MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 (NMAI054)
letní semestr 2020/21

Přednášky 1–7 Martina Klazara a přednášky 8–14 Víta Jelínka.

`https://iuuk.mff.cuni.cz/~jelinek/1920/kompletni-poznamky_MA1.pdf`

PŘEDNÁŠKA 2 (11.3.2021). POČÍTÁNÍ S NEKONEČNY. LIMITY POSLOUPNOSTÍ. EXISTENCE LIMIT.

Co stačí (a je nutné) umět ke zkoušce: (i) počítání s nekonečny, (ii) definice vlastní a nevlastní limity posloupnosti, (iii) jednoznačnost limity (tvrzení 8), (iv) co je a k čemu je podposloupnost (tvrzení 11 a 12), (v) $\sqrt[n]{n} \to 1$ (tvrzení 14), (vi) monotónní posloupnosti (věta 17), (vii) Bolzano–Weierstrassova věta (věta 22) a (viii) Cauchyova podmínka (věta 26).

Připomeňte si, co jsou reálná čísla $\mathbb{R}$ a co jsou přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Písmeny i, j, k, l, m, m_1, m_2, $\dots$, n, n_0, n_1, $\dots$ označujeme přirozená čísla, písmeny a, b, c, d, ε, δ reálná čísla a vždy $\varepsilon, \delta > 0$.

• Pro definici nevlastních limit přidáme k $\mathbb{R}$ dva nové různé prvky, <u>nekonečna</u> $\underline{+\infty}$ a $\underline{-\infty}$, a položíme $\underline{\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}}$.

• Počítání s nekonečny. V následujících rovnicích bereme současně vždy jen horní (resp. jen dolní) znaménka nekonečen: $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) := \pm\infty$, pro $a > 0$ je $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a := \pm\infty$, pro $a < 0$ je $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a := \mp\infty$, $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) := +\infty$, $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) := -\infty$ a konečně $\frac{a}{\pm\infty} := 0$. Odečtení $\pm\infty$ redukujeme na přičtení $\mp\infty$, odečtení a redukujeme na přičtení $-a$ a dělení číslem $a \neq 0$ redukujeme na násobení číslem $1/a$. Všechny ostatní neuvedené možnosti operací, např. $(\pm\infty) +$

$(\mp\infty)$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ nebo $0\cdot(\pm\infty)$, jsou nedefinované. Položíme $-\infty < +\infty$ a $-\infty < a < +\infty$.

Úloha 1. *Spočtěte:* $\frac{-\infty}{-2}$, $(-\infty)-(+\infty)$, $-\infty+10$ *a* $\frac{+\infty}{0}$.

• Limity posloupností. Není-li řečeno jinak, $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ označují reálné posloupnosti. Pak (a_n) má (vlastní) limitu a, když

$$\forall\,\varepsilon\;\exists\,n_0:\;n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\;.$$

Píšeme $\lim a_n = a$ či $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Pro každé, jakkoli malé, $\varepsilon > 0$ tak existuje index n_0, že od něj dále má člen posloupnosti a_n vzdálenost k a menší než ε. Má-li (a_n) vlastní limitu, pak konverguje, jinak diverguje. Pro následující úlohu se rozpomeňte na značení reálných intervalů: $(a,b) = \{c \mid a < c < b\}$, $(-\infty, b] = \{c \mid c \leq b\}$, atd.

Úloha 2. *Podmínka na vzdálenost v definici limity je ekvivalentní podmínkám* $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ *a* $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Řekneme, že (a_n) má (nevlastní) limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, když

$$\forall\,c\;\exists\,n_0:\;n \geq n_0 \Rightarrow a_n > c,\;\;\text{resp. } a_n < c\;.$$

Píšeme $\lim a_n = +\infty$ či $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim a_n = -\infty$ či $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Pro $L \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = L$ píšeme i $a_n \to L$.

Úloha 3. *Definujeme* $U(a,\varepsilon) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $U(-\infty,\varepsilon) := (-\infty, -1/\varepsilon)$ *a* $U(+\infty,\varepsilon) := (1/\varepsilon, +\infty)$. *Dokažte, že pro každé* $L \in \mathbb{R}^*$ *je* $\lim a_n = L \iff \forall\,\varepsilon\;\exists\,n_0:\;n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L,\varepsilon)$.

