PŘEDNÁŠKA 11, 2. 5. 2022
VÍCE O NEWTONOVĚ INTEGRÁLU. POČÍTÁNÍ ANTIDERIVACÍ RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

• *Obecný Newtonův integrál.* $(\mathrm{N})\int_a^b f$ rozšíříme na funkce definované na neprázdných otevřených intervalech (A,B) s $A<B$ v $\mathbb{R}^*$. Jsou to právě všechny intervaly typu $(-\infty,a)$, (a,b), $(a,+\infty)$ a $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ pro reálná čísla $a<b$.

Definice 1 (obecný Newtonův integrál) *Nechť $A<B$ jsou v $\mathbb{R}^*$ a $F,f\colon(A,B)\to\mathbb{R}$ jsou takové funkce, že F je primitivní k f. Newtonův integrál funkce f přes interval (A,B) definujeme jako rozdíl*

$$(\mathrm{N})\int_A^B f = F(B)-F(A) := \lim_{x\to B} F(x) - \lim_{x\to A} F(x)\ ,$$

jestliže poslední dvě limity existují a jsou vlastní. Pak plochu A_f oblasti D_f pod G_f definujeme jako

$$A_f := (\mathrm{N})\int_A^B f\ .$$

Stejně jako u Newtonova integrálu přes (a,b) i hodnota tohoto integrálu nezávisí na volbě F, protože každé dvě primitivní funkce k funkci f se liší jen konstantním posunem. Pokud je $(\mathrm{N})\int_A^B f$ definovaný, řekneme, že f je *newtonovsky integrovatelná přes* (A,B) a napíšeme, že

$$f\in\mathrm{N}(A,\,B)\ .$$

Není těžké vidět, že pokud $(A_0,B_0)\subset(A,B)$ jsou neprázdné otevřené intervaly, pak $f\in\mathrm{N}(A,B)\Rightarrow f\,|\,(A_0,B_0)\in\mathrm{N}(A_0,B_0)$.

V situacích jako je tato vynecháme symbol restrikce a napíšeme pouze $f \in \mathrm{N}(A_0, B_0)$. Například $\frac{1}{1+x^2} \in \mathrm{N}(0, +\infty)$, protože

$$(\mathrm{N})\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \overbrace{\arctan(+\infty)}^{\lim_{x\to+\infty}\arctan x} - \arctan(0) = \pi/2 - 0 = \pi/2\ .$$

Pro $F\colon (A, B) \to \mathbb{R}$ zavádíme zápis

$$[F]_A^B := \lim_{x\to B} F(x) - \lim_{x\to A} F(x)\ ,$$

jestliže obě limity existují a jsou vlastní.

• *Zobecnění obecného Newtonova integrálu.* Integrál $(\mathrm{N})\int_A^B f$ ještě trochu rozšíříme tak, že povolíme $B \le A$. Pro každou funkci f položíme $(\mathrm{N})\int_A^A f := 0$. Pro každou $f \in \mathrm{N}(A, B)$ pak máme, že

$$(\mathrm{N})\int_B^A f = -\,(\mathrm{N})\int_A^B f\ .$$

Následující dvě tvrzení zde nebudeme dokazovat, důkazy jsou snadné.

Tvrzení 2 (aditivita integrálu) *Pokud* $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ *a* $f \in \mathrm{N}(\min(A, B, C), \max(A, B, C))$, *pak*

$$(\mathrm{N})\int_A^C f = (\mathrm{N})\int_A^B f + (\mathrm{N})\int_B^C f$$

neboli

$$(\mathrm{N})\int_A^B f + (\mathrm{N})\int_B^C f + (\mathrm{N})\int_C^A f = 0\ .$$

Tvrzení 3 (linearita integrálu) *Pokud jsou A a B v $\mathbb{R}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $f, g \in \mathrm{N}(\min(A, B), \max(A, B))$, pak*

$$(\mathrm{N}) \int_A^B (af + bg) = a \cdot (\mathrm{N}) \int_A^B f + b \cdot (\mathrm{N}) \int_A^B g \, .$$

• *Integrace per partes.* Avšak vzorec pro integraci per partes pro obecný Newtonův integrál dokážeme.

