9. DOMÁCÍ ÚKOL Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY Termín: 13. 12. 2021

Úkol 1. (1 + 1 bod)

Víme, že každý eulerovský graf lze rozložit na hranově disjunktní sjednocení kružnic. Ukažte, že:

a) tyto kružnice nejsou jednoznačně určené (tedy existuje graf, který má alespoň dva různé rozklady)

b) počet těchto kružnic není jednoznačně určen (tedy existuje graf, který má alespoň dva různé rozklady, které se liší počtem kružnic)

Úkol 2. (2 body)

Pro grafy $G(V, E)$ a $H(V', E')$ označíme operaci $G \,\square\, H$ (čtverečkový součin grafů) jako graf s vrcholy $V \times V'$, a hranami jako množinou $\{\{(u, v), (u, v')\} \mid u \in V; v, v' \in V'; \{v, v'\} \in E'\} \cup \{\{(u, v), (u', v)\} \mid u, u' \in V; v \in V'; \{u, u'\} \in E\}$.

Neformálně řečeno vezmeme všechny dvojice vrcholů G a vrcholů H. Tyto dvojice vrcholů pospojujeme tak, že v jedné souřadnici se přesuneme hranou, je-li v původním grafu, a v druhé souřadnici zůstaneme ve stejném vrcholu.

Pokud stále definici nerozumíte, můžete se podívat na `https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_product_of_graphs`.

Mějme G eulerovský graf. Dokažte, že $G \,\square\, C_4$ je taktéž eulerovský.

Úkol 3. (2 body)

Uvažujme orientované grafy na n vrcholech, jejichž vrcholy mají vstupní a výstupní stupeň roven 1 a neobsahují smyčky. Kolik jich je?

Úkol 4. (2 body)

Nechť G je neorientovaný graf, jehož vrcholy mají sudé stupně. Ukažte, že tento graf lze zorientovat (každé hraně přiřadíme právě jeden směr) tak, že každý vrchol bude vyvážený.