PŘEDNÁŠKA 10, 25. 4. 2022

PLOCHA POD G_f. NEWTONŮV INTEGRÁL. INTEGRACE PER PARTES A SUBSTITUCÍ

• *K čemu jsou dobré antiderivace?* Pro výpočet ploch A_f oblastí D_f pod grafy G_f funkcí $f\colon I \to \mathbb{R}$ definovaných na netriviálních intervalech $I \subset \mathbb{R}$. Připomínáme, že

$$G_f = \{(x,\ f(x)) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

a že $I(c, d) \subset \mathbb{R}$ označuje uzavřený interval s koncovými body $c, d \in \mathbb{R}$. *Oblast D_f pod grafem G_f* definujeme jako rovinnou množinu

$$D_f := \{(x,\ y) \mid x \in I \wedge y \in I(0,\ f(x))\} \subset \mathbb{R}^2$$

(takže $G_f \subset D_f$). Ale co přesně je *plocha* $A_f \in \mathbb{R}$ množiny D_f? Na místě jsou dvě poznámky. Za prvé, A_f bude *oznaménkovaná* plocha, části oblasti D_f pod osou x přispějí k A_f záporně a ty nad osou x kladně. Za druhé, plochu A_f jsme ještě nedefinovali, a tedy pro nás (ještě) neexistuje jako rigorózní matematický objekt. Do bytí ho vyvoláme až přesnou definicí.

Tento pohled na A_f se liší od pohledu fyziků. Pro spojitou funkci $f \ge 0$ změří A_f následovně. Nakreslí na list papíru D_f a čtverec S o rozměrech $1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$. Vystřihnou D_f a S, zváží je a dostanou hodnotu

$$A_f \approx \frac{\text{váha}(D_f)}{\text{váha}(S)}\,\mathrm{cm}^2\ .$$

Matematici k tomu jen podotknou, že oblast „D_f“ vystřižená z listu papíru a rovinná množina $D_f \subset \mathbb{R}^2$ jsou dvě zcela odlišné věci. Pro matematiky je A_f číslo přiřazené oblasti $D_f \subset \mathbb{R}^2$, které neexistuje, dokud ho nedefinují. Pak je plocha A_f to, jako co byla definována, přičemž možných definic je celá řada.[1] Dvě definice plochy A_f uvedeme v definici 5 a třetí v definici 6.

• *Riemannovy součty a teleskopické* PF *součty pro* A_f. Přesto chceme A_f nějak aproximovat nebo odhadnout, ať už ta plocha je nebo bude cokoli. Bude to pro dva typy funkcí $f\colon I \to \mathbb{R}$, kde I je interval.

První, v této pasáži, jsou

$$\text{spojité funkce } f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}, \text{ pro reálná čísla } a < b\ .$$

Vybereme *dělení* $P = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$, takže $k \in \mathbb{N}$ a $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, a odpovídající *Riemannův součet* definujeme jako

$$R(P,\, \overline{t},\, f) := \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)\ ,$$

kde $\overline{t} = (t_1, \dots, t_k)$ s $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ jsou libovolné *testovací body z* P. Tato definice se vztahuje na libovolnou funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ne jen na spojitou. $R(P, \overline{t}, f)$ je zřejmě oznaménkovaná plocha *sloupcového grafu* $B_f \subset \mathbb{R}^2$ sestávajícího z k sloupců (obdélníků)

$$B_f := \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1},\, a_i] \times I(0,\, f(t_i))\ .$$

Sloupce pod osou x (tj. s $f(t_i) < 0$) přispívají zápornou plochou.

Normu dělení P definujeme jako

$$\Delta(P) := \max(\{a_i - a_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, k\})\ .$$

[1] To je trochu v rozporu s pojetím ploch rovinných útvarů v matematice na základních a středních školách, kde jsou fyzikálními veličinami. Na střední škole to je v pořádku, teď jsme ale na Univerzitě (Karlově).

Následující tvrzení ukazuje, že všechna dělení s malou normou a libovolnými testovacími body mají podobné Riemannovy součty.