Věta 4 ($(\mathrm{N}) \int_A^B$ per partes) *Uvažujeme takové 4 funkce $f, g, F, G\colon (A, B) \to \mathbb{R}$, kde $A < B$ jsou v $\mathbb{R}^*$, že F, resp. G, je primitivní k f, resp. ke g. Pak rovnost*

$$\underbrace{(\mathrm{N}) \int_A^B fG}_{T_1} = \underbrace{[FG]_A^B}_{T_2} - \underbrace{(\mathrm{N}) \int_A^B Fg}_{T_3}$$

platí vždy, když jsou definovány dva ze tří členů T_i.

Důkaz. 1. Předpokládejme, že jsou definovány první dva členy $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$. Funkce fG má tedy na (A, B) primitivní funkci H s $[H]_A^B = T_1$ a $[FG]_A^B = T_2$. Pak

$$(FG - H)' = fG + Fg - fG = Fg \ \text{ a } \ [FG - H]_A^B = T_2 - T_1 \, .$$

$FG - H$ je tedy na (A, B) primitivní k Fg a poslední rovnost je jen úprava rovnosti uvedené ve větě.

2. Předpokládejme, že jsou definovány první a třetí člen $T_1 \in \mathbb{R}$ a $T_3 \in \mathbb{R}$. Takže fG, resp. Fg, má na (A, B) primitivní funkci H_1, resp. H_2, s $[H_1]_A^B = T_1$ a $[H_2]_A^B = T_3$. Pak

$$(H_1 + H_2)' = fG + Fg = (FG)' \text{ na } (A, B) \, .$$

Podle dřívějšího výsledku (věta 9 v přednášce 9) existuje taková konstanta c, že $H_1 + H_2 + c = FG$ na (A, B). Proto

$$[FG]_A^B = [H_1 + H_2 + c]_A^B = [H_1]_A^B + [H_2]_A^B = T_1 + T_3 \ ,$$

což je jen úprava rovnosti uvedené ve větě.

3. Případ, kdy jsou definovány $T_2, T_3 \in \mathbb{R}$, je podobný případu 1 a je ponechán čtenáři jako cvičení. $\square$

Vezměme například $I_n := (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom $I_0 = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = -\mathrm{e}^{-\infty} - (-\mathrm{e}^{-0}) = -0 - (-1) = 1$. Pro $n > 0$ pomocí poslední věty a indukce podle n dostaneme, že

$$\begin{aligned}
I_n &= (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} x^n \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)' \\
&\overset{\text{věta 4, } \exists\, T_2 \text{ a } T_3}{=} [-x^n \mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} + (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} (x^n)' \, \mathrm{e}^{-x} \\
&= -0 + 0 + n \cdot (\mathrm{N}) \int_0^{+\infty} x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \\
&= n \cdot I_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

Proto $I_n = n! = \prod_{j=1}^{n} j$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Tuto reprezentaci faktoriálů pomocí integrálů lze použít pro důkaz Stirlingova vzorce, který jsme zmínili minule.

• *Integrace substitucí.* Dva vzorce pro integraci substitucí z minulé přednášky upravíme pro obecný Newtonův integrál.

Věta 5 ((N) $\int_A^B f$ substitucí) *Nechť $A < B$ a $C < D$ jsou v $\mathbb{R}^*$, $g\colon (A,B) \to (C,D)$, $f\colon (C,D) \to \mathbb{R}$ a g má na (A,B) vlastní g', pak platí dvě následující tvrzení.*

1. *Předpokládejme, že f má na (C,D) primitivní funkci F. Pak rovnost*

$$(\mathrm{N})\int_A^B f(g)\cdot g' = (\mathrm{N})\int_{g(A)}^{g(B)} f$$

   platí, pokud je definována pravá strana.

2. *Pokud je g na a $g' \neq 0$ na (A,B), pak rovnost*

$$(\mathrm{N})\int_C^D f = (\mathrm{N})\int_{g^{-1}(C)}^{g^{-1}(D)} f(g)\cdot g'$$

   platí, pokud je definována pravá strana. Dále platí, že v nějakém pořadí se $\{g^{-1}(C),\, g^{-1}(D)\} = \{A,\, B\}$.

