# PŘEDNÁŠKA 1, 14. 2. 2022
## MNOŽINY, FUNKCE, REÁLNÁ ČÍSLA

• *Co analyzuje matematická analýza?* Nekonečné procesy a operace. Podívejme se na dva paradoxy.

$$S = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}_{=0} + \cdots = 0\ ,$$

ale i, po zpřeházení sčítanců,

$$S = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}}_{=\frac{1}{2n(2n-1)}>0} + \cdots > 0\ ?$$

Dále tu je nekonečná tabulka s položkami $-1$, $0$ a $1$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\dots$ | $\sum = 0$ | |
| $0$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $\dots$ | $\sum = 0$ | |
| $0$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $\dots$ | $\sum = 0$ | |
| $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $\dots$ | $\sum = 0$ | ? |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\dots$ | $\sum = 0$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | |
| $\sum = 1$ | $\sum = 0$ | $\sum = 0$ | $\sum = 0$ | $\sum = 0$ | $\dots$ | $\sum = 1 \setminus 0$ | |

a odlišnými celkovými součty po řádcích a po sloupcích.

• *Opakování logického a množinového značení.* Logické spojky: $\varphi \vee \psi$ ... nebo, $\varphi \wedge \psi$ ... a zároveň, $\varphi \Rightarrow \psi$ ... implikace, $\varphi \iff \psi$ ... ekvivalence, $\neg\varphi$ ... negace. Např. vždy platí, že

$$\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi\ .$$

Důležité jsou i závorky a vazebná síla spojek. Kvantifikátory: $\forall\, x :\ \varphi(x) \ldots$ pro každé $x$ platí, že $\varphi(x)$, $\exists\, x :\ \varphi(x) \ldots$ existuje takové $x$, že platí $\varphi(x)$. Např. vždy platí, že

$$\neg(\exists\, x :\ \varphi(x)) \iff \forall\, x :\ \neg\varphi(x)\ .$$

Pomocí $\emptyset$ značíme prázdnou množinu a značení $x \in A$ znamená, že množina $x$ je prvkem množiny $A$. Množinu $M$ zapíšeme výčtem jejích prvků, např.

$$M = \{a,\, b,\, 2,\, \{\emptyset,\, \{\emptyset\}\},\, \{a\}\}$$

(kolik jich $M$ má?), nebo pomocí nějaké jejich vlastnosti, např. pro $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ je

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, m \in \mathbb{N} :\ n = 2 \cdot m\}$$

množina (všech) sudých přirozených čísel.

Vztahy mezi množinami: $A \subset B \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, x :\ x \in A \Rightarrow x \in B$ $\ldots$ $A$ je podmnožinou $B$, $\neg\exists\, x :\ x \in A \wedge x \in B \ldots$ $A$ a $B$ jsou disjunktní, $A = B \iff (\forall\, x :\ x \in A \iff x \in B)$ je *axiom extenzionality* určující rovnost dvou množin.

Operace s množinami: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ je jejich sjednocení, $A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}$ je jejich průnik, $\bigcup A := \{x \mid \exists\, b \in A :\ x \in b\}$ je suma množiny $A$, $\bigcap A := \{x \mid \forall\, b \in A :\ x \in b\}$ je průnik množiny $A$, $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ je (množinový) rozdíl množin $A$ a $B$ a

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\}$$

je potence (potenční množina) množiny $A$.

• *Uspořádané dvojice a funkce.* Pro každé dvě množiny $A$ a $B$ je množina

$$(A,\, B) := \{\{B,\, A\},\, \{A\}\}$$

*(uspořádanou) dvojicí* množin $A$ a $B$. Vždy platí, že

$$(A,\ B) = (A',\ B') \iff A = A' \wedge B = B' \ .$$

Uspořádanou trojici množin $A$, $B$ a $C$ lze definovat jako

$$(A,\ B,\ C) := (A,\ (B,\ C))$$

a podobně lze definovat usp. čtveřici $(A, B, C, D)$ atd., ale lepší je vzít

$$(A,\ B,\ C) := \{(1,\ A),\ (2,\ B),\ (3,\ C)\}$$

atd. *Kartézský součin* množin $A$ a $B$ je množina

$$A \times B := \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\} \ .$$

Každá množina $C \subset A \times B$ je *(binární) relace* mezi $A$ a $B$. Místo $(a, b) \in C$ píšeme $a\, C\, b$, např. $2 < 5$. Pokud $A = B$, mluvíme o relaci na množině $A$.

