8. DOMÁCÍ ÚKOL Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY Termín: 7. 12. 2020

Úkol 1. (1 + 1 bod)

Víme, že každý Eulerovský graf lze rozložit na hranově disjunktní sjednocení kružnic. Ukažte, že:

a) tyto kružnice nejsou jednoznačně určené (tedy existuje graf, který má alespoň dva různé rozklady)
b) počet těchto kružnic není jednoznačně určen (tedy existuje graf, který má alespoň dva různé rozklady, které se liší počtem kružnic)

Úkol 2. (2 body)

Pro grafy $G(V, E)$ a $H(V', E')$ označíme operaci $G \times H$ (kartézský součin grafů) jako graf $G'(V \times V', E'')$, kde $E'' = \{\{(u, v), (u, v')\} \mid u \in V; v, v' \in V'; \{v, v'\} \in E'\} \cup \{\{(u, v), (u', v)\} \mid u, u' \in V; v \in V'; \{u, u'\} \in E\}$.

Neformálně řečeno si pro každý vrchol grafu G vezmeme jednu kopii grafu H, a sobě odpovídající vrcholy v těchto kopiích pospojujeme tak, jak byly pospojované původní vrcholy v G.

Pokud stále definici nerozumíte, můžete se podívat na ***https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_product_of_graphs***.

Mějme G Eulerovský graf. Dokažte, že $G \times C_4$ je taktéž Eulerovský.

Úkol 3. (2 body)

Uvažujme orientované grafy na n vrcholech, jejichž vrcholy mají vstupní a výstupní stupeň roven 1 a neobsahují smyčky. Kolik jich je?

Úkol 4. (2 body)

Nechť G je neorientovaný graf, jehož vrcholy mají sudé stupně. Ukažte, že tento graf lze zorientovat (každé hraně přiřadíme právě jeden směr) tak, že každý vrchol bude vyvážený.