Důkaz. 1. Nechť A, B, C, D, g, f a F jsou, jak je uvedeno, a nechť je definována pravá strana. To znamená, že limity

$$g(A) := \lim_{x\to A} g(x) \in \mathbb{R}^* \ \text{ a } \ g(B) := \lim_{x\to B} g(x) \in \mathbb{R}^*$$

existují. Patrně jsou $g(A)$ a $g(B)$ limitní body intervalu (C,D). Také to znamená, že pravá strana má hodnotu

$$\lim_{y\to g(B)} F(y) - \lim_{y\to g(A)} F(y)$$

(zejména poslední dvě limity existují a jsou vlastní). Již víme, že

$F(g)$ je na (A,B) primitivní k $f(g)\cdot g'$. Tím pádem

$$\begin{aligned}
(\mathrm{N})\int_{g(A)}^{g(B)} f &= \lim_{y\to g(B)} F(y) - \lim_{y\to g(A)} F(y)\\
&= \lim_{x\to B} F(g(x)) - \lim_{x\to A} F(g(x))\\
&= (\mathrm{N})\int_A^B f(g)\cdot g'\ .
\end{aligned}$$

Zde první a třetí rovnost vyplývají z definice obecného Newtonova integrálu. Prostřední rovnost plyne použitím věty o limitách složených funkcí (věta 14 v přednášce 5 se splněnou podmínkou 1, protože vnější funkce F je spojitá).

2. Nechť A, B, C, D, g a f jsou, jak je uvedeno, a nechť je definována pravá strana. Z důkazu části 2 věty 13 v poslední přednášce víme, že g i g^{-1} je rostoucí nebo klesající bijekce (a g^{-1} je spojitá). Tedy limity

$$g^{-1}(C) := \lim_{y\to C} g^{-1}(y) \in \mathbb{R}^* \ \text{ a } \ g^{-1}(D) := \lim_{y\to D} g^{-1}(y) \in \mathbb{R}^*$$

existují a v nějakém pořadí se rovnají $\{A,B\}$. Protože je pravá strana definovaná, $f(g)\cdot g'$ má na (A,B) primitivní funkci G a pravá strana má hodnotu

$$\lim_{x\to g^{-1}(D)} G(x) - \lim_{x\to g^{-1}(C)} G(x)\ .$$

Již víme, že $G(g^{-1})$ je na (C,D) primitivní k f. Tím pádem

$$\begin{aligned}
(\mathrm{N})\int_{g^{-1}(C)}^{g^{-1}(D)} f(g)\cdot g' &= \lim_{x\to g^{-1}(D)} G(x) - \lim_{x\to g^{-1}(C)} G(x)\\
&= \lim_{y\to D} G(g^{-1}(y)) - \lim_{y\to C} G(g^{-1}(y))\\
&= (\mathrm{N})\int_C^D f\ .
\end{aligned}$$

První a třetí rovnost opět vyplývají z definice obecného Newtonova integrálu a druhá rovnost opět plyne stejným způsobem pomocí věty o limitách složených funkcí. $\square$

Dva předchozí vzorce ukazují, jak obecný Newtonův integrál souvisí s operací skládání funkcí. Pro výpočet integrálu (N) $\int_A^B f$ tak použijeme substituční vzorce a integraci per partes a následující tabulku primitivních funkcí. Integrál (N) $\int_A^B f$ počítáme ve dvou krocích. Nejdřív nalezneme zmíněnými metodami PF F k f na (A, B). Pak, pokud F existuje, je už obvykle jednoduché spočítat limity funkce F v A a B. Například minule jsme spočítali, že

$$\int \sqrt{1-t^2} = \frac{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t}{2} =: F(t) \ \text{ na } (-1,\, 1)\ .$$

(Podle tvrzení 6 v přednášce 8 se $F'(-1) = F'(1) = 0$, a proto tento vztah platí i na $[-1, 1]$.) Tím pádem

$$\begin{aligned}(\mathrm{N}) \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} &= \lim_{t\to 1} F(t) - \lim_{t\to -1} F(t) \\ &= (\arcsin 1)/2 - (\arcsin(-1))/2 \\ &= \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2\ .\end{aligned}$$

Takže pro $f(t) = \sqrt{1-t^2}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ se plocha oblasti D_f rovná $A_f = \pi/2$. To souhlasí s dvojnásobnou plochou π jednotkového disku $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, protože D_f je jeho horní polovina.

• *Tabulka primitivních funkcí některých elementárních funkcí.* Tato tabulka byla získána zcela mechanicky invertováním pravidel pro derivování v tabulce derivací ve větě 17 v přednášce 7.