Tvrzení 1 (podobné R. součty) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta$ tak, že pokud P a Q jsou dělení intervalu $[a,b]$ s normami*

$$\Delta(P),\ \Delta(Q) < \delta$$

a $\overline{t}$ a $\overline{u}$ jsou libovolné testovací body z, po řadě, P a Q, pak

$$|R(P,\ \overline{t},\ f) - R(Q,\ \overline{u},\ f)| < \varepsilon\ .$$

Důkaz. Nechť a, b a f jsou, jak je uvedeno, a nechť je dáno ε. Podle věty 15 v minulé přednášce víme, že f je stejnoměrně spojitá. Proto existuje takové δ, že pro libovolné $c, d \in [a, b]$ platí, že $|c - d| < \delta \Rightarrow |f(c) - f(d)| < \varepsilon/2(b - a)$. Nyní předpokládejme, že $P = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je dělení intervalu $[a, b]$ s testovacími body $\overline{t}$, že $Q = (b_0, b_1, \ldots, b_l)$ je dělení intervalu $[a, b]$ s testovacími body $\overline{u}$ a že obě normy $\Delta(P), \Delta(Q) < \delta$. Dále předpokládáme, že $P \subset Q$, tj. že $a_0 = b_{i_0} = a$, $a_1 = b_{i_1}$, $\ldots$, $a_k = b_{i_k} = b$ pro nějaké indexy $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_k = l$. Později obecná dělení P a Q

zredukujeme na tento případ. Takže

$$
\begin{aligned}
&|R(P,\,\bar{t},\,f) - R(Q,\,\overline{u},\,f)| \\
&= \Big| \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i) - \sum_{i=1}^{l} (b_i - b_{i-1}) \cdot f(u_i) \Big| \\
&= \Big| \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_j - b_{j-1}) \cdot (f(t_r) - f(u_j)) \Big| \\
&\overset{|t_r - u_j| < \delta \text{ a } \Delta\text{-ová ner.}}{<} \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_j - b_{j-1}) \cdot \varepsilon/2(b-a) \\
&= (b-a) \cdot \varepsilon/2(b-a) = \varepsilon/2\ .
\end{aligned}
$$

Jsou-li P a Q obecná dělení intervalu $[a, b]$ s testovacími body, po řadě, $\bar{t}$ a $\overline{u}$ a s $\Delta(P), \Delta(Q) < \delta$, položíme $R := P \cup Q$ (pak i $\Delta(R) < \delta$) a vezmeme libovolné testovací body $\overline{v}$ z R. Protože $P \subset R$ a $Q \subset R$, dostaneme podle předchozího případu, že

$$
\begin{aligned}
&|R(P,\,\bar{t},\,f) - R(Q,\,\overline{u},\,f)| \le \\
&\le |R(P,\,\bar{t},\,f) - R(R,\,\overline{v},\,f)| + |R(R,\,\overline{v},\,f) - R(Q,\,\overline{u},\,f)| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .
\end{aligned}
$$

$\square$

Protože pro malou normu $\Delta(P)$ se sloupcový graf B_f dosti podobá oblasti D_f, čekáme, že pro $\Delta(P) \to 0$ se $R(P, \bar{t}, f) \to A_f$. Tuto limitu teď formálně definujeme.

Definice 2 (limity R. součtů) *Nechť je* $a, b, L \in \mathbb{R}$, $a < b$ *a* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je funkce, která nemusí být spojitá. Pokud pro jakékoli dvě posloupnosti* (P_n) *dělení* P_n *intervalu* $[a,b]$ *a* $(\overline{t(n)})$ *testovacích bodů* $\overline{t(n)}$ *z* P_n *platí, že*

$$\lim \Delta(P_n) = 0 \Rightarrow \lim R(P_n, \overline{t(n)}, f) = L\ ,$$

napíšeme $\lim_{\Delta(P)\to 0} R(P, \overline{t}, f) = L$ *a řekneme, že Riemannovy součty funkce* f *mají limitu* L.

Tyto limity jsou z definice jednoznačné a z tvrzení 1 teď snadno odvodíme, že pro spojité funkce vždy existují.

