6. cvičení z ADS1 25. 3. 2022

Příklad 1.
Jak hledání minimální kostry ovlivní záporné hrany nebo cykly? Co kdybychom chtěli místo minimální kostry kostru maximální?

Lemma řezové. Nechť G je graf s unikátním ohodnocením hran w, R elementární řez a T minimální kostra G. Zvolme e nejlehčí hranu v řezu. Pak $e \in T$.

Lemma cyklové. Nechť G je graf s unikátním ohodnocením hran w, C cyklus v G a T minimální kostra G. Zvolme e nejtěžší hranu na cyklu. Pak $e \notin T$.

Příklad 2.
Řezové lemma vyžaduje, aby řez byl elementární. Co se stane, jesliže od této podmínky slevíme a prostě budeme chtít libovolný řez?

Příklad 3.
Pojďme tentorkát slevit od podmínky, aby ohodnocení bylo unikátní. Upravte řezové lemma a ukažte, že stále platí.

Příklad 4.
Dokažte cyklové lemma. Jak se změní, pokud ohodnocení hran nebude unikátní?

Příklad 5.
Najděte (ne nutně optimální, ale polynomiální) algoritmus na nalezení minimální kostry, který používá cyklové lemma.

Příklad 6.
Bude Borůvkův algoritmus fungovat, pokud váhy nejsou unikátní? Pokud ne, jak to opravíte?

Příklad 7.
Uvažme datovou strukturu pro Union-Find, která používá pole. Když spojíme dvě komponenty, přečíslujeme vždy tu menší z komponent. Dokažte, že pak přečíslujeme každý vrchol nejvýše $(\log n)$-krát.

Co z toho plyne pro složitost operací? Nezapomeňte, že musíte taky zajistit nalezení menší komponenty a vyjmenování vrcholů z komponenty.

Červeno-modrý algoritmus.
Na začátku obarvíme všechny hrany černě. Pak, dokud existuje alespoň jedna černá hrana, aplikujeme jedno z následujících pravidel:

- Zvolíme (nějak) elementární řez R, jehož nejlehčí hrana je černá, a tuto hranu obarvíme modře,
- Zvolíme (nějak) cyklus C, jehož nejtěžší hrana je černá, a tuto hranu obarvíme červeně.

Jakmile černé hrany dojdou, vrátíme modré hrany jako kostru.

Příklad 8.
Ukažte, že Jarníkův, Borůvkův i Kruskalův algoritmus je variantou červeno-modrého algoritmu.