Matematická analýza III NMAI055

Dušan Pokorný

1 Riemannův integrál ve více dimenzích

Již víme, jak se Riemannův integrál aplikuje v jedné dimenzi. Vezme se horní a dolní součet, ty se k sobě přibližují. Jak se to ale chová ve více dimenzích? Potřebujeme vědět, co vlastně jsou například intervaly nebo součty.

Definice 1.1. Množinu v $\mathbb{R}^d$ nazveme *intervalem* (boxem), pokud je ve tvaru $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ pro $a_i \leq b_i$, tedy pokud to je kartézský součin více intervalů.

Integrovat vždy budeme pouze na boxech. Abychom to mohli provést, potřebujeme vědět, jak na těchto boxech vypadá dělení.

Definice 1.2. Mějme I box v $\mathbb{R}^d$. *Dělení* I nazveme množinu $D = \{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d | I_i \in D_i\}$, kde D_i je dělení intervalu $[a_i, b_i]$.
Budeme zapisovat $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_d$.

Poznámka. Dělení intervalu nadefinujeme trochu jinak, a to jako $D = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]\}$. Potom $I \in D$ myslíme rozdělený podinterval z dělení.

Toto dělení nám v podstatě box rozdělí na mřížku menších boxů, podobně jako dělení intervalu nám jej rozdělilo na sousedící podintervaly.

Definice 1.3. Dělení $\overline{D} = \overline{D_1} \times \cdots \times \overline{D_d}$ nazveme *zjemněním* dělení $D = D_1 \times \cdots \times D_d$, pokud $\overline{D_i}$ je zjemněním D_i pro $i = 1, \ldots, d$.

Pozorování. *Pro $D, \overline{D} \in \mathcal{D}(I)$ (množina všech dělení intervalu) vždy existuje společné zjemnění (po složkách).*

Ve více dimenzích místo délky intervalu budeme používat pro velikost boxu jejich objem, tedy součin délek jednotlivých složek. Díky tomu potom můžeme zobecnit i normu dělení.

Definice 1.4. Mějme I box v $\mathbb{R}^d$ takový, že $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. Potom *objem (velikost)* boxu $|I|$ definujeme jako $|I| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$.

Definice 1.5. Norma dělení $D = D_1 \times \cdots \times D_d$, značené jako $\nu(D)$ je definovaná jako $\max \nu(D_i)$ pro $i = 1, \ldots, d$.

Nyní máme již vše potřebné k tomu, abychom mohli Riemannův integrál zobecnit do více dimenzí.

Definice 1.6. Mějme I box v $\mathbb{R}^d$ a funkci f omezenou na I. Dále mějme dělení $D \in \mathcal{D}(I)$. Potom:

$$\textit{Dolní součet je} \quad s(f, D) = \sum_{J \in D} |J| \cdot \inf_{x \in J} f(x).$$

$$\textit{Horní součet je} \quad S(f, D) = \sum_{J \in D} |J| \cdot \sup_{x \in J} f(x).$$

Definice 1.7. Mějme I box v $\mathbb{R}^d$ a funkci f omezenou na I. Potom Riemannův integrál definujeme jako:

$$\underline{\int_I} f(x) \, \mathrm{dx} = \sup_{D \in \mathcal{D}(I)} s(f, D) \ldots \textit{dolní integrál}$$

$$\overline{\int_I} f(x) \, \mathrm{dx} = \inf_{D \in \mathcal{D}(I)} S(f, D) \ldots \textit{horní integrál}$$

Poznámka. Dolní integrál funkce f je vždy menší, nebo roven jejímu hornímu integrálu. Chová se stejně jako v jedné dimenzi.

Věta. *Pro funkci f a dělení $D, D' \in \mathcal{D}(I)$ platí $s(f, D) \leq S(f, D')$.*

Důkaz. Obdobně jako v jednorozměrném případě uvážíme společné zjemnění D''. Platí $s(f,D) \leq s(f,D'') \leq S(f,D'') \leq S(f,D')$. $\square$

Definice 1.8. Pokud platí, že $\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f = K$, říkáme, že f je Riemannovsky integrovatelná na I, společnou hodnotu K nazveme *Riemannovým integrálem* f přes I, značíme $\int_I f(x)\,dx = K$.

Poznámka. Symbol $\mathcal{R}(I)$ definujeme jako množinu všech funkcí f na I Riemannovsky integrovatelných.

Co umíme říct o $\mathcal{R}(I)$?

Věta 1.1. *Mějme $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Potom platí následující:*

- $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$ *pro* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Navíc* $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.
- $\max(f,g) \in \mathcal{R}(I)$.
- $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$.

Důkaz. Důkaz je analogický k variantě z jedné dimenze. $\square$

Ve více dimenzích nemáme žádnou pěknou ekvivalenci k monotónním funkcím a nemáme proto větu z minulého semestru tvrdící, že všechny omezené monotónní funkce jsou integrovatelné. Následující lemma je nicméně opět analogií k odpovídajícímu lemmatu z minulého semestru.

Lemma 1.1 (Nutná a postačující podmínka pro $f \in \mathcal{R}(I)$)**.** *Funkce* $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D \in \mathcal{D}(I) : S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.

Důkaz.

„$\Rightarrow$“ $f \in \mathcal{R}(I)$. Potom víme, že $A = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f = B$, najdeme $D, D' \in \mathcal{D}(I)$, že platí $S(f,D) - B < \frac{\varepsilon}{2}$ a $A - s(f,D') < \frac{\varepsilon}{2}$. Nyní si najdeme společné dělení $\overline{D}$. Potom víme, že $S(f,\overline{D}) - B < \frac{\varepsilon}{2}$ a $A - s(f,\overline{D}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sečtením těchto rovnic dostaneme $S(f,\overline{D}) - s(f,\overline{D}) < \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“ Označme $A = \underline{\int}_I f$. Víme, že pro všechna ε máme dělení takové, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Protože $s(f,D) \leq \underline{\int}_I f$, máme i $S(f,D) - \underline{\int}_I f < \varepsilon$. Tím pádem infimum z výrazů $S(f,D)$ musí být menší rovno dolnímu integrálu z f, menší být ale nemůže, a proto $\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$. $\square$

1.1 Nulové množiny

Definice 1.9. Množinu $A \subseteq \mathbb{R}^d$ nazveme *nulovou*, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists I_1, I_2, \ldots$ boxy takové, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ a zároveň $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$.

Jde tedy o to, že množinu pokryjeme spočetně mnoha boxy takovými, že jejich celkový objem se blíží k nule.

Věta 1.2. *O nulových množinách můžeme říct následující:*

1. *Jednobodová množina je nulová.*
2. *Nedegenerované boxy, tedy $a_i < b_i, i = 1, \ldots, d$ nejsou nulové.*
3. *Hranice boxu a degenerované boxy jsou nulové.*

Důkaz. Ukážeme vlastnosti:

1. Pro jakýkoliv ε zvolíme box $[x_i - \varepsilon/2, x_i + \varepsilon/2]^d$.
2. Tento box má již nenulový objem, jakékoliv boxy jej pokrývající budou mít celkem alespoň tento objem.
3. Hranici boxu můžeme pokrýt konečným počtem boxů typu $I = [a_1 - \varepsilon/2, a_1 + \varepsilon/2] \times [a_2 - \varepsilon/2, b_2 + \varepsilon/2]$. Jejich objemy jdou k nule pro $\varepsilon \to 0$.