Důsledek 3 ($\exists$ limity R. součtů) *Pro každou spojitou funkci* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ *s* $a < b$, *existuje konečná limita*

$$\lim_{\Delta(P)\to 0} R(P, \overline{t}, f) \in \mathbb{R}\ .$$

Důkaz. Nechť f, a a b jsou, jak je uvedeno, a (P_n) je libovolná posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s testovacími body $\overline{t(n)}$ a taková, že $\lim \Delta(P_n) = 0$. Podle tvrzení 1 je posloupnost $(R(P_n, \overline{t(n)}, f))$ Cauchyova, a proto má limitu $L \in \mathbb{R}$. Pokud (Q_n) je další posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s testovacími body $\overline{u(n)}$ a s $\lim \Delta(Q_n) = 0$, pomocí tvrzení 1 máme, že

$$\lim_{n\to\infty} \big(R(P_n, \overline{t(n)}, f) - R(Q_n, \overline{u(n)}, f)\big) = 0\ .$$

Takže i $\lim R(Q_n, \overline{u(n)}, f) = L$. $\square$

Zde nás však více zajímá Newtonův přístup k plochám A_f. Každý sčítanec $(a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)$ v Riemannově součtu vyjádříme pomocí libovolné primitivní funkce F ke spojité funkci f (podle poslední věty v předchozí přednášce víme, že F existuje). Nechť $P = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je libovolné dělení intervalu $[a, b]$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkci F a každý interval $[a_{i-1}, a_i]$ máme, že pro nějaký bod $c_i \in (a_{i-1}, a_i)$ je

$$\frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)\ .$$

Tím pádem

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{k} (F(a_i) - F(a_{i-1})) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(c_i) \\ &= R(P, \overline{c}, f)\ , \end{aligned}$$

s testovacími body $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ z P. Vzhledem k tvrzení 1 dostáváme následující rovnost.

Důsledek 4 (Riemann = Newton) *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je primitivní k f. Pak*

$$\lim_{\Delta(P) \to 0} R(P, \overline{t}, f) = F(b) - F(a)\ .$$

Důkaz. Nechť a, b, f a F jsou, jak je uvedeno, a (P_n) je libovolná posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ s testovacími body $\overline{t(n)}$, pro níž $\lim \Delta(P_n) = 0$. Podle výše uvedeného argumentu existují takové testovací body $\overline{c(n)}$ z P_n, že pro každé n je

$$F(b) - F(a) = R(P_n, \overline{c(n)}, f)\ .$$

Podle aritmetiky limit posloupností tak máme, že

$$
\begin{aligned}
&\lim R(P_n, \overline{t(n)}, f) \\
&= \underbrace{\lim \big(R(P_n, \overline{t(n)}, f) - R(P_n, \overline{c(n)}, f)\big)}_{=0 \text{ podle tvrzení } 1} \\
&+ \lim \underbrace{R(P_n, \overline{c(n)}, f)}_{=F(b)-F(a)} \\
&= 0 + F(b) - F(a) = F(b) - F(a)\ .
\end{aligned}
$$

Dostali jsme uvedenou limitu. □

Nyní už můžeme podat dvě definice plochy A_f oblasti D_f pod grafem G_f libovolné spojité funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Podle posledního důsledku vedou ke stejné hodnotě A_f.

Definice 5 (plocha pod grafem) *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je, pro reálná čísla $a < b$, spojitá funkce a $D_f \subset \mathbb{R}^2$ je oblast pod jejím grafem G_f, kterou jsme zavedli dříve. Plochu $A_f \in \mathbb{R}$ oblasti D_f lze definovat dvěma způsoby.*

1. *(I. Newton) Polož $A_f := F(b) - F(a)$ pro libovolnou primitivní funkci $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ k funkci f.*
2. *(B. Riemann) Polož $A_f := \lim_{\Delta(P)\to 0} R(P, \overline{t}, f)$ (viz Definice 2).*

Na první pohled obě definice vypadají odlišně, ale díky důsledku 4 dobře víme, že z nich A_f vyjde stejně. První je podstatně jednodušší než druhá, ale druhou lze zase použít i v případech, kdy první použít nelze. Později uvidíme, že domény použitelnosti obou definic jsou neporovnatelné.