Věta 6 (tabulka antiderivací) *Platí následující vzorce.*

1. *Na* $\mathbb{R}$ *se* $\int \exp(x) = \exp(x)$, $\int \sin x = -\cos x$, $\int \cos x = \sin x$, $\int 1/(1+x^2) = \arctan x$ *(a také* $= -\mathrm{arccot}\, x$*) a* $\int x^n = x^{n+1}/(n+1)$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$.
2. *Jak na* $(-\infty, 0)$, *tak na* $(0, +\infty)$ *se* $\int 1/x = \log(|x|)$ *a* $\int x^n = x^{n+1}/(n+1)$ *pro každé* $n \in \{-2, -3, \dots\}$.
3. *Na* $(0, +\infty)$ *se* $\int x^b = x^{b+1}/(b+1)$ *pro každé* $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
4. *Na každém intervalu* $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ *s* $k \in \mathbb{Z}$ *se* $\int 1/(\cos x)^2 = \tan x$.
5. *Na každém intervalu* $(k\pi, (k+1)\pi)$ *s* $k \in \mathbb{Z}$ *se* $\int 1/(\sin x)^2 = -\cot x$.
6. *Na* $(-1, 1)$ *se* $\int 1/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ *(a také* $= -\arccos x$*).*

V souvislosti s prvním vzorcem ve 2 si všimněte, že formálně je jak $(\log x)' = 1/x$, tak $(\log(-x))' = (1/(-x)) \cdot (-x)' = 1/x$. To zdánlivě odporuje základnímu principu, že dvě primitivní funkce ke stejné funkci se liší pouze konstantním posunem. Řešení tohoto rébusu je jednoduché, funkce $\log x$ a $\log(-x)$ mají disjunktní definiční obory.

• *Výpočet antiderivací racionálních funkcí.* Jde o velkou třídu funkcí, pro něž lze antiderivace explicitně vypočítat. Připomeňme si, že racionální funkce $r = r(x)$ je podíl dvou polynomů:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \colon \underbrace{\mathbb{R} \setminus Z(r)}_{\mathrm{Def}(r)} \to \mathbb{R} \ .$$

Zde $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, $q(x)$ není nulový polynom a $Z(r) := \{a \in \mathbb{R} \mid q(a) = 0\}$ je nulová množina (množina reálných kořenů) jmenovatele $q(x)$. Je dobře známo, že mohutnost $|Z(r)| \le \deg q$, *stupeň* polynomu $q = q(x)$. *Ireducibilní trojčlen* $a(x)$ je takový reálný *monický* (tj. s vedoucím koeficientem rovným 1) kvadratický polynom

$$a(x) = x^2 + bx + c \ ,$$

že $b^2 - 4c < 0$, tj. $a(x)$ nemá žádný reálný kořen. Všimněte si, že potom $a(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Například $x^2 + 2x + 2$ je ireducibilní trojčlen. Ve zbytku přednášky dokážeme, modulo, důkaz věty 8 (*Základní věta algebry*), následující větu.

Věta 7 ($\int r(x)$) *Pro každou racionální funkci $r = r(x)$ existuje taková funkce $R(x)$ tvaru*

$$\begin{aligned} R(x) &= r_0(x) + \sum_{i=1}^{k} s_i \cdot \log(|x-\alpha_i|) + \sum_{i=1}^{l} t_i \cdot \log(a_i(x)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \arctan(b_i(x)) \ , \end{aligned}$$

kde $r_0(x)$ je racionální funkce, $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, prázdné součty jsou definovány jako 0, $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in Z(r)$, $a_i(x)$ jsou ireducibilní trojčleny a $b_i(x)$ jsou reálné nekonstantní lineární polynomy, že

$$R(x) = \int r(x)$$

na každém netriviálním intervalu $I \subset \mathrm{Def}(r)$.

Je jasné, že funkce všech čtyř uvedených typů se mohou objevit v $R(x)$. Například linearitou integrace, integrací substitucí a pomocí výše uvedené tabulky primitivních funkcí dostaneme, že

$$\begin{aligned} \textstyle\int r(x) &:= \int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x-1} + \overbrace{\frac{2x+2}{x^2+2x+2}}^{=(\dots)'/(\dots)} + \overbrace{\frac{1}{x^2+2x+2}}^{=1/((x+1)^2+1)} \right) \\ &= -\frac{1}{3x^3} + \log(|x-1|) + \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) \end{aligned}$$

na libovolném netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. V důkazu věty bude popsán algoritmus pro výpočet antiderivace racionální funkce v uvedeném tvaru. Než s ním ale začneme, musíme vysvětlit teorii parciálních zlomků.