$\square$

Věta 1.3. *Mějme nulové množiny $A_1, A_2, \ldots$. Potom $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je nulová množina.*

Důkaz. Víme, že A_1 je nulová, potom najdu boxy I_i^1, že $A_1 \subseteq \bigcup I_i^1, \sum |I_i^1| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Dále víme, že A_2 je také nulová, tedy $A_2 \subseteq \bigcup I_i^2, \sum |I_i^2| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Takto postupujeme pro každou množinu, kde $A_n \subseteq \bigcup I_i^n, \sum |I_i^n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Potom $\sum_j \sum_i |I_i^j| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, což platí z konvergence nekonečné řady. $\square$

K čemu nám ale tyto nulové podmnožiny jsou?

Věta 1.4 (Lebesgueova)**.** *Mějme $f : I \to \mathbb{R}$ omezená na boxu I. Potom $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow$ množina bodů nespojitosti $A(f)$ je nulová.*

Poznámka. Tato věta implikuje $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow f + g, f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$. Dále když máme box $I = J \cup J'$, kde J, J' jsou boxy s disjunktními vnitřky, potom $\int_I f = \int_J f + \int_{J'} f$.

Náznak důkazu věty. Nejprve si nadefinujeme značení $\operatorname{osc}(f, A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$ pro $A \subseteq I$. Kromě toho si nadefinujeme $\operatorname{osc}(f, x) = \lim_{\rho \to 0} \sup \operatorname{osc}(f, B(x, \rho) \cap I)$.

Z toho platí, že f je v x spojitá, když $\operatorname{osc}(x) = 0$. Nechť $A_n(f) = \{x \in I : \operatorname{osc}(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$. Z toho dostáváme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n(f) = A(f)$.

Dokažme tedy „$\Rightarrow$“, a to sporem. Víme, že $f \in \mathcal{R}(I)$. Stačí ukázat, že $A_n(f)$ je nulová pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme tedy, že A_n není nulová. Zvolíme si dělení $D \in \mathcal{D}(I)$ a označme si $\mathcal{I} = \{I \in D : A_n(f) \cap I^0 \neq \emptyset\}$. Množina $\mathcal{I}$ je tedy systém boxů pokrývajících $A_n(f)$. Z toho tedy $\exists \alpha > 0$ nezávislá na $D : \sum_{I \in \mathcal{I}} |I| > \alpha$.

Vezmeme si $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{I \in D} \operatorname{osc}(f(I)) \cdot |I| \geq \sum_{I \in \mathcal{I}} \operatorname{osc}(f, I) \cdot |I| \geq \frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{I}} |I| > \frac{\alpha}{n}$. Pokud tedy a_n není nulová, potom f není integrovatelná.

Nyní „$\Leftarrow$“. $A(f)$ je nulová, potom $f \in \mathcal{R}(I)$. Všimněme si, že $A_n(f)$ je uzavřená (a tedy omezená), tedy je i kompaktní. Proto $\forall \varepsilon > 0\ \exists I_1, \dots : \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^0 \supseteq A_n(f) : \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$. Tedy máme systém otevřených množin, který pokrývá kompaktní množinu. Proto existuje pokrytí konečně mnoha boxy $I_1, \dots, I_N$, které jsou nulové.

Existuje $D \in \mathcal{D}(I)$ takové, že $\exists \mathcal{I} \subseteq D : \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. Nyní máme systém boxů, který pokrývá $A_n(f)$ a tedy $\sum_{I \in \mathcal{I}} |I| < \varepsilon$.

Nyní si vezmeme množinu $K = I \setminus \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I\right) \supseteq A_n(f))^0$. Tato množina je omezená a uzavřená, a tedy kompaktní, $\operatorname{dist}(K, A_n(f)) > 0$. V každém bodě K je oscilace dostatečně malá. Proto $\exists \rho > 0$ ke každému $x \in K$ takové, že $\operatorname{osc}(f, B(x, \rho) \cap I) < \frac{1}{n}$.

Dělení D si více zjemníme, aby $\operatorname{osc}(f, I) < \frac{1}{n}$. Když $I \in D$, $I \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$. Nyní můžeme říct, že $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{J \in D} \operatorname{osc}(f, J)|J| = \sum_{J \in \mathcal{I}} \operatorname{osc}(f, J)|J| + \sum_{J \notin \mathcal{I}} \operatorname{osc}(f, J)|J| \leq \operatorname{osc}(f, I) \sum_{I \in \mathcal{I}} |I|_{<\varepsilon} + |I| \frac{1}{n}$. □

Lemma 1.2. *$f \in \mathcal{R}(I)$, $\int_I f = 0$, $f \geq 0 \Rightarrow \{f > 0\}$ je nulová.*

Důkaz. Chceme, že pokud $x \in \{f > 0\}$, potom $x \in A(f)$ (množina bodů nespojitosi f). Pokud je $f(x) > 0$ a $x \notin A(f)$, potom $\exists \delta : f(y) \geq \frac{f(x)}{2}$ pro $\forall y \in B(x, \delta) \cap I$. Potom existuje nedegenerovaný $J \subseteq B(x, \delta) \cap I : f \geq \frac{f(x)}{2}$ na J, tedy $\int_J f \geq \frac{f(x)}{2} \cdot |J| > 0$, což je spor.

Tedy $\{f > 0\} \subseteq A(f)$, ta je ale nulová z Lebesguovy věty. □

Lemma 1.3. *Mějme f omezenou na nedegenerovaném boxu I, kde $I = J \times J'$ pro J, J' boxy. Potom*

$$\underline{\int_I} f \leq \underline{\int_{J'}} \left(\underline{\int_J} f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \leq \overline{\int_{J'}} \left(\overline{\int_J} f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \leq \overline{\int_I} f.$$

Důkaz. Mějme $D \in \mathcal{D}(I)$ takový, že $D = D_1 \times D_2$ pro $D_1 \in \mathcal{D}(J), D_2 \in \mathcal{D}(J')$. Mějme $A \in D_1$, z toho $I_A = \{A \times B : B \in D_2\} \subseteq D$. Podobně mějme $B \in D_2$, kde $I^B = \{A \times B : A \in D_1\} \subseteq D$.

Označme si $F_A^B = \sup_{x \in A \times B} f(x)$, podobně $f_A^B = \inf_{x \in A \times B} f(x)$. Jestliže si vezmeme $(x, y) \in A \times B$, potom $f_A^B \leq f(x, y) \leq F_A^B$. Zafixujme si $y \in B$. Potom $f_A^B |A| \leq \underline{\int}_A f(x, y) \leq \overline{\int}_A f(x, y) \leq F_A^B |A|$.

To tedy znamená, že $f_A^B |A| \cdot |B| \leq \underline{\int}_B \left(\underline{\int}_A f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \leq \overline{\int}_B \left(\overline{\int}_A f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \leq F_A^B |A| \cdot |B|$.