**Definice 1 (funkce)** *Funkce (též zobrazení) $f$ z množiny $A$ do množiny $B$ je každá taková uspořádaná trojice*

$$(A,\ B,\ f)\ ,$$

*že $f \subset A \times B$ a pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$, že $a\, f\, b$. Píšeme, že $f \colon A \to B$ a $f(a) = b$.*

Množina $A$ je *definiční obor* funkce $f$ a $B$ je její *obor hodnot*. Prvek $b$ je *hodnota* funkce $f$ na jejím *argumentu* $a$. Pro $C \subset A$, resp. $C \subset B$, je

$$\begin{aligned} f[C] &:= \{f(a) \mid a \in C\} \subset B\ , \text{ resp.} \\ f^{-1}[C] &:= \{a \in A \mid f(a) \in C\} \subset A\ , \end{aligned}$$

*obraz* množiny $C$ funkcí $f$, resp. *vzor* množiny $C$ funkcí $f$.

• *Rodinky funkcí a operace s funkcemi. Posloupnost* (v množině $X$) je funkce

$$a\colon \mathbb{N} \to X\ .$$

Píšeme $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset X$ a $a_n := a(n)$, kde $n \in \mathbb{N}\,(= \{1, 2, \dots\})$. *Slovo* (nad abecedou $X$) je funkce

$$u\colon [n] \to X$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, kde $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ a $[0] := \emptyset$. Pro $n = 0$ i $u = \emptyset$. Píšeme $u = a_1 a_2 \dots a_n$, kde $a_i := u(i)$ pro $i \in [n]$. *(Binární) operace* (na množině $X$) je funkce

$$o\colon X \times X \to X\ .$$

Místo $o((a, b)) = c$ píšeme $a\,o\,b = c$, např. $1 + 1 = 2$.

Funkce $f\colon X \to Y$ je *prostá* (též *injektivní*, *injekce*), pokud pro každé $a, b \in X$ máme, že $a \ne b \Rightarrow f(a) \ne f(b)$. Je *na* (též *surjektivní*, *surjekce*), pokud $f[X] = Y$. Je *vzájemně jednoznačná* (též *bijektivní*, *bijekce*), je-li prostá a na. Je *konstantní*, když existuje takové $c \in Y$, že $f(a) = c$ pro každé $a \in X$. Funkce $f\colon X \to X$ je *identická*, když $f(a) = a$ pro každé $a \in X$.

Je-li $f\colon X \to Y$ prostá funkce, její *inverzní funkce* (též *inverz*) je funkce $f^{-1}\colon f[X] \to X$ daná předpisem $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Pro dvě (navazující) funkce

$$g\colon X \to Y \ \text{ a } \ f\colon Y \to Z$$

je odpovídající *složená funkce* (též *složenina*) funkce

$$f \circ g = f(g)\colon X \to Z$$

daná předpisem $f(g)(a) := f(g(a))$, $a \in X$.

- *Lineární uspořádání, infima a suprema.*

**Definice 2 (lineární uspořádání)** *Relace $<$ na množině $A$, která je $(a, b, c \in A)$*

1. *ireflexivní:* $\forall\, a : \ a \not< a$,
2. *tranzitivní:* $\forall\, a,\ b,\ c : \ a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$,
3. *trichotomická:* $\forall\, a,\ b : \ a < b \vee b < a \vee a = b$,

*se nazývá lineárním uspořádáním na množině $A$.*

Všimněte si, že z 1 a 2 plyne, že v 3 vždy nastává právě jedna možnost. Značení $a \le b$ znamená, že $a < b \vee a = b$. Dále $a > b$ znamená, že $b < a$, a podobně pro $a \ge b$. Lineární uspořádání na $A$ označujeme jako $(A, <)$ nebo jako $(A, <_A)$.

