

Definice.

DLÁŽDĚNÍ KOUPELNY: Na vstupu máme množinu barev B , obdélníkovou koupelnu velikosti $r \times s$, barvy krajních stěn $s_u, s_d \in B^s, s_\ell, s_r \in B^r$ a typy dlaždic $d_1, \dots, d_n \in B^4$, kde dlaždice je popsána barvami na svých krajích. Řekněme, že dláždění existuje, jestliže smíme na každé políčko koupelny položit dlaždici jednoho z dodaných typů tak, že na sebe všechny barvy navazují.

Příklad 1.

Dokažte, že DLÁŽDĚNÍ KOUPELNY je v NP.

Příklad 2.

Převeďte 3D-párování na SAT.

Příklad 3.

Uvažme následující převod problému HAMILTONOVA KRUŽNICE na SAT: Pro každou orientovanou hranu $e \in E$ vytvoříme proměnnou x_e , pro každý vrchol $v \in V(G)$ přidáme klauzule $\bigvee_{u \in V: uv \in E} x_{uv}$ a $\forall u \neq u' \in V, uv, u'v \in E: x_{uv} \Rightarrow \neg x_{u'v}$ (do každého vrcholu vede právě jedna hrana). Navíc pro každou $A \subseteq V$ přidáme klauzuli $\bigvee_{uv \in E(G): u \in A, v \notin A} x_{uv}$ (vybrané hrany tvoří souvislý podgraf).

Rozhodněte, zda je tento převod korektní. Pokud ne, najděte jiný převod, který už korektní bude.

Definice.

0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE: Mějme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$, kde A, b obsahují pouze nuly a jedničky. Existuje řešení této soustavy rovnic, že x taky obsahuje pouze nuly a jedničky? Pozor, rovnice jsou nad \mathbb{R} !

Příklad 4.

Ukažte, že 0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE je NP-úplný problém.

Nápověda: Převeďte 3D-PÁROVÁNÍ.

Definice.

SOUČET PODMNOŽINY: Mějme posloupnost $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ a číslo $s \in \mathbb{N}$. Existuje podposloupnost x_i taková, že její součet je s ?

DVA LOUPEŽNÍCI: Mějme posloupnost $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Lze tuto posloupnost rozdělit na dvě podposloupnosti se stejným součtem?

Příklad 5.

Převeďte na sebe navzájem SOUČET PODMNOŽINY a DVA LOUPEŽNÍKY.

***Příklad 6.**

Dokažte, že SOUČET PODMNOŽINY je NP-úplný převodem 0/1 LINEÁRNÍCH ROVNIC.

***Příklad 7.**

Převeďte nějakou variantu NP-úplného SATu na OBARVENÍ 3 BARVAMI.