3. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY 19. 10. 2020

Definice. Značením $a \setminus b$ pro $a, b \in \mathbb{Z}$ myslíme to, že b je delitelné a beze zbytku.

Definice. Je-li $\mathbb{X}$ množina čísel, pak $\mathbb{X}^+$ je její podmnožina kladných čísel.

Definice. Mějme relace R na množině X a S na množině Y. Relace R a S jsou *izomorfní* právě když existuje bijekce $f : X \to Y$ taková, že $\forall a, b \in X : a\ R\ b \Leftrightarrow f(a)\ S\ f(b)$.

Příklad 1.
Rozhodněte, zda jsou následující relace $\sim$ na množině X ekvivalence. Pokud ano, popište třídy ekvivalence:

a) $X = \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^+$, $a \sim b \Leftrightarrow p \setminus (a - b)$
b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a \sim b \Leftrightarrow a \setminus b \wedge b \setminus a$
c) $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow b = -a$
d) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow |b - a| \leq 1$
e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
f) $X = 2^{\mathbb{N}}$, $A \sim B \Leftrightarrow$ existuje bijekce z A do B
g) $X =$ množina všech přímek v rovině, $p \sim q \Leftrightarrow p$ a q jsou rovnoběžné

Příklad 2.
Uvažujme relaci $x \setminus y$ na množině $[n]$.

a) Dokažte, že je částečné uspořádání. Je lineární?
b) Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
c) Jak vypadají maximální a minimální prvky?
d) Existuje nejmenší nebo největší prvek?
e) Jak vypadají řetězce a antiřetězce?

Příklad 3.
Jak se změní odpovědi předchozího příkladu, pokud z množiny odstraníme 1?

Příklad 4.
Ukažte, že všechna lineární uspořádání na konečné množině X jsou izomorfní. Kolik jich je? Jsou všechna částečná uspořádání na konečné množině X izomorfní?

Příklad 5.
Najděte částečné uspořádání na libovolné množině s danými vlastnostmi:

a) nemá minimální ani maximální prvek
b) nemá největší, ale má alespoň jeden maximální prvek
c) nemá největší, ale má právě jeden maximální prvek
d) má nekonečně mnoho minimálních prvků, ale nemá maximální prvek

Příklad 6.
Jak dlouhý je nejdelší řetězec v relaci $\subseteq$ na množině $2^{[n]}$?