Nyní si vezmeme sumu přes vše: $s(f, D) = \sum_{A \in D_1, B \in D_2} f_A^B |A| \cdot |B| \leq \sum_{A \in D_1, B \in D_2} \underline{\int}_B \left(\underline{\int}_A f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \leq \sum_{A \in D_1, B \in D_2} \overline{\int}_B \left(\overline{\int}_A f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \leq \sum_{A \in D_1, B \in D_2} F_A^B |A| \cdot |B| = S(f, D)$.

Pokračujme dál… $\sum_{A \in D_1} \sum_{B \in D_2} \underline{\int}_B \left(\underline{\int}_A f \right) = \underline{\int}_{J'} \left(\underline{\int}_J f \right)$. Pro horní integrál analogicky. Nerovnosti vyplývají. □

Věta 1.5 (Fubini)**.** *Nechť $f \in \mathcal{R}(I \times J)$, potom*

$$\int_{I \times J} f = \int_J \left(\underline{\int_I} f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} = \int_J \left(\overline{\int_I} f(x, y)\, \mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}.$$

Speciálně $\underline{\int}_I f(x, y)\, \mathrm{dx} = \overline{\int}_I f(x, y)\, \mathrm{dx}$ pro všechna $y \in J$ až na nulovou množinu. A tedy $y \to \int f(x, y)\, \mathrm{dx}$ je definovaná až na nulovou množinu.

Poznámka. Ve Fubiniho větě i v lemmatu můžeme přehodit pořadí integrace.

Důkaz. Podle lemmatu máme $\int_{I\times J} f \le \underline{\int}_J \left(\underline{\int}_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\right) \mathrm{dy} \le \underline{\int}_J \left(\overline{\int}_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\right) \mathrm{dy} \le \overline{\int}_J \left(\overline{\int}_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\right) \mathrm{dy} \le \int_{I\times J} f$. Dostáváme rovnost.

Zavedeme si funkci $y \to \overline{\int} f(x,y) \in \mathcal{R}(J)$ a platí $\int_J \left(\overline{\int}_I f\right) = \int_{I\times J} f$. Podobně můžeme zavést y jako dolní integrál a dostaneme stejné rovnosti.

Tedy funkce $\phi : y \to \overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f \in \mathcal{R}(J)$. Dále platí $\int_I \phi = 0$. Protože $\overline{\int}_I f \ge \underline{\int}_I$, máme $\phi(y) \ge 0$. Tedy podle lemmatu je množina $\{y \in J : \phi(y) > 0\}$ nulová.

A tedy $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ až na nulovou množinu. □

Definice 1.10. Mějme $E \subseteq \mathbb{R}^d$ omezenou, ∂E nulovou a $f : E \to \mathbb{R}$ omezenou, potom definujeme

$$\int\limits_E f = \int\limits_I F$$

kde I je nějaký box obsahující E a $F(x) = f(x)$ pro $x \in E$, $F(x) = 0$ pro $x \in I \setminus E$, pokud platí $F \in \mathcal{R}(I)$.

Poznámka. Speciálně $f \in \mathcal{R}(I), E \subseteq I, \partial E$ nulová, potom $\int_E f$ existuje a je roven $\int_I f\chi_E$, kde $\chi_E(x) = 1$ pro $x \in E$, 0 jinak.

Důkaz. Víme, že $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow A(f)$ je nulová. Když $x \in E^0$, potom $f\chi_E = f$ na okolí x a tedy $f\chi_E$ je spojitá právě, když f je spojitá v x.

Když $x \in (I \setminus E)^0$, potom $f\chi_E = 0$ na okolí x a je také spojitá v x.

Tedy $A(f\chi_E) \subseteq A(f) \cup \nabla E$. O $A(f)$ víme, že je nulová a podle předpokladu i ∂E je nulová. Proto i $A(f\chi_E)$ je nulová a $f\chi_E \in \mathcal{R}(I)$. □

Definice 1.11. Definujme objem množiny E jako $\mathrm{Vol}(E) = \int_E 1$. (protože $A(\chi_E) \subseteq \nabla E$ a ∂E je nulová)

Definice 1.12. Označme pro $E \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : \pi_1 E = \{x \in \mathbb{R}^k : \exists (x,y) \in E\}, \pi_2 E = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists (x,y) \in E\}$.

Dále pro $x \in \mathbb{R}^k$ definujme řez $E^x = \{y : (x,y) \in E\}$, pro $y \in \mathbb{R}^m$ definujme $E^y = \{x : (x,y) \in E\}$.

Věta 1.6 (Obecnější Fubiniho)**.** *Mějme $E \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ omezenou, ∂E nulovou a funkci $f : E \to \mathbb{R}$ omezenou a $\int_E f$ existuje. Potom*

$$\int\limits_E f = \int\limits_{\pi_1 E} \left(\underline{\int\limits_{E^x}} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int\limits_{\pi_1 E} \left(\overline{\int\limits_{E^x}} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int\limits_{\pi_2 E} \left(\underline{\int\limits_{E^y}} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} = \int\limits_{\pi_2 E} \left(\overline{\int\limits_{E^y}} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}.$$

Speciálně $\int_{E^x} f(x,y)\,\mathrm{dx}$ a $\int_{E^y} f(x,y)\,\mathrm{dy}$ existují až na nulové množiny.

1.2 Věta o substituci

Definice 1.13. Mějme $U \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřenou, $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ zobrazení. Řekněme, že φ je *regulární*, pokud platí:

1. φ je spojité diferencovatelné na U, $\varphi \in C^1(U)$.

2. φ je prosté.

3. Matice $D\varphi(x)$ má plnou hodnost pro všechna $x \in U$.

Označíme $J\varphi(x) = \det D\varphi(x), x \in U$.

Věta 1.7 (o substituci)**.** *Mějme $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ∂A nulovou, $\phi : A \to \mathbb{R}^d$ regulární na A^0. Dále mějme $f : A \to \mathbb{R}$ omezenou. Potom*

$$\int\limits_{\varphi(A)} f = \int\limits_A f \circ \varphi \cdot |J\varphi|$$

pokud oba integrály existují.

2 Analýza v komplexním oboru

Komplexní čísla $\mathbb{C}$ si můžeme představit jako $\mathbb{R}^2$. Na $\mathbb{R}^2$ máme definované sčítání a násobení skalárem. Toto je však stále jen vektorový prostor, my bychom chtěli těleso. Potřebujeme tedy operaci násobení.

Zaveďme si $i^2 = -1$ a potom komplexní číslo $z = x + iy\ x, y \in \mathbb{R}$. Díky této rovnosti můžeme zavést násobení: $(x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$.

Poznámka. Díky komutativitě normálního násobení na $\mathbb{R}$ je násobení na $\mathbb{C}$ také komutativní.

Když je $z = x + iy$ komplexní číslo, potom $\overline{z} = x - iy$ jeho komplexně sdružené číslo. Potom $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Z toho můžeme definovat $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Inverzní prvek k $x + yi$ existuje a rovná se $\frac{1}{x+yi} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Poznámka. Na $\mathbb{C}$ používáme metriku zděděnou z $\mathbb{R}^2$. Díky tomu máme definované limity. Konvergence komplexního čísla znamená tedy konvergence reálné i imaginární části.

Limitu $\lim_{z\to z_0} f(z)$ definujeme jako v metrickém prostoru $\mathbb{R}^2$.

