

**Definice.**

DLÁŽDĚNÍ KOUPELNY: Na vstupu máme množinu barev  $B$ , obdélníkovou koupelnu velikosti  $r \times s$ , barvy krajních stěn  $s_u, s_d \in B^s, s_\ell, s_r \in B^r$  a typy dlaždic  $d_1, \dots, d_n \in B^4$ , kde dlaždice je popsána barvami na svých krajích. Řekněme, že dláždění existuje, jestliže smíme na každé políčko koupelny položit dlaždici jednoho z dodaných typů tak, že na sebe všechny barvy navazují.

**Příklad 1.**

Dokažte, že DLÁŽDĚNÍ KOUPELNY je v NP.

**Příklad 2.**

Vyřešte SAT pro formule v DNF (klauzule jsou spojené  $\vee$ , literály v klauzuli  $\wedge$ ) v polynomiálním čase.

**Příklad 3.**

Uvažme následující převod problému HAMILTONOVA KRUŽNICE na SAT: Pro každou orientovanou hranu  $e \in E$  vytvoříme proměnnou  $x_e$ , pro každý vrchol  $v \in V(G)$  přidáme klauzule  $\bigvee_{u \in V: uv \in E} x_{uv}$  a  $\forall u \neq u' \in V, uv, u'v \in E : x_{uv} \Rightarrow \neg x_{u'v}$  (do každého vrcholu vede právě jedna hrana). Navíc pro každou  $A \subseteq V$  přidáme klauzuli  $\bigvee_{uv \in E(G): u \in A, v \notin A} x_{uv}$  (vybrané hrany tvoří souvislý podgraf).

Rozhodněte, zda je tento převod korektní. Pokud ne, najděte jiný převod, který už korektní bude.

**Definice.**

0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE: Mějme soustavu lineárních rovnic  $Ax = b$ , kde  $A, b$  obsahují pouze nuly a jedničky. Existuje řešení této soustavy rovnic, že  $x$  taky obsahuje pouze nuly a jedničky? Pozor, rovnice jsou nad  $\mathbb{R}$ !

**Příklad 4.**

Ukažte, že 0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE je NP-úplný problém.

*Nápověda: Převeďte 3D-PÁROVÁNÍ.*

**Definice.**

SOUČET PODMNOŽINY: Mějme posloupnost  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$  a číslo  $s \in \mathbb{N}$ . Existuje podposloupnost  $x_i$  taková, že její součet je  $s$ ?

DVA LOUPEŽNÍCI: Mějme posloupnost  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ . Lze tuto posloupnost rozdělit na dvě podposloupnosti se stejným součtem?

**Příklad 5.**

Převeďte na sebe navzájem SOUČET PODMNOŽINY a DVA LOUPEŽNÍKY.

**\*Příklad 6.**

Dokažte, že SOUČET PODMNOŽINY je NP-úplný převodem 0/1 LINEÁRNÍCH ROVNIC.

**\*Příklad 7.**

Převeďte nějakou variantu NP-úplného SATu na OBARVENÍ 3 BARVAMI.