5. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 2. 11. 2020

Věta (Princip inkluze a exkluze). Pro konečné množiny $A_1, \dots, A_n$ platí:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Definice. $\check{s}_n = |\{\pi \in S_n \mid \nexists i : \pi(i) = i\}|$ je počet permutací na $[n]$ bez pevného bodu.

Příklad 1.
Kolik zbude z čísel $1, \dots, n$ po vyškrtání všech násobků 2, 3 a 5?

Příklad 2.
Řekněme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, jestliže je složené, ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvošíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000?

Příklad 3.
Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Příklad 4.
Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, U, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov:

a) BAR
b) BAR, RAK
c) BAR, DEN
d) BAR, DEN, RAZIE

Příklad 5.
Na plese je n párů. Kolik je rozdělění do dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?

Příklad 6.
Petr Štědrý pořádá každý večer večeři pro své přátele. Na večeři jsou pozvaní vždy tři hosté. Kolika způsoby může Petr rozeslat pozvánky pro svých 7 přátel na celý týden tak, že každý z těchto sedmi přátel je alespoň jednou pozván?

Příklad 7.
Prodavač suvenýrů má na prodej tři stejné figurky papeže Jana Pavla II, čtyři Jánošíky a pět Švejků. Kolika způsoby může figurky vyrovnat do výlohy do jedné řady tak, aby se nikdy nestalo, že by všechny figurky stejné postavy tvořily souvislý blok?