Nechť $(A, <)$ je lineární uspořádání na $A$ a $B \subset A$. Řekneme, že $B$ je *shora omezená*, když pro nějaké $a \in A$ je $b \le a$ pro každé $b \in B$. Prvek $a$ pak je *horní mez* množiny $B$. Podobně se definují omezenost zdola a dolní meze. Množinu horních (resp. dolních) mezí množiny $B$ označíme jako $H(B)$ (resp. $D(B)$). *Maximum* (též *největší prvek*) množiny $B$, které nemusí existovat, je takový prvek $b \in B$, že $\forall\, b' \in B : \ b' \le b$. Podobně se definuje *minimum* (*nejmenší prvek*) množiny $B$. Tyto prvky značíme jako $\max(B)$ a $\min(B)$.

**Definice 3 (supremum a infimum)** *Nechť* $(A,<)$ *je lineární uspořádání na* $A$ *a nechť* $B \subset A$. *Pokud* $H(B) \neq \emptyset$ *a existuje* $\min(H(B))$, *nazveme tento prvek supremem množiny* $B$ *a označíme ho jako*

$$\sup(B) := \min(H(B)) \ .$$

*Pokud* $D(B) \neq \emptyset$ *a existuje* $\max(D(B))$, *nazveme tento prvek infimem množiny* $B$ *a označíme ho jako*

$$\inf(B) := \max(D(B)) \ .$$

Například ve standardním lin. uspořádání reálných čísel $\min((0,1))$ neexistuje, $\min([0,1)) = 0$, $\inf((0,1)) = \inf([0,1)) = 0$ a $\sup(\mathbb{N})$ neexistuje, protože $H(\mathbb{N}) = \emptyset$.

- *Uspořádaná tělesa.* Potřebujeme je pro definici reálných čísel.

**Definice 4 (uspořádané těleso)** *Uspořádaným tělesem $F$ rozumíme algebraickou strukturu*

$$F = (F,\, 0_F,\, 1_F,\, +_F,\, \cdot_F,\, <_F)$$

*na množině $F$ se dvěma různými význačnými prvky $0_F$ a $1_F$ v $F$, se dvěma operacemi $+_F$ a $\cdot_F$ na $F$, s lineárním uspořádáním $<_F$ na $F$ a takovou, že se splňují následující axiomy ($a, b, c \in F$).*

1. $\forall\, a:\ a +_F 0_F = a \wedge a \cdot_F 1_F = a$ *(prvek $0_F$ je neutrální v $+_F$ a prvek $1_F$ v $\cdot_F$).*
2. *Obě operace $+_F$ a $\cdot_F$ jsou asociativní a komutativní.*
3. $\forall\, a,\, b,\, c:\ a \cdot_F (b +_F c) = (a \cdot_F b) +_F (a \cdot_F c)$ *(platí distributivní zákon).*
4. $\forall\, a\, \exists\, b:\ a +_F b = 0_F$, $\forall\, a \neq 0_F\, \exists\, b:\ a \cdot_F b = 1_F$ *(existují inverzní prvky).*
5. $\forall\, a,\, b,\, c:\ a <_F b \Rightarrow a +_F c <_F b +_F c$, $\forall\, a,\, b:\ a,\, b >_F 0_F \Rightarrow a \cdot_F b > 0_F$ *($<_F$ respektuje obě operace).*

Axiomy 1–4 jsou axiomy *tělesa*. Příkladem uspořádaného tělesa jsou *zlomky* (též *racionální čísla*) $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} := \{m/n \mid m,\, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\}\ ,$$

kde $\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ jsou *celá čísla*. Další příklad? Třeba