Když máme funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, můžeme ji také napsat jako $f = (u, v)\ u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tedy po složkách $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Z těchto vlastností můžeme odvodit $\lim_{z\to z_0} f(z) = a + ib \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} u(z) = a \wedge \lim_{z\to z_0} v(z) = b$.

Poznámka. Pro tento pojem limity platí pravidla pro aritmetiku limit, jak ji známe z reálného oboru.

Definice 2.1. Mějme f definovanou na okolí $z \in \mathbb{C}$, definujeme derivaci f v bodě z jako

$$f'(z) = \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Věta 2.1. *Pokud $f'(z)$ existuje, potom je f spojitá v z.*

Důkaz. $\lim_{w\to z} f(w) - f(z) = \lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \cdot (w - z) = \lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \cdot \lim_{w\to z}(w - z) = f'(z) \cdot 0.$ □

Věta 2.2. *Nechť $f' = 0$ na $\mathbb{C}$, potom $f = c$ je konstantní funkce, $c \in \mathbb{C}$.*

Poznámka. Tato věta platí obecněji, $\mathbb{C}$ můžeme nahradit souvislou otevřenou podmnožinou $\mathbb{C}$.

Důkaz. Víme, že $\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = 0$. Rozepišme $f(z) = u(z) + iv(z)$. Potom $\lim_{w\to z} \frac{u(w)-u(z)}{w-z} = 0$ a zároveň $\lim_{w\to z} \frac{v(w)-v(z)}{w-z}$.

Když si zvolíme pro $z = x + iy$ speciální tvar $w = (x + t) + iy$, $\lim_{t\to 0} \frac{u(x+t,y)-u(x,iy)}{t} = 0$. Analogicky pro $w = x + i(y + t)$ a v. To znamená, že parciální derivace u i v jsou nulové.

Nyní chceme ukázat, že $f(z) = f(0)$. Víme, že u i v jsou konstantní na přímkách rovnoběžných s osami. A tedy totéž platí i pro f. Tedy $f(0) = f(x) = f(x + iy)$. □

Zatím se zdá, že se $\mathbb{C}$ chová dost podobně jako $\mathbb{R}^2$. Komplexní derivace má však mnohem silnější vlastnosti. Podívejme se na $\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ a použijme $f = u + iv$. Získáme

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w\to z} \frac{u(w) - u(z)}{w - z} + i \lim_{w\to z} \frac{v(w) - v(z)}{w - z}.$$

Teď uvažme pouze úsečky rovnoběžné s osami. Dostáváme:

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x + t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x + t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x, y + t) - u(x, y)}{it} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(x, y + t) - v(x, y)}{it} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Z tohoto dostáváme, že $\frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$. Tedy po složkách $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z)$ a $\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$. Tyto rovnosti se nazývají *Cauchy-Riemannovy podmínky.*

Definice 2.2. Mějme $f : D \to \mathbb{C}$, kde $D \subseteq \mathbb{C}$ otevřená. Tuto funkci nazveme *holomorfní* na D, pokud f' existuje na D.

Holomorfní funkce jsou neskutečně pěkné a kupříkladu platí, že pokud je funkce holomorfní, existují všechny její derivace. Předpokládejme nyní, že f je holomorfní na D. Potom u i v mají všechny parciální derivace druhého řádu spojité. Tedy $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z)$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(z) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z)$. Z toho dostáváme, že $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$. Obdobně $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \Delta v = 0$.

Definice 2.3. Mějme $h : U \to \mathbb{R}$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Funkce h se nazývá harmonická, pokud $\Delta h = 0$ na celém U.

Pokud $f = u + iv$ je holomorfní na $d \subseteq \mathbb{C}$, jsou u i v harmonické.

Předpokládejme nyní, že $\nabla u(x_0, y_0), \nabla v(x_0, y_0) \neq 0$. Nyní si vezměme úrovňové množiny $M = \{(x, y) : u(x, y) = u(x_0, y_0)\}$ a $K = \{(x, y) : v(x, y) = v(x_0, y_0)\}$.

Dále mějme diferencovatelné křivky $\gamma : t \to (\gamma_1(y), \gamma_2(y)), \gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, které poté popisují křivku parametricky, pro tuto křivku taky platí $B((x_0, y_0), \rho) \cap M = \langle\gamma\rangle \cup B((x_0, y_0), \rho)$. Analogicky si vezměme $\beta : s \to (\beta_1(s), \beta_2(s)), \beta(s_0) = (x_0, y_0)$.

Pro tyto křivky potom platí, že $u(X_0, y_0) = u \circ \gamma(t)$ na okolí t_0 ,stejně tak $v(x_0, y_0) = v \circ \beta(s))$ na okolí s_0. Z toho tedy vyplývá, že $0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \circ \gamma(t), \frac{\partial u}{\partial y} \circ \gamma(t)\right) (\gamma_1'(t), \gamma_2(t))^T$, analogicky pro v, β, s.

Za důsledek dostáváme díky tomu, že $\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ to, že $\gamma' \cdot \beta' = 0$.

Můžeme tedy přejít na nový systém souřadnic. $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, tedy $u = x^2 - y^2$ a $v = 2xy$.

Dále se z vlastností holomorfismu podívejme na totální diferenciál:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

právě, když si řekneme, že $\alpha = \arccos(A)$. Z determinantu víme, že $A^2 + B^2 = 1$. Tedy $A = \cos\alpha$ a $B = \pm\sin\alpha$. Dále vidíme, že totální diferenciál je rotace.

Věta 2.3. *Mějme $f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$, které se rovná $f = u + iv$ a bod $z = x + iy \in U$. Nechť u i v mají totální diferenciál v bodě (x, y) a splňují C-R podmínky. Potom $f'(z)$ existuje.*

Důkaz. u má totální diferenciál, takže

$$u(x + s, y + t) = u(x, y) + \nabla u(x, y) \cdot (s, t) + \varphi(s, t) \cdot |(s, t)|.$$

Přitom pro $(s, t) \to 0$ jde $\varphi \to 0$. Stejně tak

$$v(x + s, y + t) = v(x, y) + \nabla v(x + y) \cdot (s, t) + \psi(s, t) \cdot |(s, t)|$$

a $\psi \to 0$ pro $(s, t) \to 0$. Nechť dále $o = \varphi(s, t)|(s, t)| + \psi(s, t)|(s, t)|$.

Chceme říct, že f má derivaci. Tedy je potřeba spočítat limitu. Vyjádříme si $w = x + s + i(y + t)$, zatneme zuby a dosadíme.

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} &= \lim_{|(s,t)\to 0|} \frac{f(x + s + i(y + t)) - f(x + iy)}{s + it} = \\
&= \lim_{|(s,t)|\to 0} \frac{u(x + s, y + t) + iv(x + s, y + t) - u(x, y) - iv(x, y)}{s + it} = \\
&= \frac{u(x + s, y + t) - u(x, y) + i(v(x + s, y + t) - v(x, y))}{s + it} =
\end{aligned}$$

teď použijeme existenci totálních diferenciálů u a v:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{|(s,t)|\to 0} \frac{\nabla u(x, y) \cdot (s, t) + i\nabla v(x, y) \cdot (s, t) + o}{s + it} = \\
&= \lim_{|(s,t)|\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t + o}{s + it} =
\end{aligned}$$

a nakonec využijeme C-R podmínky:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{|(s,t)|\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cdot (s + it) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \cdot (it + s) + o}{s + it} \\
&= \lim_{|(s,t)|\to 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\right)(s + it) + o}{s + it} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \lim(\varphi(s, t) + \psi(s, t))\frac{|s + it|}{s + it} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).
\end{aligned}$$

□

2.1 Mocninné řady v komplexním oboru

Mějme řadu $s_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$. Pokud $\lim_{N\to\infty} s_n = S \in \mathbb{C}$, potom říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje (má součet S).