Pokud například $f(x) = x^2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, pak $F(x) = x^3/3$ je na $[-1,1]$ primitivní k f. Podle Newtonovy definice se plocha oblasti $D_f = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le x^2\}$ rovná

$$A_f = F(1) - F(-1) = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

- *Newtonův integrál.* Nyní budeme uvažovat druhý typ funkcí $f\colon I \to \mathbb{R}$, totiž funkce

$$f\colon (a,\, b) \to \mathbb{R}, \text{ pro reálné } a < b, \text{ které mají primitivní funkci } F\ .$$

Definice 6 (Newtonův integrál) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ a $F, f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou takové funkce, že F je primitivní k f. Newtonův integrál funkce f přes interval (a,b) definujeme jako rozdíl*

$$(\mathrm{N})\int_a^b f = F(b) - F(a) := \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)\ ,$$

jestliže poslední dvě limity existují a jsou konečné. Pak také definujeme plochu A_f oblasti D_f pod G_f jako

$$A_f := (\mathrm{N})\int_a^b f\ .$$

Je jasné, že výše nemusíme používat jednostranné limity. Protože jakékoli dvě funkce F_1 a F_2 primitivní k f se liší jen konstantním posunem $F_1 = F_2 + c$, je hodnota $(\mathrm{N})\int_a^b f$, pokud existuje, nezávislá na volbě F. Vysvětlíme, proč je tento druhý přístup k A_f s funkcemi $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ostře obecnější než první přístup se spojitými funkcemi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Je-li $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, má podle poslední věty v přednášce 9 primitivní funkci $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Ta je spojitá a proto

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a) \ \text{ a } \ \lim_{x \to b} F(x) = F(b)\ .$$

Takže plocha A_f oblasti D_f v prvním přístupu (1 v definici 5) je i ve třetí definici výše stejná:

$$A_f = F(b) - F(a) = (\mathrm{N}) \int_a^b f\ .$$

Ale situace v definici 6 je ostře obecnější než v prvním přístupu. Pokud funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, nemusí f být spojitá. I když je f spojitá a F je limitami v a a b rozšířena na $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, stejně derivace $F'(a)$ a $F'(b)$ nemusí existovat a f tak nelze rozšířit na a a/nebo b. Nakonec k Newtonovu integrálu poznamenáme, že by v souvislosti s ním měl být zmíněn i G. W. Leibniz, ale chceme udržet stručnou terminologii.

Jestliže pro funkci $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, existuje Newtonův integrál $(\mathrm{N}) \int_a^b f$, řekneme, že funkce f je *newtonovsky integrovatelná (na (a,b))* a píšeme, že

$$f \in \mathrm{N}(a,b)\ .$$

Snadno se vidí, že když $f \in \mathrm{N}(a,b)$ pak $f \in \mathrm{N}(c,d)$ pro každá dvě čísla $c < d$ v intervalu (a,b). Dokážeme monotonii Newtonova integrálu.

Tvrzení 7 (monotonie (N) $\int$**)** *Pokud jsou funkce* $f, g \in \mathrm{N}(a, b)$ *a* $f \le g$ *na* (a, b)*, pak*

$$\mathrm{(N)} \int_a^b f \le \mathrm{(N)} \int_a^b g \ .$$

Důkaz. Nechť F a G jsou na (a, b) primitivní k f a k g. Vezmeme libovolná čísla $c < d$ v (a, b) a použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci $F - G$ a interval $[c, d]$. Dostaneme, že pro nějaký bod $e \in (c, d)$ je

$$\begin{aligned}(F(d) - G(d)) - (F(c) - G(c)) &= (F - G)'(e) \cdot (d - c) \\ &= (F'(e) - G'(e)) \cdot (d - c) \\ &= (f(e) - g(e)) \cdot (d - c) \le 0 \ .\end{aligned}$$

Proto $F(d) - F(c) \le G(d) - G(c)$. Tato nerovnost se zachová při limitních přechodech $c \to a$ a $d \to b$ a dostáváme uvedenou nerovnost mezi oběma Newtonovými integrály. □

Uvedeme dva příklady Newtonových integrálů:

$$\mathrm{(N)} \int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2 \cdot 1^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 0^{3/2}}{3} = \frac{2}{3} \ ,$$

ale

$$\mathrm{(N)} \int_0^1 \frac{1}{x} = \log 1 - \log 0 = 0 - (-\infty) = ?$$

neexistuje, protože limita antiderivace $\log x$ v 0 není konečná.

