

**Definice.** Definujme Fibonacciho čísla následovně:  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

**Definice.** Značení  $[n]$  je zkratkou za množinu  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Definice.** Značením  $a \setminus b$  myslíme to, že  $b$  je delitelné  $a$  beze zbytku.

### Příklad 1.

Dokažte matematickou indukcí pro každé  $n \geq 0$ :

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

### Příklad 2.

Dokažte matematickou indukcí pro každé  $n > 0$ :

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

### Příklad 3.

Dokažte, že  $8 \setminus (n^2 - 1)$  pro každé liché  $n > 0$ .

### Příklad 4.

Dokažte indukcí pro  $n > 0$ :

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2$$

### \*Příklad 5.

Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

### Příklad 6.

Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky  $n \geq 0$  takových, že neobsahují dvě jedničky těsně vedle sebe, je právě  $F_{n+2}$ .

### Příklad 7.

Kolejní topinkovač opeče krajíc chleba z jedné strany za 5 minut a vejdou se současně do něj dva krajíce. Jak dlouho potrvá opět  $n$  krajíců?

### Příklad 8.

Kolika způsoby umíme vybrat množiny  $A, B \subseteq [n]$  takové, že:

1.  $A \subseteq B$
2.  $A = \{x\}$  a  $x \in B$
3.  $|A \cap B| = 1$

### Příklad 9.

Dokažte, pro  $n$ -prvkovou množinu se počet jejích podmnožin sudé velikosti rovná počtu podmnožin liché velikosti.