Definice 2.4. Řekněme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje *absolutně*, pokud $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Lemma 2.1. *Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje absolutně, potom konverguje.*

Důkaz. Mějme $k \geq l$, potom $|s_k - s_l| = \left|\sum_{n=l+1}^{k} c_n\right|$. Podle trojúhelníkové nerovnosti potom získáme vztah $\left|\sum_{n=l+1}^{k} c_n\right| \leq \sum_{n=l+1}^{k} |c_n| \leq \sum_{n=l+1}^{\infty} |c_n|$.

Víme, že $|c_n|$ konverguje, takže $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 : \forall m \geq m_0 \sum_{n=m}^{\infty} |c_n| < \varepsilon$. To znamená, že c_n je Cauchyovská a proto konverguje. □

Lemma 2.2. *Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje, potom $|c_n| \to 0$ pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Triviálně, $|s_l - s_{l-1}| = |c_l|$. □

Definice 2.5. Výraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ nazveme (formální) mocninnou řadou se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

$R = \sup\{|z - z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konverguje}\}$ nazveme *poloměrem konvergence* řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Lemma 2.3. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje a nechť $|w-z_0| < |z-z_0|$. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ konverguje absolutně.*

Důkaz. Jelikož $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje, potom $|a_n(z-z_0)^n| = |a_n| \cdot |z-z_0|^n \to 0$. Tedy $\exists M : \forall n \ |a_n| \cdot |z-z_0|^n \leq M$, posloupnost je omezená.

Vyjádříme si tedy $|a_k| \cdot |w-z_0|^n = |a_k| \cdot \frac{|w-z_0|^n}{|z-z_0|^n} \cdot |z-z_0|^n$. Protože $|w-z_0| < |z-z_0|$, víme, že $r = \frac{|w-z_0|}{|z-z_0|} < 1$.

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||w-z_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n \left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} Mr^n < \infty$. □

Důsledek 2.1. *Je-li R poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, potom tato řada konverguje absolutně pro každé z splňující $|z-z_0| < R$.*

Důkaz. Zvolíme si $|z-z_0| < R = \sup\{|w-z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} \text{ konverguje}\}$, tedy $\exists w : |w-z_0| > |z-z_0|$ a odpovídající řada konverguje. Podle lemmatu 2.3 konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolutně. □

Když si definujeme funkci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, je dobře definovaná na $U(z_0, R)$ (otevřený kruh se středem v z_0 a poloměrem R).

Nyní již víme, jak je poloměr R definovaný formálně, jak jej ale spočítat? Z předchozích semestrů známe vzorečky pro kontrolu konvergence řady, například podílové a odmocninové kritérium. Nyní si ukážeme vzorečky pro výpočet R:

1. $R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$

2. $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ MLPSS

Důkaz.

1. Víme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje, pokud $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} < 1$ a dále diverguje, pokud $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} > 1$.

   Nyní $1 > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = |z-z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

   Pokud $|z-z_0| < \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje a tedy $R \geq L$. Pro divergenci analogicky s prohozenou nerovností a tedy $R \leq L$. Spojíme nerovnosti a dostáváme, že $R = L$.

2. Víme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje, pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||z-z_0|^{n+1}}{|a_n||z-z_0|^n} < 1$. Dále víme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverguje, když $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||z-z_0|^{n+1}}{|a_n||z-z_0|^n} > 1$.

   Nyní $1 > \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||z-z_0|^{n+1}}{|a_n||z-z_0|^n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

   Pokud $|z-z_0| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = L$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje a tedy $R \geq L$. Pro divergenci analogicky s prohozenou nerovností a tedy $R \leq L$. Spojíme nerovnosti a dostáváme, že $R = L$. □

Nyní si ukážeme, jak můžeme s řadami manipulovat a počítat je.

Lemma 2.4. *Řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence.*

Důkaz. Pro tyto dvě řady platí $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \frac{1}{R_2}$ a $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_1}$. Dále $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \sqrt[n-1]{n} = 1$.

Pak si stačí jen všimnout, že $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n-1]{n} \sqrt[n-1]{|a_n|}$, tedy i poloměry R_1 a R_2 jsou stejné. □

Lemma 2.5. *Mějme funkce $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ s poloměrem konvergence R. Potom $f'(z) = g(z)$ na $U(z_0, R)$.*

Důkaz. Nechť BÚNO $z_0 = 0$.

Myšlenka je, že výraz $\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ odhadneme výrazem $C(w-z)$, který jde v limitě $w \to z$ do nuly. Je to docela trikové, protože tam jsou nekonečné sumy, celou dobu tedy budeme manipulovat jen s konečnými sumami, dokud z nich nevytkneme, co chceme. Pak to odhadneme, pošleme $N \to \infty$ a následně $w \to z$.

Nechť $|w|, |z| \le r < R$. Budeme využívat identitu $(w-z)^k = (w-z)\sum_{j=0}^{k-1} w^j z^{k-1-j}$.

$$\frac{\sum_{n=0}^{N} a_n w^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n}{w-z} - \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} w^j z^{n-1-j} \right) - nz^{n-1} \right) =$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{j=1}^{n-1} z^{n-1-j}(w^j - z^j) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{j=1}^{n-1} z^{n-1-j}(w-z) \sum_{l=0}^{j-1} w^l z^{1-1-l} = (w-z) \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-1} w^l z^{n-2-l}$$

$(w-z)$ je venku, jdeme odhadnout tu hrůzu za tím (pomocí absolutní hodnoty).

$$\left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z) \right| \le |w-z| \sum_{n=1}^{N} |a_n| \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-1} |w^l||z^{n-2-l}| \le |w-z| \sum_{n=1}^{N} |a_n| \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-1} |r^{n-2}| =$$

$$\frac{|w-z|}{r^2} \sum_{n=1}^{N} |a_n| r^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-1} 1 = \frac{|w-z|}{r^2} \sum_{n=1}^{N} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} r^n \le \frac{|w-z|}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} r^n \le C|w-z|,$$

kde jsme na konci využili konvergence odpovídající řady (lemma 2.4). Tedy $\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = g(z)$. □

Důsledek 2.2. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (z-z_0)^{k-n}$.*

Speciálně $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$, tedy $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ a $a_0 = f(z_0)$.
To znamená, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Taylorovou řadou funkce f.

Použitím lemmatu na řadu $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ dostáváme integrováním $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ člen po členu, platí tedy $F'(z) = f(z)$ a $R_F = R_f$.

Již víme, co se s řadou děje uvnitř kruhu daného poloměrem konvergence. Nyní je však otázka, co můžeme o řadě říct, jestliže z leží na poloměru konvergence, tedy $z = z_0 + R \cdot e^{i\varphi}$.

