7. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 16. 11. 2020

Definice. Graf $G = (V, E)$ je souvislý, jestliže $\forall u, v \in V$ existuje cesta v G s krajními vrcholy u, v.

Definice. Graf $G = (V, E)$ je souvislý, jestliže pro libovolné rozdělení V na dvě množiny A, B takové, že $A \cap B = \emptyset, A \cup B = V$, platí: $\exists a \in A, b \in B : \{a, b\} \in E$.

Příklad 1.

Dokažte, že jsou si obě definice souvislosti grafu ekvivalentní.

Příklad 2.

Ukažte, že doplněk grafu G je nesouvislý právě když G obsahuje úplný bipartitní podgraf jako podgraf na všech vrcholech.

Příklad 3.

Ukažte, že když G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Příklad 4.

Najděte všechny grafy, které jako podgraf neobsahují

a) cestu délky 2
b) cestu délky 3

Příklad 5.

Najděte všechny grafy, které neobsahují indukovanou cestu délky 2.

Příklad 6.

Mějme graf s m hranami. Ukažte, že tento graf obsahuje bipartitní podgraf, který má alespoň $m/2$ hran.

Definice. Graf $G = (V, E)$ je les, jestliže neobsahuje libovolně dlouhý cyklus jako podgraf.

Definice. Graf $G = (V, E)$ je strom, jestliže je G souvislý les.

Definice. Nechť $G = (V, E)$ je strom. Vrchol $v \in V$ je list, pokud je jeho stupeň roven 1.

Příklad 7.

Ukažte, že každý les je bipartitní.

Příklad 8.

Dokažte, že každý strom obsahuje alespoň dva listy.

Příklad 9.

Nechť G je strom a $v \in V(G)$ je vrchol stupně k. Ukažte, že G obsahuje alespoň k listů.

Příklad 10.

Nechť G je strom a u, v dva jeho vrcholy, které nejsou spojené hranou. Ukažte, že $G + \{u, v\}$ už není strom.

Příklad 11.

Dokažte, že pro každý graf najdeme podmnožinu jeho hran takovou, že po jejich odebrání dostaneme les se stejnými komponentami souvislosti.