3. DOMÁCÍ ÚKOL Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY Termín: 1. 11. 2021

Úkol 1. (1 bod)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to Y$ je zobrazení. Dokažte, že relace $R \subseteq X \times X$, kde $x\ R\ y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, je ekvivalence.

Úkol 2. (2 body)

Nalezněte všechna částečná uspořádání na tříprvkové množině. Ukažte (klidně i neformálně), že jsou všechna.

Úkol 3. (2 body)

Mějme částečné uspořádání $\preceq$ a lineární uspořádání $\leq$. Pak relace $\preccurlyeq$, kde $a \preccurlyeq b$ právě když $a \preceq b$ nebo $a \npreceq b \wedge a \leq b$ je nutně také lineární uspořádání. Vyvraťte toto tvrzení.

Úkol 4. (3 body)

Mějme množinu $[n]^2$ uspořádanou tak, že $(a, b) \preceq (c, d)$ právě, když $a \leq c \wedge b \leq d$. Najděte v tomto uspořádání nějaký nejdelší řetězec a nejdelší antiřetězec. Zdůvodněte, proč je nejdelší.

Nápověda: Všimněte si, že když máme antiřetězec, tak každý prvek z něj musí patřit do jiného řetězce, tedy počet různých řetězců pokrývajících celou množinu nám dává horní limit na délku antiřetězce. To samé platí i pro délku řetězce a počet antiřetězců.

***Úkol 5.** (1 bonusový bod)

Najděte na množině $\mathbb{N}$ alespoň dvě neizomorfní lineární uspořádání.