Věta 2.4 (Abelova)**.** *Nechť řada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Dále mějme $w = z_0 + Re^{i\varphi}$. Předpokládejme navíc, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ konverguje a má součet S. Potom*

$$\lim_{r\to R^-} f(z_0 + re^{i\varphi}) = S.$$

Tato věta funguje, jelikož při limitění se pohybujeme zevnitř kruhu směrem k okraji. Limita je definovaná pouze zleva, jelikož vně kruhu již řada diverguje a nelze ji tedy sečíst.

Pro připomenutí. Cauchyho součin řad říká, že pro dvě absolutně konvergentní řady platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)$$

Důkaz. BÚNO nechť $z_0 = 0$, $R = 1$ a $\varphi = 0$, tedy $w = 1$. (Toto můžeme udělat, protože potom zvolíme $e(ze^{i\varphi})$.)

Vezmeme si řadu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. Chceme $\lim_{t\to 1^-} f(t) = S$.

Dále si vezměme $g(z) = \frac{1}{1-z}$. Potom

$$\frac{f(z)}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n.$$

Nyní $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ a $f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$. Spočítejme S jako jinou geometrickou řadu, speciálně $S = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} S z^n$.

Čili $S - f(z)$ můžeme vyjádřit jako $(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(S-S_n)z^n$. Nyní $|S-f(z)| = |1-z|\,|\sum_{n=0}^{\infty}(S-S_n)z^n|$.

Označme $t_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$, když $n \to \infty$. Máme nyní první část sumy. Druhá část již bude konečná.

Dostáváme tedy $|S-f(z)| \le |1-z| \left|\sum_{n=0}^{M} t_n z^n\right| + |1-z|\sum_{n=M+1}^{\infty}|t_n||z|^n$ pro každé $M \in \mathbb{N}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nyní nalezneme M takové, že pro všechna $n \ge M+1$ platí $|t_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (To je možné, protože $|t_n| \to 0$).

Potom $|1-z|\sum_{n=M+1}^{\infty} \le |1-z|\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=M+1}^{\infty}|z|^n \le \frac{|1-z|}{1-|z|}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$ pro $z \in (0,1)$.

Nechť $C = |\sum_{n=0}^{\infty} t_n|$, zjevně $C \ge |\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n|$ pro $\forall z \in [0,1]$. Nakonec zvolme z tak, aby $|1-z| \le \frac{\varepsilon}{2C}$, potom $|S-f(z)| \le \frac{\varepsilon}{2C}\left|\sum_{n=0}^{M} t_n z^n\right| + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Pro dané ε nejprve zvolíme M, podle něj zvolíme C. Potom pro $z \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{2C}, 1\right)$ platí $|S-f(z)| \le \varepsilon$, tedy $\lim_{z\to 1^-} f(z) = S$. □

2.2 Posloupnosti a řady funkcí

Představme si, že máme $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, kde všechny f_n jsou spojité. Potom můžeme vidět, že:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x^n = 0 & x < 1 \\ \lim_{n\to\infty} x^n = 1 & x = 1 \end{cases}$$

Vidíme tedy, že $f(x)$ je nespojitá, zatímco každá f_n je spojitá. Vidíme tedy, že limita spojitých funkcí může dopadnout nespojitě.

Definice 2.6. Nechť (M,ρ) je metrický prostor a nechť $f_n : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ je posloupnost funkcí. Řekneme, že f_n *konverguje bodově*, pokud existuje $f : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$:

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \ge n_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Řekněme, že $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně*, pokud existuje $f : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \ge n_\varepsilon\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Bodová konvergence se značí $f_n \to f$, stejnoměrná konvergence se značí $f_n \rightrightarrows f$.

Jaký je rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou spojitostí? Bodová konvergence říká, že posloupnost nějakých fixních funkčních bodů konverguje k jinému. Zatímco stejnoměrná konvergence nám říká, že vždy bude celá funkce dostatečně blízko. Jako příklad je posloupnost výše.

Lemma 2.6. *Definujme* $\alpha_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\}$. *Potom* $(f_n \rightrightarrows f) \Leftrightarrow \alpha_n \to 0$.

Důkaz. Dopředná implikace je snadná. Z definice $\forall\varepsilon\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \ge n_\varepsilon\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Víme, že $\sup_{x\in M}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Potom ale $\alpha_n \to 0$.

Nyní zpětná implikace. Víme, že $\alpha_n \to 0$, potom $\forall\varepsilon\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \ge n_\varepsilon\ \forall x \in M : \alpha_n < \varepsilon$. Jelikož $\alpha_n = \sup|f_n(x) - f(x)|$, platí tedy $f_n \rightrightarrows f$. □

Vraťme se k původnímu příkladu. Vidíme, že $f_n \to f$, ale $f_n \not\rightrightarrows f$, jelikož $\alpha_n = \sup\{x^n : x \in [0,1)\} = 1$.

Poznámka. Obdobně definujeme stejnoměrnou konvergenci na množině $A \subseteq M$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na A, pokud $f_n|_A \rightrightarrows f|_A$ v $(A, \rho|_{A\times A})$.

Poznámka. Nechť $\mathcal{B}(M)$ je prostor všech omezených funkcí, $f : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a $f_n, f \in \mathcal{B}(M)$. Potom $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \rho(f_n, f) \to 0$, kde $\rho(f,g) = \sup_{x\in M}|f(x) - g(x)|$ pro $f, g \in \mathcal{B}(M)$.

Tato poznámka nám zavádí metriku na všech omezených funkcích. Vzdálenost dvou funkcí je v podstatě to, jak nejdál od sebe funkce někde jsou.

Tato metrika je také efektivnější pro zjišťování stejnoměrné konvergence, než třeba metrika $\left(\int |f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. U této metriky bychom potřebovali, aby tento integrál existoval.

Definice 2.7. Posloupnost f_n nazveme stejnoměrně Cauchyovskou, pokud:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall x \in M\ \forall n, m \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Lemma 2.7. *Posloupnost f_n je stejnoměrně Cauchyovská, právě když f_n stejnoměrně konverguje.*

Důkaz.

„$\Rightarrow$“ Víme, že $\{f_n(x)\}$ je stejnoměrně Cauchyovská pro každé $x \in M$, a tedy existuje její limita, kterou nazveme $f(x)$. Podle definice tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall x \in M\ \forall n, m \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{9}{10}\varepsilon$. Víme, že existuje limita $f(x)$. Tedy pro $m \to \infty$ dostáváme $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{9}{10}\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$.

„$\Leftarrow$“ $f_n \rightrightarrows f$, dostáváme $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall x \in M\ \forall n \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dále pro $n, m \geq n_\varepsilon$ dostáváme $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Věta 2.5. *Nechť f_n je posloupnost spojitých funkcí a nechť $f_n \rightrightarrows f$. Potom f je spojitá.*

Důkaz. Zvolme si $x \in M$ a ukážeme, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Všimneme si:
$\forall n : |f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$.
Protože $f_n \rightrightarrows f$, můžeme říct $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon\ \forall y \in M\ \forall n \geq n_\varepsilon : |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Zvolme $n \geq n_\varepsilon$. Protože f_n je spojitá, dostaneme $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Tedy $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

Tímto známe nutnou podmínku stejnoměrné konvergence. Nyní si ukážeme postačující podmínku.