• Pro $L \in \mathbb{R}^*$ intervaly $U(L,\varepsilon)$ nazýváme ε-okolí bodu, resp. nekonečna, L. Vždy $U(L,\varepsilon) \neq \emptyset$ a dokonce je každé $U(L,\varepsilon)$ nespočetná množina.

Úloha 4. *Nechť se posloupnosti* (a_n) *a* (b_n) *shodují, s možnou výjimkou konečně mnoha členů. Pak*

$$\lim a_n = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim b_n = L \ .$$

Má-li tedy jedna z obou posloupností limitu, má stejnou limitu i druhá.

Úloha 5. *Je-li* (a_n) *eventuálně konstantní posloupnost, s* $a_n = a$ *pro každé* $n \ge n_0$*, pak* (a_n) *konverguje a* $\lim a_n = a$.

• Například $\lim \frac{1}{n} = 0$, protože pro dané ε a každé $n \ge n_0 := 1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil$ je

$$0 < \frac{1}{n} \le \frac{1}{1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \ .$$

Zde $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ označuje horní celou část čísla a, nejmenší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \ge a$. Podobně dolní celá část $\lfloor a \rfloor$ čísla a je největší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \le a$.

• Dále například

$$\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \to -\infty \ .$$

Pro dané $c < 0$ totiž pro každé $n \ge n_0 > \max(4c^2, 2^6)$ je

$$\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} = n^{1/2}(n^{-1/6} - 1) < -n^{1/2}/2 < -2|c|/2 = c \ .$$

Není nutné hledat nějakou optimální, nejlepší hodnotu indexu n_0 v závislosti na ε či c (dá se to udělat jen v nejjednodušších případech typu $\lim \frac{1}{n}$, jinak to bývá problém), stačí najít libovolnou hodnotu n_0, aby pro každé $n \ge n_0$ platila nerovnost v definici limity. Ale i jen k tomu je často nutné mít zkušenosti se zacházením s nerovnostmi a odhady.

Úloha 6. *Spočítejte si prosím pár limit:* $\lim n^{-n}$, $\lim (-n)^n$, $\lim (-n)^{-n}$, $\lim n^n$, $\lim (-1)^n$, $\lim (-1)^{-n}$, $\lim 1^n$, $\lim (2^n + 3^n)$, $\lim (-2^n - 3^n)$, $\lim (3^n - 2^n)$ *a* $\lim (2^n - 3^n)$.

V minulé přednášce jsem zapomněl zmínit množinovou terminologii disjunktnosti: A a B jsou <u>disjunktní množiny</u>, když nemají žádný společný prvek, to jest $A \cap B = \emptyset$. Množiny B_i, $i \in I$, jsou <u>vzájemně disjunktní</u>, když $i, j \in I, i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

Úloha 7. *Dokažte důležitou vlastnost disjunktnosti ε-okolí,*

$$\forall K, L \in \mathbb{R}^* : \; K \neq L \Rightarrow (\exists \varepsilon : \; U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) = \emptyset) \,.$$

Tvrzení 8 (jednoznačnost limity). *Limita posloupnosti je jednoznačná, pro každé $K, L \in \mathbb{R}^*$ a každou (a_n) platí, že*

$$(\lim a_n = K \wedge \lim a_n = L) \Rightarrow K = L \,.$$

Důkaz. Nechť má posloupnost (a_n) limity $K \in \mathbb{R}^*$ i $L \in \mathbb{R}^*$. Pro spor nechť $K \neq L$. Podle předchozí úlohy vezmeme číslo ε, že $U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) = \emptyset$. Podle reformulace definice limity v úloze 3 bychom pro každé velké n měli mít $a_n \in U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon)$, což je spor. □

• Limita neexistuje kvůli podposloupnostem. Posloupnost (b_n) je <u>podposloupností</u> posloupnosti (a_n), pokud existují taková čísla $m_1 < m_2 < \dots$, že pro každé n je $b_n = a_{m_n}$.

