5. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 1. 11. 2021

Příklad 1.

Kolik existuje možností, jak rozmístit n nerozlišitelných kuliček do p rozlišitelných přihrádek? Co když jsou kuličky rozlišitelné? A co když v každé přihrádce musí být alespoň jedna kulička?

Příklad 2.

Mějme n bílých kuliček v řadě. Kolika způsoby můžeme přebarvit k z nich na černo tak, aby nebyly vedle sebe dvě černé?

Příklad 3.

Dokažte, že pro každé $k \leq n$ platí

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Příklad 4.

Sečtěte:

a) $\sum_{i=0}^{n} i^2$
b) $\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3i$
c) $\sum_{i=0}^{n} 2i^2 - i$
d) $\sum_{i=0}^{n} i^3 - 3i^2 + 2i$
e) $\sum_{i=0}^{n} ai^3 + bi^2 + ci + d$ pro každé $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
**f) $\sum_{x=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ (libovolný polynom v proměnné x)

Příklad 5.

Paul bydlí v Manhattanu a chce navštívit Paulu, která bydlí o m ulic na sever a n ulic na západ. V Manhattanu tyto ulice tvoří čtvercovou mřížku. Kolik existuje možných cest od Paula k Paule, pokud Paul nikdy nepojede po ulici na jih nebo na východ?

***Příklad 6.**

Kolik existuje různých správných uspořádání n párů závorek tak, že tvoří dobré uzávorkování (tedy ke každé otevírací závorce patří jiná uzavírací závorka dál)?

Příklad 7.

V koši na prádlo máme k párů černých a ℓ párů bílých ponožek. Kolik ponožek musíme z koše vytáhnout, abychom měli určitě alespoň pár černých ponožek?

Příklad 8.

Kolem kulatého stolu sedí 20 osob: 11 mužů a 9 žen. Ukažte, že ať si sednou libovolně, vždy budou dva nějací muži sedět vedle sebe.