Věta 2.6 (Dini). *Mějme (M, ρ) kompaktní metrický prostor a $f_n : M \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$. Nechť platí následující podmínky:*

1. *f_n konverguje bodově k f a tato konvergence je monotónní ($f_n(x) \searrow f(x)$ nebo $f_n(x) \nearrow f(x)$)*
2. *f_n i f jsou spojité*

Potom $f_n \rightrightarrows f$.

Důkaz. BÚNO $f_n(x) \searrow f(x)$. Nechť $\alpha_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = \max\{f_n(x) - f(x) : x \in M\}$. Tedy potom $\forall n\ \exists x_n \in M : \alpha_n = f_n(x_n) - f(x_n)$.

Předpokládejme pro spor, že $\forall n : \alpha_n \geq C > 0$. Tedy $f_n(x_n) - f(x_n) \geq C$. Avšak zároveň $f_m(x_m) \leq f_n(x_m)$ pro $n \leq m$. Z toho vyplývá, že $f_n(x_m) - f(x_m) \geq f_m(x_m) - f(x) \geq C$ pro $m \geq n$.

Podle kompaktnosti M existuje $x \in M$ a vybraná posloupnost $x_{n_k} \to x$. Vezměme si $g_k = f_{n_k}, y_k = x_{n_k}$. Potom $g_k(y_l) - f(y_l) \geq C$ pro $l \geq k$. Tudíž z Heineho věty $g_k(x) - f(x) \geq C$ pro všechna k. Tedy v tomto bodě $f_n(x)$ nekonverguje, což je spor. □

Definice 2.8. Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně, pokud $s_n \rightrightarrows s$ pro nějaké $s : M \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Lemma 2.8 (Nutná podmínka pro konvergenci řad). *Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně, potom $f_n \rightrightarrows 0$.*

Důkaz. Víme, že posloupnost s_n konverguje stejnoměrně, potom s_n stejnoměrně Cauchyovská. Z toho vyplývá speciálně, že $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon\ \forall x\ \forall n \geq n_\varepsilon : |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x)| < \varepsilon$, tedy $f_n \rightrightarrows 0$. □

Věta 2.7 (Wierstrassův M-test). *Mějme $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $\sup_{x \in M} |f_k(x)| \leq \alpha_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$. Potom suma $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně.*

Důkaz. Mějme $t_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$. Ukážeme, že pro $m > n$ je $|s_m(x) - s_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k = t_m - t_n$. Posloupnost t_n je konvergentní, tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall m, n \geq n_\varepsilon : |t_m - t_n| < \varepsilon$. Tedy i $|s_m(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$, čímž jsme ukázali Cauchyho podmínky. □

Důsledek 2.3. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom tato mocninná řada konverguje stejnoměrně na každé množině $B(z_0, r), r < R$.*

Důkaz. Zvolme w, že $|w - z_0| = r$. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(w - z_0)^n$ konverguje absolutně. Nyní stačí použít M-test s $\beta_k = \alpha_k r^k$. □

Poznámka. Důsledek můžeme zformulovat i tak, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R)$.

$f_k(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně, pokud pro každé z existuje $\varepsilon_z > 0$, že $f_k \rightrightarrows$ na $B(z, \varepsilon_z)$.

2.3 Fourierovy řady

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je 2π-periodická ($f(x + 2k\pi) = f(x)$ $k \in \mathbb{Z}$). Takové funkci přiřadíme formální trigonometrický polynom, tedy nekonečnou kombinace sinů, kosinů. Tedy $f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Tato řada bude formální trigonometrická řada funkce f. Koeficienty se potom rovnají:
$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, \mathrm{d}t$
$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, \mathrm{d}t$

Ukážeme, že funkce $\sin(kx)$ a $\cos(kx)$ tvoří ortonormální bázi, tedy Fourierova řada zobrazuje f jako vektor v tomto ortonormálním systému.
Skalární součin u funkcí potom bude možný vyjádřit jako $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$.

Naším cílem bude, aby se funkce f přímo rovnala této trigonometrické řadě.

Definice 2.9. Funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme *po částech spojitou*, pokud existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, že f je spojitá na všech intervalech (x_k, x_{k+1}) $k = 0, \ldots, n-1$ a zároveň existují všechny jednostranné limity f v bodech x_i.

Věta 2.8 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť f je po částech spojitá na $[a, b]$. Potom*

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(t) \sin(pt)\, \mathrm{d}t = 0$$

Důkaz. BÚNO předpokládejme, že je funkce spojitá. (Kdyby nebyla, provedeme důkaz po jednotlivých intervalech dělení.) Dále dodefinujme okrajové body na intervalu jejich jednostrannými limitami.
Označme $I(p) = \int_a^b f(t) \sin(pt)\, \mathrm{d}t$. Použijme substituci $u + \frac{\pi}{p}, \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. Potom $t = a \Rightarrow u = a - \frac{\pi}{p}$, $t = b \Rightarrow u = b - \frac{\pi}{p}$.
Potom $I(p) = \int_{a-\frac{\pi}{p}}^{b-\frac{\pi}{p}} f(u + \frac{\pi}{p}) \sin(pu + \pi)\, \mathrm{d}u = -\int_{a-\frac{\pi}{p}}^{b-\frac{\pi}{p}} f(u + \frac{\pi}{p}) \sin(pu)\, \mathrm{d}u$.
Potom $2I(p) = \int_a^b f(t) \sin(pt)\, \mathrm{d}t - \int_{a-\frac{\pi}{p}}^{b-\frac{\pi}{p}} f(t + \frac{\pi}{p}) \sin(pt)\, \mathrm{d}t$. Toto si rozdělíme na tři integrály:
$2I(p) = \int_{a-\frac{\pi}{p}}^{a} f(t + \frac{\pi}{p}) \sin(pt)\, \mathrm{d}t + \int_{b-\frac{\pi}{p}}^{b} f(t) \sin(pt)\, \mathrm{d}t + \int_a^{b-\frac{\pi}{p}} f(t) - f(t + \frac{\pi}{p})\, \mathrm{d}t$. Nyní ze spojitosti $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Z omezenosti $|f(x)| \leq M$, a tedy $2|I(p)| = \frac{\pi}{p} M + \frac{\pi}{p} M + (b - a)\varepsilon \to 0$, kde $\frac{\pi}{p} < \delta$. ☐

Lemma 2.9. *Řada* $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ *pro* $x \neq 2k\pi$.

Důkaz. Vezmeme si výraz $\sin(\frac{2k+1}{2}x) - \sin(\frac{2k-1}{2}x)$. Využitím součtových vzorců získáme $\sin(kx + \frac{x}{2}) - \sin(kx - \frac{x}{2}) = \sin(kx)\cos(\frac{x}{2}) + \cos(kx)\sin(\frac{x}{2}) - \sin(kx)\cos(\frac{x}{2}) + \cos(kx)\sin(\frac{x}{2}) = 2\cos(kx)\sin(\frac{x}{2})$.
Dostáváme, že $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{2k+1}{2}x) - \sin(\frac{2k-1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x) - \sin(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}$. ☐

Definice 2.10. Výraz $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ označíme $D_n(x)$ a nazveme *Dirichletovým jádrem.*

Lemma 2.10.