Úloha 9. *Ukažte, že relace „být podposloupností“ je reflexivní a tranzitivní.*

Úloha 10. *Nalezněte posloupnosti (a_n) a (b_n), že jedna je podposloupností druhé a naopak, ale $(a_n) \neq (b_n)$.*

Tvrzení 11 (o podposloupnosti). *Když* $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^*$ *a* (b_n) *je podposloupnost posloupnosti* (a_n)*, pak i* $\lim b_n = L$*.*

Důkaz. Nechť (a_n) je posloupnost s limitou $L \in \mathbb{R}^*$ a $m_1 < m_2 < \ldots$ jsou přirozená čísla. Pro dané ε vezmeme n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \in U(L, \varepsilon)$ (viz úloha 3). Protože $m_n \geq n$ pro každé n, pro každé $n \geq n_0$ je $a_{m_n} \in U(L, \varepsilon)$. Tedy podposloupnost $(b_n) = (a_{m_n})$ má limitu L. $\square$

Limita posloupnosti nemusí existovat. Třeba (a_n) s $a_n = (-1)^n$ nemá limitu. Kdyby měla limitu L, každá její podposloupnost by také měla limitu L. Ale (a_n) má jako podposloupnosti konstantní posloupnosti $(1, 1, \ldots)$ a $(-1, -1, \ldots)$ s různými limitami 1 a -1. Toto funguje obecně.

Tvrzení 12 (kdy limita neex.). *Posloupnost* (a_n) *nemá limitu, právě když* (a_n) *má dvě podposloupnosti s různými limitami.*

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$ plyne ihned z předchozího tvrzení. Opačnou implikaci $\Rightarrow$ dokážeme příště pomocí hromadných bodů posloupností. $\square$

Abychom vyvrátili, že daná posloupnost má limitu, vždy je možné předvést její dvě podposloupnosti s různými limitami.

Úloha 13. *Dokažte touto metodou, že*

$$(a_n) = (n + (-1)^n n)$$

nemá limitu.

• Je dobré umět poznat, kdy je výpočet dané limity „triviální“ a kdy „netriviální“ (a obtížnější). První případ nastává, když v limitěném výrazu žádné dva růsty nejdou proti sobě. Jinak dojde na druhý případ. Třeba výpočty $\lim\,(2^n+3^n)$ a $\lim\,\frac{4}{5n-3}$ jsou triviální, kdežto výpočty $\lim\,(2^n-3^n)$ a $\lim\,\frac{4n+7}{5n-3}$ jsou netriviální. Často netriviální limitu spočítáme tak, že ji algebraickými úpravami převedeme na triviální (jako v hořejším příkladu s $\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}$). Následující limita je netriviální, protože růsty mocniny prostřednictvím jejího exponentu a základu zde jdou proti sobě. Jak hned uvidíme, exponent převládne.

Tvrzení 14 ($n^{1/n}\to 1$). *Platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\;.$$

Důkaz. Patrně vždy $n^{1/n}\ge 1$. Kdyby $n^{1/n}\not\to 1$, existovala by čísla $c>0$ a $2\le n_1<n_2<\ldots$, že pro každé i je $n_i^{1/n_i}>1+c$. Podle Binomické věty (úloha 15) by pro každé i bylo

$$n_i>(1+c)^{n_i}=\textstyle\sum_{j=0}^{n_i}\binom{n_i}{j}c^j\ge\frac{n_i(n_i-1)}{2}c^2$$

a tedy, pro každé i,

$$1+\frac{2}{c^2}>n_i\;.$$

Což je spor, posloupnost $2\le n_1<n_2<\ldots$ totiž není shora omezená. $\Box$

Úloha 15 (Binomická věta). *Pro každá tři čísla a, b, n se*

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i},\ \ \textit{kde}\ \ \tbinom{n}{i}=\tfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{i!}\;.$$

• Kdy limita posloupnosti existuje? Uvedeme v tomto duchu *čtyři věty (druhá z nich je nepovinná). Třetí věta* zaručuje konvergentní podposloupnost. Podle jednoduché, ale důležité úlohy 4 se existence limity nezruší ani její hodnota se nezmění žádnou změnou jen konečně mnoha členů posloupnosti. Vlastnosti posloupnosti, které zaručí existenci její limity, by měly být taky tak robustní, neměly by být ovlivnitelné žádnou změnou jen konečně mnoha členů posloupnosti. Například omezenost posloupnosti (kterou ale definujeme až za chvíli), je robustní.