- *Parciální zlomky.* Následující větu nebudeme dokazovat.

Věta 8 (Zvalg) *Každý nekonstantní komplexní polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ má alespoň jeden kořen, takové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že $p(\alpha) = 0$.*

Ze Zvalg odvodíme ireducibilní rozklady v $\mathbb{R}[x]$.

Důsledek 9 (rozklady reálných polynomů) *Každý nenulový reálný polynom $q(x)$ lze zapsat jako*

$$q(x) = c \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{m_i}}_{k.\ \textit{faktory typu 1}} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{l} a_i(x)^{n_i}}_{k.\ \textit{faktory typu 2}} \ ,$$

kde $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ je jeho vedoucí koeficient, $k, l \in \mathbb{N}_0$, prázdné součiny jsou definovány jako 1, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ jsou všechny různé reálné kořeny $q(x)$ a $a_i(x)$ jsou vzájemně různé ireducibilní trojčleny.

Důkaz. Jestliže $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ je kořenem $q(x)$, pak je také jeho konjugát $\overline{\alpha} = a - bi$ kořenem, protože $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Podrobněji, konjugace respektuje sčítání a násobení a fixuje reálná čísla: pokud $t \in \mathbb{R}$ a $u, v \in \mathbb{C}$, pak $\overline{t} = t$, $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$ a $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$. Takže pokud $q(x) = \sum_{j=0}^{n} t_j x^j$, pak

$$0 = \overline{q(\alpha)} = \overline{\sum_{j=0}^{n} t_j \alpha^j} = \sum_{j=0}^{n} \overline{t_j} \cdot (\overline{\alpha})^j = \sum_{j=0}^{n} t_j \cdot (\overline{\alpha})^j = q(\overline{\alpha}) \ .$$

Také pokud $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tj. pokud $b \neq 0$, pak

$$a_\alpha(x) := (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2a \cdot x + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$$

a je to ireducibilní trojčlen: $(2a)^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$.

Je-li $q(x)$ konstantní polynom, důsledek platí s rozkladem $q(x) = c$. Pokud je $q(x)$ nekonstantní, podle věty 8 má kořen $\alpha \in \mathbb{C}$. Polynom $q(x)$ vydělíme $x - \alpha$ se zbytkem a dostaneme $q(x) = (x - \alpha) \cdot q_1(x) + \beta$ pro $q_1(x) \in \mathbb{C}[x]$ a $\beta \in \mathbb{C}$. Pro $x = \alpha$ vidíme, že $\beta = 0$ a

$$q(x) = (x - \alpha)q_1(x) \; .$$

Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$, algoritmus dělení pro polynomy ukazuje, že polynom $q_1(x)$ je reálný. Takže jsme odštěpili jeden kořenový faktor $x - \alpha$ typu 1. Pokud $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, polynom $q_1(x)$ vydělíme $x - \overline{\alpha}$ se zbytkem a dostaneme $q_1(x) = (x - \overline{\alpha})s_1(x)$. Pak

$$q(x) = (x - \alpha)q_1(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})s_1(x) = a_\alpha(x)s_1(x) \; .$$

Opět platí, že polynom $s_1(x)$ je reálný a odštěpili jsme tak jeden kořenový faktor $a_\alpha(x)$ typu 2. Pokud $q_1(x)$, resp. $s_1(x)$, je nekonstantní, aplikujeme na něj stejný postup a pak pokračujeme stejným způsobem. Nakonec odštěpování kořenových faktorů skončí u konstantního polynomu c a pro $q(x)$ dostaneme uvedený rozklad. $\square$

Rozklady racionálních funkcí na parciální zlomky získáme pomocí této identity.

