2. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 7. 10. 2022

Definice. Definujme Fibonacciho čísla následovně: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Příklad 1.
Dokažte, že pro Fibonacciho čísla platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Příklad 2.
Dokažte, pro n-prvkovou množinu se počet jejích podmnožin sudé velikosti rovná počtu podmnožin liché velikosti.

Příklad 3.
Ve spížirně jsme našli tři neprůhledné krabičky. Na víčkách je fixou postupně napsáno: Čaj, Čokoláda a Červi. Zjistili jsme však, že víčka jsou popřeházená – v krabici vždy je obsah popsaný *jiným* víkem. Chtěli bychom zjistit, co je ve které krabici. Kolik otevření potřebujeme?

Příklad 4.
Určete maximální počet různých množin, které lze získat ze dvou množin A, B operacemi $\cap$, $\cup$, a $\setminus$.

Příklad 5.
Máme k dispozici rovnoramenné váhy a 9 kuliček. Víme, že jedna z nich je falešná – váží méně, než všechny ostatní. Ostatní kuličky mají stejnou váhu. Kolik musíme udělat vážení, abychom zjistili, která kulička je falešná?

Příklad 6.
Uvažme množinu $[n]$ a všechny její podmnožiny obsahující právě dva prvky. Jaké podmnožiny $[n]$ jsme schopní zkonstruovat, jestliže můžeme používat operaci Δ (symetrický rozdíl)?

Příklad 7.
Kolika způsoby umíme vybrat množiny $A, B \subseteq [n]$ takové, že:

1. $A \subseteq B$
2. $A = \{x\}$ a $x \in B$
3. $|A \cap B| = 1$

Příklad 8.
Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky $n \geq 0$ takových, že neobsahují dvě jedničky těsně vedle sebe, je právě F_{n+2}.