roku 2004), že důkaz poskytuje nejen spojitost funkce F, ale dokonce její lipschitzovskou spojitost. Jako bezprostřední důsledek Zvana 1 získáme další (a jednodušší) důkaz poslední věty z přednášky 9, že každá spojitá funkce má primitivní funkci.

Důsledek 17 (existence antiderivací) *Každá spojitá funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci.*

Důkaz. Jestliže $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, pak $f \in \mathrm{R}(a,b)$ podle věty 13. Podle předchozí věty je $\int_a^x f$ na $[a,b]$ primitivní k $f(x)$. $\square$

Z přednášky 9 víme, jak tyto primitivní funkce slepit do primitivní funkce spojité funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ definované na obecném netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Snadno se naleznou funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, které jsou integrovatelné riemannovsky, ale ne newtonovsky, a obráceně. Například

$$\begin{aligned}&(\mathrm{R})\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}=(\mathrm{R},\ \mathrm{N})\int_{-1}^{0}\mathrm{sgn}+(\mathrm{R},\ \mathrm{N})\int_{0}^{1}\mathrm{sgn}\\&=[-x]_{-1}^{0}+[x]_{0}^{1}=-1+1=0\ ,\end{aligned}$$

ale integrál

$$(\mathrm{N})\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}$$

není definován, protože funkce $\mathrm{sgn}(x)$ nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci, není tam Darbouxova.

Teď musíme poznamenat, že tento příklad lze opravit použitím obecnějších primitivních funkcí. Řekneme, že $F\colon I\to\mathbb{R}$ je *zobecněná primitivní funkce* funkce $f\colon I\to\mathbb{R}$, kde I je netriviální reálný interval, pokud je F spojitá a $F'(x)=f(x)$ platí pro každé $x\in I$ s konečně mnoha výjimkami. Pak definujeme *rozšířený Newtonův integrál* funkce $f\colon(A,B)\to\mathbb{R}$ jako

$$(\mathrm{N_e})\int_{A}^{B}f:=[F]_{A}^{B}$$

pro jakoukoli zobecněnou primitivní funkci F funkce f na intervalu (A,B). Nyní se už správně

$$(\mathrm{N_e})\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}(x)=[\,|x|\,]_{-1}^{1}=1-1=0\ .$$

Ve druhém příkladu je

$$(\mathrm{N})\int_{0}^{1}1/\sqrt{x}=\big[2\sqrt{x}\big]_{0}^{1}=2,\quad\text{ale integrál}\quad(\mathrm{R})\int_{0}^{1}1/\sqrt{x}$$

neexistuje, protože integrand je na intervalu $(0,1)$ neomezený, viz tvrzení 8. V příští poslední přednášce uvidíme, jak vylepšit definici 1 tak, že (R) $\int \rightsquigarrow$ ($\mathrm{R_c}$) $\int$, pro který se už správně

$$(\mathrm{R_c}) \int_0^1 1/\sqrt{x} = 2 \; .$$

Tak přijďte na poslední přednášku nebo si ji alespoň přečtěte!

DĚKUJI ZA POZORNOST!