Úloha 16. *Buď dáno a. Je vlastnost posloupnosti* (a_n)*, že*

$$\sup(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = a \ ,$$

robustní?

Píšeme v podmiňovacím způsobu, neboť tento požadavek se ve formulacích vět často nedodržuje. Hned následující věta o monotónní posloupnosti se typicky uvádí jen pro posloupnost (a_n) monotónní pro každé n, což není robustní vlastnost. My budeme důslední a ve zmíněných čtyřech větách použijeme robustní vlastnosti.

Posloupnost (a_n) je neklesající, resp. nerostoucí, pro $n \geq n_0$, pokud pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \leq a_{n+1}$, resp. $a_n \geq a_{n+1}$. Splňuje-li (a_n) jedno z obého pro nějaké n_0, je monotónní pro velké n. Pokud $n_0 = 1$, nazveme (a_n) stručně neklesající, resp. nerostoucí, resp. monotónní posloupností. Řekneme, že (a_n) je shora omezená, pokud $\exists\, c\ \forall\, n:\ \ a_n < c$, jinak je (a_n) shora neomezená. Otočením nerovnosti dostáváme omezenost, resp. neomezenost, posloupnosti (a_n) zdola.

Věta 17 (o monotónní posloupnosti). *Každá posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$*, která je monotónní pro velké n, má limitu. Je-li* (a_n)

neklesající pro $n \geq n_0$, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup(\{a_n \mid n \geq n_0\}) & \ldots \ (a_n) \textit{ je shora omezená a} \\ +\infty & \ldots \ (a_n) \textit{ je shora neomezená .} \end{cases}$$

Je-li (a_n) nerostoucí pro $n \geq n_0$, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf(\{a_n \mid n \geq n_0\}) & \ldots \ (a_n) \textit{ je zdola omezená a} \\ -\infty & \ldots \ (a_n) \textit{ je zdola neomezená .} \end{cases}$$

Důkaz. Probereme pouze první případ neklesající posloupnosti, druhý případ je velmi podobný. Když (a_n) je shora neomezená, pak pro dané c existuje m, že $a_m > \max(c, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0})$. Tedy $a_m > c$ i $m > n_0$, a tudíž $a_n \geq a_m > c$ pro každé $n \geq m$. Tedy $a_n \to +\infty$. Pro shora omezenou (a_n) označíme jako s supremum množiny jejích členů a_n s indexy $n \geq n_0$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle aproximační vlastnosti suprema existuje $m \geq n_0$, že $s - \varepsilon < a_m \leq s$. Tedy $s - \varepsilon < a_m \leq a_n \leq s$ pro každé $n \geq m$ a $a_n \to s$. □

Na přednášce vysvětlím, proč posloupnosti v praxi jsou typicky monotónní pro velké n.

• Kvazimonotónní posloupnosti *(nepovinné)*. Řekneme, že posloupnost (a_n) je <u>kvazimonotónní pro velké n</u>, když

$$\exists\, n_0\, \forall\, n: \ n \geq n_0 \Rightarrow \text{množina } \{m \mid a_m < a_n\} \text{ je konečná}$$

nebo

$$\exists\, n_0\, \forall\, n: \ n \geq n_0 \Rightarrow \text{množina } \{m \mid a_m > a_n\} \text{ je konečná .}$$

Úloha 18. *Když je posloupnost monotónní pro velké n, je i kvazimonotónní pro velké n.*

Úloha 19. *Uveďte příklad posloupnosti, která není monotónní pro velké n, ale je kvazimonotónní pro velké n.*

V následující větě používáme veličiny lim sup a lim inf posloupnosti, které jsou vždy definované, mohou nabývat i hodnoty $\pm\infty$ a které zavedeme příště.