• *Důkaz druhého případu l'Hospitalova pravidla.* Jako aplikaci Newtonova integrálu dokážeme zbývající případ l'Hospitalova pravidla pro $\lim_{x \to A} g(x) = \pm\infty$ (podmínka 2 ve větě 7 v přednášce 8). Nejprve dokážeme jednu asymptotiku Newtonových integrálů.

Tvrzení 8 (asymptotika (N) $\int$) *Nechť $f, g \in \mathrm{N}(a,b)$, nechť $g > 0$ na (a,b), nechť $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ a nechť $\lim_{x\to a} (\mathrm{N}) \int_x^b g = +\infty$. Pak*

$$(\mathrm{N}) \int_x^b f = o\left((\mathrm{N}) \int_x^b g \right) \quad (x \to a) \, .$$

Důkaz. Nechť je dáno ε. Podle předpokladu prvního o existuje takové $\delta \leq b - a$, že $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot g(x)$. Podle předpokladu limity $+\infty$ existuje takové $\theta < \delta$, že $x \in (a, a+\theta) \Rightarrow |(\mathrm{N}) \int_{a+\delta}^b f| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathrm{N}) \int_x^b g$. Pokud je tedy $x \in (a, a+\theta)$, pak

$$\begin{aligned}
\left| (\mathrm{N}) \int_x^b f \right| &= \left| (\mathrm{N}) \int_x^{a+\delta} f + (\mathrm{N}) \int_{a+\delta}^b f \right| \\
&\overset{\Delta\text{-ová ner.}}{\leq} \left| (\mathrm{N}) \int_x^{a+\delta} f \right| + \left| (\mathrm{N}) \int_{a+\delta}^b f \right| \\
&\overset{\text{obě} \Rightarrow \text{ a tvrz. 7}}{<} \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathrm{N}) \int_x^{b \text{ nebo } a+\delta} g + \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathrm{N}) \int_x^b g \\
&= \varepsilon \cdot (\mathrm{N}) \int_x^b g \, .
\end{aligned}$$

$\square$

Věta 9 (l'Hospitalovo pravidlo, podmínka 2) *Nechť $A \in \mathbb{R}$. Nechť pro nějaké δ mají funkce $f, g\colon P^+(A,\delta) \to \mathbb{R}$ na $P^+(A,\delta)$ konečné derivace, $g' \neq 0$ na $P^+(A,\delta)$ a nechť $\lim_{x\to A} g(x) = \pm\infty$. Pak*

$$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ ,$$

pokud poslední limita existuje. Tato věta platí také pro levá okolí $P^-(A,\delta)$, obyčejná okolí $P(A,\delta)$ a pro $A = \pm\infty$.

Důkaz. Nechť A, δ, f a g jsou, jak je uvedeno, a nechť $A \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že $\lim_{x\to A} g(x) = +\infty$ a že $g > 0$ na $(A, A+\delta)$, případ limity $-\infty$ se probere podobně. Nechť $\lim_{x\to A} f'(x)/g'(x) =: L \in \mathbb{R}^*$. Nejprve předpokládáme, že $L = 0$, tj. $f'(x) = o(g'(x))$ $(x \to A)$. Vezmeme nějaké $\theta < \delta$ a podle předchozí věty dostaneme, že

$$(\mathrm{N})\int_x^\theta f' = o\left((\mathrm{N})\int_x^\theta g'\right) \ \ (x \to A) \ ,$$

což dává $f(x) = f(\theta) - o(1)(g(\theta) - g(x))$. Tedy $f(x)/g(x) = f(\theta)/g(x) + o(1)(1 - g(\theta)/g(x)) = o(1) + o(1)(1 - o(1)) = o(1)$ a tedy $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = 0 = L$.

Nechť $L \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak s $h(x) := f(x) - Lg(x)$ máme, že $\lim_{x\to A} h'(x)/g'(x) = 0$, a proto podle právě dokázaného případu je

$$0 = \lim_{x\to A} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} - L$$

a $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = L$. Pokud $L = +\infty$, pak $\lim_{x\to A} g'(x)/f'(x) = 0^+$. Tedy podle předchozího případu je $\lim_{x\to A} g(x)/f(x) = 0^+$

a dostaneme, že $\lim_{x\to A} f(x)/g(x) = +\infty$. $L = -\infty$ převedeme substitucí $h(x) := -f(x)$ na případ $L = +\infty$.