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{r + s\sqrt{2} \mid r,\, s \in \mathbb{Q}\}\ .$$

Obě uspořádaná tělesa se liší, rovnice $x^2 = 2$ nemá řešení v $\mathbb{Q}$ (jak ukážeme v následující pasáži), ale je řešitelná v $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

- *Neúplnost uspořádaného tělesa $\mathbb{Q}$.*

**Definice 5 (úplnost)** *Uspořádané těleso je úplné, pokud jeho každá neprázdná a shora omezená podmnožina má supremum.*

Ukážeme, že uspořádané těleso $\mathbb{Q}$ úplné není, plyne to z následující věty. Pro její důkaz si připomeneme *princip indukce*, že každá neprázdná podmnožina $X \subset \mathbb{N}$ má minimum.

**Věta 6 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)** *Rovnice*

$$x^2 = 2$$

*nemá v oboru zlomků řešení.*

**Důkaz.** Pro spor nechť $(a/b)^2 = 2$ pro nějaké $a, b \in \mathbb{N}$. Tedy

$$a^2 = 2b^2$$

a podle principu indukce můžeme předpokládat, že číslo $a$ v této rovnici je minimální. Číslo $a^2$ je sudé, tedy i $a$ je sudé a $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$(2c)^2 = 2b^2 \rightsquigarrow 4c^2 = 2b^2 \rightsquigarrow b^2 = 2c^2 \ .$$

Protože $b < a$, dostali jsme řešení vysazené rovnice s číslem nalevo menším než $a$, což je spor. $\square$

**Důsledek 7 (neúplnost $\mathbb{Q}$)** *Uspořádané těleso*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q},\, 0,\, 1,\, +,\, \cdot,\, <)$$

*racionálních čísel není úplné.*

**Důkaz.** Ukážeme, že množina zlomků

$$X := \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$$

je neprázdná a shora omezená, ale nemá supremum. První dvě vlastnosti jsou jasné, $1 \in X$ a $x < 2$ pro každé $x \in X$.

Pro spor vezmeme zlomek $s := \sup(X)$. Když $s^2 > 2$, existuje zlomek $r > 0$, že $s - r > 0$ a stále $(s-r)^2 > 2$. Pak ale $s - r > x$ pro každé $x \in X$ a máme spor s tím, že $s$ je nejmenší horní mez množiny $X$. Když $s^2 < 2$, existuje zlomek $r > 0$, že stále $(s+r)^2 < 2$. Tedy $s + r \in X$ a máme spor s tím, že $s$ je horní mez množiny $X$. Podle trichotomie uspořádání musí být, že $s^2 = 2$. To je ale podle předchozí věty nemožné. $\square$

- *Úplné uspořádané těleso* $\mathbb{R}$.

**Věta 8 (existence $\mathbb{R}$)** *Existuje jediné (viz věta 9) úplné uspořádané těleso*

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}}) \ .$$

*Nazýváme ho tělesem reálných čísel.*

Připomínáme vlastnost/axiom úplnosti: je-li $X \subset \mathbb{R}$ neprázdná množina a existuje-li nějaké $y \in \mathbb{R}$, že $x \leq_{\mathbb{R}} y$ pro každé $x \in X$, potom má množina takových čísel $y$ nejmenší prvek. Index $\mathbb{R}$ budeme u neutrálních prvků, operací a uspořádání vynechávat. Každé uspořádaně těleso obsahuje jako své prvotěleso (nejmenší podtěleso) kopii racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