Tvrzení 10 (Bachetova identita) *Nechť $p(x)$ a $q(x)$ v $\mathbb{R}[x]$ jsou dva polynomy bez společného komplexního kořene, tj. pro žádné $z \in \mathbb{C}$ neplatí, že $p(z) = q(z) = 0$. Pak existují takové polynomy $r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]$, že*

$$r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1 \; .$$

Důkaz. Pro dané polynomy $p(x)$ a $q(x)$ uvážíme tuto množinu reálných polynomů:

$$S := \{r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) \mid r(x),\ s(x) \in \mathbb{R}[x]\} \ .$$

Vezmeme nenulový $t(x) \in S$ s nejmenším stupněm. Libovolný $a(x)$ v S dělíme $t(x)$ se zbytkem:

$$a(x) = t(x) \cdot b(x) + c(x) \ ,$$

kde $b(x), c(x) \in \mathbb{R}[x]$ a $\deg c(x) < \deg t(x)$ nebo $c(x)$ je nulový polynom. Ale $c(x) = a(x) - b(x) \cdot t(x) \in S$ (protože S je uzavřená na odečítání a násobky). Polynom $c(x)$ je tedy nulový a $a(x) = b(x)t(x)$—$t(x)$ dělí každý prvek v S. Ale $p(x), q(x) \in S$, a tak je $t(x)$ oba dělí. Ale tyto polynomy nemají žádný společný komplexní kořen, a proto podle věty 8 je $t(x)$ nenulový konstantní polynom. Můžeme předpokládat, že $t(x) = 1$, čímž jsme získali uvedenou identitu. □

Věta 11 (parciální zlomky) *Každou racionální funkci $r(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{R}(x)$, se jmenovatelem $q(x)$ rozloženým jako v důsledku 9, lze vyjádřit ve tvaru*

$$r(x) = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma_{i,j} x + \delta_{i,j}}{a_i(x)^j} \ ,$$

kde $s(x) \in \mathbb{R}[x]$ je polynom, k, l, m_i, n_i, α_i a $a_i(x)$ jsou jako v důsledku 9 a $\beta_{i,j}, \gamma_{i,j}, \delta_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Po vydělení Bachetovy identity součinem $p(x)q(x)$ dostaneme

$$\frac{1}{p(x)q(x)} = \frac{s(x)}{p(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} \ .$$

Iterací tohoto dostaneme, že pro jakýchkoli n reálných polynomů $q_1(x), \ldots, q_n(x)$, mezi nimiž žádné dva $q_i(x)$ a $q_j(x)$ s $i \neq j$ nemají společný komplexní kořen, existuje takových n reálných polynomů $s_1(x), \ldots, s_n(x)$, že

$$\frac{1}{q_1(x)q_2(x)\ldots q_n(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i(x)}{q_i(x)}\ .$$

Nyní nechť je dána racionální funkce $r(x) = p(x)/q(x)$ a $q(x)$ je rozložen jako v důsledku 9. Poslední vysazenou identitu použijeme pro $n := k + l$, $q_1(x) := (x - \alpha_1)^{m_1}, \ldots, q_k(x) := (x - \alpha_k)^{m_k}$, $q_{k+1}(x) := a_1(x)^{n_1}, \ldots, q_{k+l}(x) := a_l(x)^{n_l}$ a dostaneme takové reálné polynomy $b_1(x), \ldots, b_k(x)$, $c_1(x), \ldots, c_l(x)$, že

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i(x)}{(x - \alpha_i)^{m_i}} + \sum_{i=1}^{l} \frac{c_i(x)}{a_i(x)^{n_i}}\ .$$

V každém z výše uvedených $k + l$ zlomků dělíme čitatele jmenovatelem se zbytkem: $b_i(x) = (x - \alpha_i)^{m_i} \cdot s_i(x) + d_i(x)$ a $c_i(x) = a_i(x)^{n_i} \cdot s_{i+k}(x) + d_{i+k}(x)$, kde $d_i(x), s_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ a každý zbytek $d_i(x)$ je buď nulový polynom nebo má stupeň menší než jmenovatel (což je m_i nebo $2n_i$). Pomocí $s(x) := \sum_{i=1}^{k+l} s_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ přepíšeme poslední vysazenou rovnost jako

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i(x)}{(x - \alpha_i)^{m_i}} + \sum_{i=1}^{l} \frac{d_{k+i}(x)}{a_i(x)^{n_i}}\ .$$