Pro levá okolí $P^-(A, \delta)$ a pro oboustranná okolí $P(A, \delta)$ jsou důkazy podobné a pro $A = \pm\infty$ použijeme substituci $x := 1/y$ jako v případu limity $\frac{0}{0}$. $\square$

Předchozí důkaz l'Hospitalova pravidla pro limity $\frac{\infty}{\infty}$ je převzat ze str. 206–7 učebnice I. I. Ljaško, V. F. Emel'janov a A. K. Bojarčuk, *Osnovy klassičeskogo i sovremennogo Matematičskogo Analiza* (Kijev, 1988).

• *Stirlingův vzorec.* Stirlingův asymptotický vzorec

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

je možné dokázat jen pomocí Newtonova integrálu (ale není to jednoduché), podrobnosti viz MK, *The Newton integral and the Stirling formula*, `https://arxiv.org/abs/1907.02553`.

V následujících třech pasážích uvedeme tři (nebo čtyři nebo pět) výsledky/ů, jimiž lze vypočítat primitivní funkci či lze ukázat, že neexistuje. Na rozdíl od derivování, jež je pro funkce dané vzorcem přímočaré, výpočet primitivní funkce, pokud existuje, může být dosti složitý. Další informace se naleznou v článku `https://en.wikipedia.org/wiki/Risch_algorithm`, jenž pojednává o *Rischově algoritmu* pro výpočet PF.

• *Darbouxova vlastnost.* Funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$, definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, má *Darbouxovu vlastnost* (nebo je *Darbouxova*), pokud nabývá každou mezilehlou hodnotu: pokud jsou $a < b$ v I a c je takové, že $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$, pak $c = f(d)$ pro nějaké $d \in (a, b)$. Již dříve jsme dokázali (věta 8 v přednášce 6), že spojité funkce jsou Darbouxovy. Nyní to rozšíříme na další funkce.

Věta 10 (derivace jsou Darbouxovy) *Každá funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, která má primitivní funkci, má Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Předpokládáme, že $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, má primitivní funkci $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a že $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ se řeší podobně. Uvážíme funkci

$$G(x) := F(x) - cx\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}\ .$$

Ta má na $[a,b]$ konečnou derivaci $G'(x) = F'(x) - c = f(x) - c$. Speciálně je G spojitá. Podle dřívější věty (věta 13 v přednášce 6) nabývá G v nějakém $d \in [a,b]$ svou minimální hodnotu. Z

$$G'(a) = f(a) - c < 0 \ \text{ a } \ G'(b) = f(b) - c > 0$$

ale vyplývá (tvrzení 5 v přednášce 8), že $d \in (a,b)$. Podle jiné dřívější věty (věta 4 v přednášce 7) je $f(d) - c = G'(d) = 0$, takže $f(d) = c$. $\square$

Protože každá spojitá funkce má primitivní funkci a protože existují nespojité funkce, které mají primitivní funkci (viz tvrzení 18 v přednášce 7), je předchozí třída funkcí s Darbouxovou vlastností ostře obsáhlejší než třída spojitých funkcí. Věta se obvykle používá obráceně: pokud funkce nemá Darbouxovu vlastnost, pak nemá primitivní funkci. Například funkce signum $\mathrm{sgn}(x)$ není Darbouxova na žádném netriviálním intervalu $I \ni 0$, a proto tam nemá primitivní funkci.

Připomeňme, že pro dvě funkce $F, f\colon I \to \mathbb{R}$ označení

$$F = \int f$$

znamená, že F je primitivní k f. Jednoduchý, ale užitečný výsledek říká, že antiderivování je lineární operace.

Tvrzení 11 (linearita $\int$) *Nechť $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g\ ,$$

to jest, pokud F, resp. G, je primitivní k f, resp. ke g, potom $aF + bG$ je primitivní k $af + bg$.

Důkaz. Je zřejmé, že pokud f, g, I, a, b, F a G jsou, jak je uvedeno, pak pomocí linearity derivování dostáváme, že

$$(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg\ .$$

$\square$

Okamžitě tak vidíme, že třeba $\int(2\sin x + x) = 2\int \sin x + \int x = -2\cos x + x^2/2$.

