10. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 6. 12. 2021

Definice. Hranový graf grafu $G(V, E)$, který má alespoň jednu hranu, je graf $L(G)(E, E')$ takový, že $\{e_1, e_2\} \in E'$ právě když $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, tedy vrcholy jsou původní hrany a hrany spojují vrcholy reprezentující hrany, které měly společný vrchol.

Příklad 1.

Pro která $n \geq 0$ existuje graf s právě n kostrami?

Příklad 2.

Pro jaké grafy platí, že $L(G)$ je strom? A pro jaké grafy platí, že $L(G) \simeq G$?

Příklad 3.

Najděte dva různé souvislé grafy, jímž odpovídá tentýž hranový graf.

Příklad 4.

Nechť m, n, k jsou přirozená čísla taková, aby příslušná zadání dávala smysl. Určete počet koster následujících grafů:

a) Strom na n vrcholech
b) Úplný bipartitní graf $K_{n,2}$
c) Úplný bipartitní graf $K_{n,3}$
d) „Činka“, tedy dvě kružnice C_m, C_n, kde je jeden vrchol první kružnice spojen s vrcholem druhé kružnice cestou délky k

Příklad 5.

Ukažte, že každá kostra obsahuje všechny mosty.

Příklad 6.

Dokažte, že G je strom právě když G je acyklický a zároveň pro něj platí Eulerova formule. Nepoužívejte přitom větu o ekvivalentních definicích (tedy jakékoliv implikace znovu dokažte).

Příklad 7.

Ukažte, že každý strom na alespoň třech vrcholech, který neobsahuje vrchol stupně 2, má více listů, než vnitřních vrcholů.

Příklad 8.

Mějme strom T a $n \geq 2$ jeho souvislých podgrafů $T_1, T_2, \ldots, T_n$ s vrcholy $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Dokažte, že:

a) $\bigcap_{i=1}^{n} T_i$ je buď strom nebo prázdný graf
b) Jestliže pro každé $1 \leq k, l \leq n$ platí $V_k \cap V_l \neq \emptyset$, pak také $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \neq \emptyset$
c) Kdyby G nebyl strom, předchozí tvrzení nemusí platit.

Průnik n podgrafů je podgraf, který obsahuje právě ty vrcholy a hrany, které se vyskytují ve všech n podgrafech.

Příklad 9.

Nechť G je strom a $v \in V(G)$ je vrchol stupně k. Ukažte, že G obsahuje alespoň k listů.