Vysvětlíme, jak úplnost uspořádaného tělesa ho činí v jistém smyslu jednoznačným. Bijekce $f\colon F \to G$ mezi dvěma usp. tělesy je jejich *izomorfismus*, pokud $f(0_F) = 0_G$, $f(1_F) = 1_G$ a pro každé $x, y \in F$ je

$$f(x +_F y) = f(x) +_G f(y),\ f(x \cdot_F y) = f(x) \cdot_G f(y)$$

a

$$x <_F y \iff f(x) <_G f(y) .$$

**Věta 9 (jednoznačnost $\mathbb{R}$)** *Každá dvě úplná uspořádaná tělesa jsou izomorfní.*

**Důsledek 10 ($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$)** *Rovnice*

$$x^2 = 2$$

*má v oboru reálných čísel řešení.*

**Důkaz.** Vezmeme podobnou množinu jako v důkazu důsledku 7, tedy

$$X := \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 < 2\} .$$

Podle věty 8 existuje supremum $s := \sup(X) \in \mathbb{R}$. Stejné argumenty jako v onom důkazu ukazují, že nenastává ani $s^2 < 2$ ani $s^2 > 2$. Tedy $s^2 = 2$. $\square$

V pozdější přednášce dokážeme dalekosáhlé zobecnění předchozího výsledku. Spojitost funkce v následujícím tvrzení znamená (později to definujeme přesně), že malá změna argumentu funkce způsobí malou změnu hodnoty.

**Tvrzení 11 (Bolzano–Cauchyova věta)** *Nechť $a \leq b$ jsou reálná čísla a*

$$f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$$

*je taková spojitá funkce, že $f(a)f(b) \leq 0$. Potom existuje číslo $c \in [a, b]$, že $f(c) = 0$.*

• *Spočetné a nespočetné množiny, nespočetnost* $\mathbb{R}$. Množina $X$ je *nekonečná*, když existuje prostá funkce $f\colon \mathbb{N} \to X$. Když $X$ není nekonečná, je *konečná*. Dá se dokázat, že pro každou konečnou množinu $X$ existuje surjekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.

**Definice 12 ((ne)spočetné množiny)** *Pojmenujeme následující druhy množin $X$.*

1. *$X$ je spočetná, když existuje bijekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.*
2. *$X$ je nejvýše spočetná, je-li konečná nebo spočetná.*
3. *$X$ je nespočetná, když není nejvýše spočetná.*

**Věta 13 (spočetnost $\mathbb{Q}$)** *Množina zlomků je spočetná.*

**Důkaz.** Pro zlomek $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru, to jest když $n > 0$ a když čitatel $m \in \mathbb{Z}$ a jmenovatel $n$ jsou nesoudělná čísla (tj. největší číslo $k \in \mathbb{N}$ dělící současně $m$ i $n$ je $k = 1$), definujeme normu $\|\frac{m}{n}\| := |m| + n \in \mathbb{N}$ a množiny

$$Z_j := \{z_{1,\,j} < z_{2,\,j} < \cdots < z_{k_j,\,j} \mid z_{i,\,j} \in \mathbb{Q},\, \|z_{i,\,j}\| = j\},\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Například

$$Z_5 = \{-\tfrac{4}{1} < -\tfrac{3}{2} < -\tfrac{2}{3} < -\tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{2} < \tfrac{4}{1}\} \ \text{ a } \ k_5 = 8\ .$$

Zde $\frac{0}{5} \notin Z_5$, protože čísla 0 a 5 nejsou nesoudělná. Patrně $j \neq j' \Rightarrow Z_j$ a $Z_{j'}$ jsou disjunktní, každá $Z_j$ je konečná (a $\neq \emptyset$) a $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Z_j = \mathbb{Q}$. Zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definujeme jako

$$f(1) = z_{1,1},\ f(2) = z_{2,1},\ \dots,\ f(k_1) = z_{k_1,1},\ f(k_1+1) = z_{1,2},\ \dots$$

— hodnoty funkce $f$ nejprve projdou $k_1$ seřazených zlomků v $Z_1$, pak $k_2$ seřazených zlomků v $Z_2$, a tak dál. Obecná hodnota je pro $j \in \mathbb{N}$ rovna

$$f(k_1 + k_2 + \cdots + k_{j-1} + i) = z_{i,j},\ \ i \in [k_j]\ ,$$

kde pro $j = 1$ tento argument funkce $f$ definujeme jako $i$. Lehce se vidí, že $f$ je bijekce. $\square$

Dokážeme nespočetnost $\mathbb{R}$. Odvodíme ji jako důsledek základního výsledku o množinách, který ukazuje, že potence $\mathcal{P}(X)$ je podstatně větší množina než $X$.