• *Integrace per partes.* Ta může vypadat jako technický výsledek o primitivních funkcích, ale její dopad je daleko širší. Třeba iracionalita některých reálných čísel se dá dokázat integrací per partes (`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/irraPerpartes.pdf`, až to napíšu).

Věta 12 (integrace per partes) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriviální interval a $f, g, F, G \colon I \to \mathbb{R}$ jsou takové funkce, že F je primitivní k f a G ke g. Pak*

$$\int fG = FG - \int Fg \ ,$$

což znamená, že pokud je H primitivní k Fg, pak je $FG - H$ primitivní k fG.

Důkaz. Je to bezprostřední důsledek Leibnizova vzorce a linearity derivování:

$$(FG - H)' = F'G + FG' - H' = fG + Fg - Fg = fG \ .$$

□

Vzorec pro integraci per partes lze napsat také jako

$$\int F'G = FG - \int FG' \ .$$

Pokud známe primitivní funkci k FG', dává vzorec primitivní funkci k $F'G$. Všimněte si, jak se čárka přemístila z F na G. Například

$$\begin{aligned} \int \log x \ &= \ \int x' \log x = x \log x - \int x(\log x)' \\ &= \ x \log x - \int \frac{x}{x} = x \log x - x \ . \end{aligned}$$

Nebo

$$\begin{aligned} \int x \sin x \ &= \ \int x(-\cos x)' = -x \cos x + \int x' \cos x \\ &= \ -x \cos x + \sin x \ . \end{aligned}$$

Výsledek se snadno zkontroluje zderivováním.

• *Integrace substitucí.* Je to další užitečný vzorec pro výpočet antiderivací. Jsou to vlastně dva vzorce.

Věta 13 (integrace substitucí) *Pokud jsou $I, J \subset \mathbb{R}$ netriviální intervaly, $g\colon I \to J$, $f\colon J \to \mathbb{R}$ a g má na I vlastní g', pak platí následující.*

1. *Pokud $F = \int f$ na J, pak*

$$F(g) = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I\ .$$

2. *Pokud je g surjekce a $g' \neq 0$ na I, pak platí implikace*

$$G = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I \Rightarrow G(g^{-1}) = \int f \text{ na } J.$$

Důkaz. 1. Vzorec pro derivace složených funkcí dává $(F(g))' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$.

2. Protože g' je Darbouxova (věta 10), je na I buď $g' > 0$ anebo $g' < 0$. Takže g buď roste anebo klesá. Existuje tedy spojitý inverz $g^{-1}\colon J \to I$, protože g je spojitá na intervalu. Podle vzorce pro derivace složených funkcí a vzorce pro derivace inverzních funkcí je

$$\begin{aligned}\big(G(g^{-1})\big)' &= G'(g^{-1}) \cdot (g^{-1})' \\ &= f(\cancel{g(g^{-1}})) \cdot \cancel{g'(g^{-1})} \cdot \frac{1}{\cancel{g'(g^{-1})}} = f\ .\end{aligned}$$

□

Uvedeme dva příklady.

Příklad 1. Pokud $F = \int f$ na I a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$, pak podle prvního vzorce je

$$\frac{F(ax+b)}{a} = \int f(ax+b) \ \text{ na } J := (I-b)/a \ .$$

Příklad 2. Čemu se na $J = (-1,1)$ rovná $\int f := \int \sqrt{1-t^2}$? Za t dosadíme funkci $g(x) := \sin x \colon I := (-\pi/2, \pi/2) \to J$. Integrací per partes máme, že

$$\begin{aligned}
\int f(g) \cdot g' \ &= \ \int \cos^2 x = \int (\sin x)' \cos x \\
&= \ \sin x \cdot \cos x - \int \sin x (\cos x)' \\
&= \ \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \\
&= \ \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x
\end{aligned}$$

a proto

$$\int f(g) \cdot g' = \int \cos^2 x = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} =: G(x) \ .$$

Podle druhého vzorce a díky tomu, že $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ na I, máme, že

$$\int f = \int \sqrt{1-t^2} = G(g^{-1}) = \frac{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t}{2} \ .$$

Tento vzorec se snadno zkontroluje zderivováním.

DĚKUJI ZA POZORNOST!