Věta 20 (o kvazimon. posloupnosti). *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, která je kvazimonotónní pro velké n, má limitu. Splňuje-li (a_n) první, resp. druhou, podmínku definice, pak*

$$\lim a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^*, \ \textit{resp.} \ \lim a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^* \ .$$

Důkaz. Uvážíme jen případ, kdy (a_n) splňuje první podmínku pro nějaké n_0, protože druhý případ je velmi podobný. Nechť je (a_n) shora neomezená a je dáno c. Tedy existuje $m \geq n_0$, že $a_m > c$. Podle první podmínky existuje k, že $a_n \geq a_m > c$ pro každé $n \geq k$. Tedy $a_n \to +\infty = \limsup a_n$. Nechť je (a_n) shora omezená, $s = \limsup a_n \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Podle definice $\limsup a_n$ se v $s - \varepsilon < a_m < s+\varepsilon$ první nerovnost splňuje pro nekonečně mnoho m a druhá pro skoro všechny m. Podle první podmínky tedy existuje k, že $s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon$ platí pro každé $n \geq k$. Tedy $a_n \to s$. □

Kvazimonotónní posloupnosti, v nichž $n_0 = 1$, zavedl anglický matematik *Godfrey H. Hardy (1877–1947)*.

• Bolzano–Weierstrassova věta. Potřebujeme pomocný výsledek, který je zajímavý i sám o sobě.

Tvrzení 21 ($\forall$ posl. $\exists$ mon. podposl.). *Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Pro danou posloupnost (a_n) definujeme množinu

$$M := \{n \mid \forall\, m: \; n \le m \Rightarrow a_n \ge a_m\} \, .$$

Když je M nekonečná, $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$, máme nerostoucí podposloupnost (a_{m_n}). Když je M konečná, vezmeme číslo $m_1 > \max(M)$. Pak jistě $m_1 \notin M$ a tedy existuje číslo $m_2 > m_1$, že $a_{m_1} < a_{m_2}$. Protože $m_2 \notin M$, existuje $m_3 > m_2$, že $a_{m_2} < a_{m_3}$. A tak dále, máme neklesající (dokonce ostře rostoucí) podposloupnost (a_{m_n}). □

Posloupnost reálných čísel je omezená, je-li shora i zdola omezená.

Věta 22 (Bolzano–Weierstrassova). *Každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je omezená posloupnost. Nechť (a_{m_n}) je její monotónní podposloupnost, jež je garantovaná předchozím tvrzením. Zřejmě je (a_{m_n}) omezená. Podle věty 17 je (a_{m_n}) konvergentní. □

S C. Weierstrassem jsme se setkali již minule. Italsko-německo-český kněz, filosof a matematik *Bernard Bolzano (1781–1848)* má v Praze po sobě pojmenovanou ulici (u Hlavního nádraží), v Celetné ulici ho připomíná pamětní deska a na Olšanských hřbitovech se nachází jeho hrob.

Úloha 23. *Dokažte, že každá posloupnost reálných čísel má podposloupnost, která má limitu.*

• Cauchyova podmínka. S Cauchyovými posloupnostmi zlomků jsme setkali minule. Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova, pokud

$$\forall\, \varepsilon\; \exists\, n_0: \; m, n \ge n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \, .$$

Úloha 24. *Každá Cauchyova posloupnost reálných čísel je omezená.*

Úloha 25. *Cauchyovost posloupnosti reálných čísel je robustní vlastnost (ve výše definovaném technickém smyslu).*

Věta 26 (Cauchyova podmínka). *Posloupnost reálných čísel je konvergentní, právě když je Cauchyova.*

Důkaz. Nechť (a_n) má vlastní limitu a. Pro dané ε tak máme n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2$. Tedy

$$m,\, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Tedy (a_n) je Cauchyova.

Nechť (a_n) je Cauchyova. Podle úlohy 24 je i omezená a podle Bolzano–Weierstrassovy věty má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s limitou a. Pro dané ε tak máme n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2$ a $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Vždy $m_n \geq n$, takže

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Tedy $a_n \to a$. □

I francouzský matematik *Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)* pobýval v Praze, v exilu v letech 1833–1838.

DĚKUJI ZA POZORNOST!