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ opakovaně dělíme $d_i(x)$ polynomem $x - \alpha_i$ se zbytkem a vyjádříme i-tý sčítanec v prvním součtu ve shora uvedené podobě. Totéž uděláme pro každý sčítanec ve druhém součtu. Podrobněji, například $d_{k+1}(x)/a_1(x)^{n_1}$ se rovná

$$\frac{a_1(x)\cdot e(x)+\gamma_{1,n_1}x+\delta_{1,n_1}}{a_1(x)^{n_1}}=\frac{e(x)}{a_1(x)^{n_1-1}}+\frac{\gamma_{1,n_1}x+\delta_{1,n_1}}{a_1(x)^{n_1}}\ ,$$

pak vydělíme $e(x)$ polynomem $a_1(x)$ se zbytkem a tak dále. $\square$

• *Důkaz věty 7 o tvaru $\int r(x)$.* Nyní už můžeme tuto větu dokázat. Danou racionální funkci $r(x)$ vyjádříme jako součet parciálních zlomků jako v předchozí větě:

$$r(x)=s(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\beta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\gamma_{i,j}x+\delta_{i,j}}{a_i(x)^j}\ .$$

Použijeme samozřejmě linearitu primitivních funkcí a integrujeme každý sčítanec výrazu zvlášť. Snadno zintegrujeme první dva členy: $\int s(x)$ je polynom (na jakémkoli netriviálním reálném intervalu I), $\int \beta/(x-\alpha)^j=-\beta/(j-1)(x-\alpha)^{j-1}$ pro libovolné $j\geq 2$ a, pro $j=1$, $\int \beta/(x-\alpha)=\beta\log(|x-\alpha|)$, kde poslední dvě primitivní funkce platí na libovolném netriviálním intervalu $I\subset\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$. Tyto příspěvky k $\int r(x)$ jsou tedy prvních dvou typů uvedených ve větě 7.

Zbývá zintegrovat třetí člen, tedy vypočítat primitivní funkce tvaru

$$\int\frac{\gamma x+\delta}{(x^2+bx+c)^j}\ ,$$

kde $j\in\mathbb{N}$ a $\gamma,\delta,b,c\in\mathbb{R}$ jsou takové, že $b^2-4c<0$. Pomocí $d:=\sqrt{c-b^2/4}>0$ a $e:=(\delta-\gamma b/2)/d^{2j-1}$ zapíšeme poslední racionální funkci jako

$$\begin{aligned}\frac{\gamma x+\delta}{(x^2+bx+c)^j} &= \frac{\gamma}{2}\cdot\underbrace{\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^j}}_{T:=(\dots)'/(\dots)^j}+\frac{\delta-\gamma b/2}{(x^2+bx+c)^j}\\ &= \frac{\gamma}{2}\cdot T+e\cdot\underbrace{\frac{1/d}{\big((x/d+b/2d)^2+1\big)^j}}_{U:=(\dots)'/((\dots)^2+1)^j}\\ &= \frac{\gamma}{2}\cdot T+e\cdot U\ .\end{aligned}$$

Integrací substitucí máme, že $\int T = 1/(j-1)(x^2+bx+c)^{j-1}$ pro $j\ge 2$ a $\int T=\log(x^2+bx+c)$ pro $j=1$ (na libovolném netriviálním reálném intervalu I). Tím dostáváme příspěvky k $\int r(x)$ prvního a třetího typu uvedeného ve větě 7.

Nakonec spočítáme $\int U$. Integrací substitucí máme, že $\int U = I_j(x/d+b/2d)$ (na libovolném netriviálním reálném intervalu I), kde

$$I_j=I_j(y):=\int\frac{1}{(y^2+1)^j}\ .$$

Pro $j\in\mathbb{N}$ integrací per partes a derivováním složených funkcí dostaneme vztah

$$\begin{aligned}I_j &= \int y'\cdot\frac{1}{(y^2+1)^j}=\frac{y}{(y^2+1)^j}+2j\int\frac{(y^2+1)-1}{(y^2+1)^{j+1}}\\ &= \frac{y}{(y^2+1)^j}+2j\cdot I_j-2j\cdot I_{j+1}\ .\end{aligned}$$

Máme tedy rekurenci $I_1=\arctan y$ (podle výše uvedené tabulky) a, pro $j\in\mathbb{N}$,

$$I_{j+1}=\frac{y}{2j\cdot(y^2+1)^j}-(1-1/2j)\cdot I_j\ .$$

Z toho vyplývá, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je

$$I_j(y) = u(y) + r \cdot \arctan y \ ,$$

kde $u(y) \in \mathbb{Q}(y)$ je racionální funkce a $r \in \mathbb{Q}$. Protože $\int U = I_j(x/d + b/2d)$, poslední příspěvek k $\int r(x)$ je prvního a čtvrtého typu uvedeného ve větě 7. $\square$

DĚKUJI ZA POZORNOST!