**Věta 14 (Cantorova)** *Pro žádnou množinu $X$ neexistuje surjekce*

$$f\colon X \to \mathcal{P}(X)$$

*z ní na její potenci.*

**Důkaz.** Pro spor buď $X$ množina a $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ buď surjekce. Uvážíme podmnožinu

$$Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subset X\ .$$

Protože $f$ je na, existuje takové $y \in X$, že $f(y) = Y$. Pokud $y \in Y$, podle definice množiny $Y$ platí, že $y \notin f(y) = Y$. Pokud $y \notin Y = f(y)$, má $y$ vlastnost prvků množiny $Y$ a $y \in Y$. V obou případech to je spor. $\square$

Jako $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ označíme množinu (všech) posloupností $(a_n) \subset \{0,1\}$.

**Důsledek 15 (o 0-1 posloupnostech)** *Surjekce*

$$f\colon \mathbb{N} \to \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$$

*neexistuje.*

**Důkaz.** Zobrazení $g\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g((a_n)) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}$, je patrně bijekce. Kdyby existovala uvedená surjekce $f$, složenina $g \circ f$ by byla funkce z $\mathbb{N}$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ popírající větu 14. $\square$

**Důsledek 16 (nespočetnost $\mathbb{R}$)** *Množina reálných čísel je nespočetná.*

**Důkaz.** Opět dokážeme o něco víc, neexistenci surjekce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Reálná čísla si teď představujeme jako nekonečné desetinné rozvoje a vezmeme množinu

$$X := \{0.a_1a_2\ldots \mid a_n \in \{0,\,1\}\} \subset \mathbb{R}$$

těch, co mají za desetinnou tečkou jen nuly a jedničky. Zřejmě máme bijekci $g\colon X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Kdyby uvedená surjekce $f$ existovala, snadno z ní získáme surjekci $f_0\colon \mathbb{N} \to X$ (položíme $f_0(n) := f(n)$ pro $f(n) \in X$, jinak $f_0(n) := 0.000\ldots$). Pak by ale složenina $g \circ f_0$ šla z $\mathbb{N}$ na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a popírala by důsledek 15. $\square$

• *Trochu o* $\mathbb{C}$. Připomeneme komplexní čísla a jednu jejich stěžejní vlastnost. Je dobře známo, že

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a,\, b \in \mathbb{R}\},\ i = \sqrt{-1}\ ,$$

a že $\mathbb{C}$ s neutrálními prvky $0_{\mathbb{C}} := 0 + 0i$ a $1_{\mathbb{C}} := 1 + 0i$ a operacemi

$$(a + bi) +_{\mathbb{C}} (c + di) := (a +_{\mathbb{R}} c) + (b +_{\mathbb{R}} d)i$$

a

$$(a + bi) \cdot_{\mathbb{C}} (c + di) := (a \cdot_{\mathbb{R}} c -_{\mathbb{R}} b \cdot_{\mathbb{R}} d) + (a \cdot_{\mathbb{R}} d +_{\mathbb{R}} b \cdot_{\mathbb{R}} c)i$$

tvoří těleso. To má následující důležitou vlastnost, platí pro něj takzvaná Základní věta algebry.

**Věta 17 (ZVA)** *Každý nekonstantní komplexní polynom* $p(z)$ *v* $\mathbb{C}[z]$ *(tj. s komplexními koeficienty) má kořen, takové číslo* $z_0 \in \mathbb{C}$, *že*

$$p(z_0) = 0\ .$$

DĚKUJI ZA POZORNOST