1. $D_n(t) = D_n(-t)$
2. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, \mathrm{d}t = 1$

Důkaz. První tvrzení plyne přímo z definice.
Druhé tvrzení získáme přímou integrací. Integrál kosinu je sinus, to je lichá funkce. Suma se tedy navzájem odečte. Zbylá polovina se integruje na π, což se navzájem zkrátí na 1. ☐

Vezměme si $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.
To je ekvivalentní s $\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k(t - x))\, \mathrm{d}t\right)\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t - x)\, \mathrm{d}t$.
Použijme nyní substituci $u = t - x, t = x + u, \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ a dostaneme $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + u) D_n(u)\, \mathrm{d}u$.
Můžeme použít další substituci $-s = u$, pak dostáváme $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - s) D_n(s)\, \mathrm{d}s$.

Definice 2.11. Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme po částech diferencovatelnou, pokud existuje dělení $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ takové, že pro každé $i = 0, \ldots, n-1$ existuje f_i diferencovatelná na $[x_i, x_{i+1}]$ a platí $f_i = f$ na (x_i, x_{i+1}).

Věta 2.9. *f je 2π-periodická a po částech diferencovatelná na $[-\pi, \pi]$, potom $S_n(x) \to \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Víme, že $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_n(u)\,\mathrm{d}u$ a také, že $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) = 1$. Využitím těchto vlastností máme

$$S_n(x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x_+)-f(x_-)}{2} D_n(u)\,\mathrm{d}u = \dots$$

Všimněme si, že tato funkce za integrálem je sudá, jelikož $D_n(u)$ je sudá a $x+u, x-u$ jsou vůči sobě symetrické. Můžeme tedy přepsat integrál na

$$\dots = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+u) - f(x_+) + f(x-u) - f(x_-))D_n(u)\,\mathrm{d}u = \dots$$

Rozšíříme si integrál o u, dosadíme za $D_n(u)$ a rozdělíme jej na dva integrály I_n^+, I_n^-:

$$\dots = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)-f(x_+)}{u}\cdot\frac{u/2}{\sin(u/2)}\cdot\sin\left((n+\frac{1}{2})u\right) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-u)-f(x_-)}{u}\cdot\frac{u/2}{\sin(u/2)}\cdot\sin\left((n+\frac{1}{2})u\right).$$

Nyní využijeme po částech diferencovatelnost, tedy $\psi^+(u) = \frac{f(x+u)-f(x_+)}{u}\cdot\frac{u/2}{\sin(u/2)}$ pro $u \in (0,\pi]$ a $\psi^+(u) = f'(x_+)$ pro $u = 0$. Funkce ψ^+ je po částech spojitá na $[0,\pi]$. Analogicky definujeme ψ^-.

Tedy integrály $I_n^+ + I_n^-$ podle Riemann-Lebesgueneovo lemmatu konvergují do 0, pro $n \to \infty$. □

Poznámka. Ve větě dostáváme jen bodovou konvergenci, stejnoměrná konvergence vyžaduje silnější předpoklady.

Nutně vyžadujeme, aby minimálně byla f spojitá na celém intervalu. Tedy

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{N} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{N} |a_n| + |b_n|$$

a tedy pokud $\sum_{n=1}^{N} |a_n| + |b_n| < \infty$, potom M-test dává stejnoměrnou konvergenci.

Tato podmínka platí například, když je f spojitá a po částech hladká.

Poznámka. Platí následující triviální, ale užitečné rozšíření na $2p$-periodické funkce pro $p > 0$:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{p}t\right)\,\mathrm{d}t$$
$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{p}t\right)\,\mathrm{d}t$$

a pro $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\frac{\pi}{p}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{p}t\right)$ platí analogická tvrzení.

3 Metrické prostory

(Pokračování z MA2) Připomeňme důležité vlastnosti.

Prostor (M,ρ) nazveme úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost v M je konvergentní v M.

Prostor (M,ρ) nazveme kompaktní, pokud z každé posloupnosti můžeme vybrat konvergentní podposloupnost.

Kompaktní prostor je také úplný. Obecně to však naopak neplatí.

Věta 3.1. *Následující podmínky na prostoru (M,ρ) jsou ekvivalentní:*

1. *M je kompaktní*
2. *z každého pokrytí M otevřenými množinami existuje jeho konečné podpokrytí.*

Definice 3.1. $L \subseteq M$ je ε-sítí pokud $M \subseteq \bigcup_{x\in L} B(x,\varepsilon)$. (Pro každý prvek M najdeme prvek L, který je od něj vzdálen nanejvýš ε.)

Definice 3.2. Systém množin $\mathcal{U}$ nazveme pokrytím M, pokud $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \supseteq M$ a otevřeným, pokud všechny množiny v $\mathcal{U}$ jsou otevřené.

Podpokrytí $\mathcal{U}'$ je podpokrytí $\mathcal{U}$, pokud $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ a $\mathcal{U}'$ je pokrytí.

Důkaz. Jednotlivé směry.

$1 \Rightarrow 2$: M je kompaktní, potom $\forall \varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť v M.

Kdyby ne, nechť pro nějaké $\varepsilon > 0$ neexistuje žádná konečná ε-síť. Tedy $\exists x_1 \in M$, pak $\exists x_2 \in M \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Takto budeme pokračovat induktivně pro $\exists X_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$. Potom ale $\{x_i\}$ nemá konvergentní podposloupnost a M není kompaktní, spor.

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $S_n \to \frac{1}{n}$-síť v M. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí M. Buď $\exists n\ \forall x \in S_n\ \exists \mathcal{U} : B(x, \frac{1}{n}) \in U$. Potom existuje konečné podpokrytí $\mathcal{U}$.

Nebo $\forall n\ \exists x_n \in S_n\ \forall U \in \mathcal{U} : B(x, \frac{1}{u}) \setminus U \neq \emptyset$. Potom pro $\{x_n\}$ existuje podposloupnost, která je konvergentní (BÚNO je to přímo x_n). Pak $X_n \to X \in M \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U} : x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \in U$. Zvolíme $n : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ a zároveň $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, potom $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subset U$, což je spor.

$2 \Rightarrow 1$: Pokud máme posloupnost x_n a chceme najít vybranou posloupnost x_{k_k}, která konverguje. Nechť taková podposloupnost neexistuje. Potom platí platí $\forall x \in M\ \exists r_x > 0 : B(x, r_x)$ obsahuje jen konečně mnoho prvků posloupnosti.

Kdykoliv $\forall x \in M\ x \in U(x, r_x)$, potom $U(x, r_x)$ tvoří otevřené pokrytí M. Podle předpokladu existují $y_1, \dots, y_N$ tak, že $\bigcup U(y_i, r_{y_i}) \supseteq M$. To je ale spor, protože pro každé y_i existuje jen konečně mnoho indexů j, že $x_j \in U(y_i, r_{y_i})$. Čímž je porušená nekonečnost $\mathbb{N}$. □

Definice 3.3. Mějme (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$ nazveme hustou v M, pokud $\overline{A} = M$. Jinými slovy, pokud pro každé $x \in M, r > 0$ existuje $a \in A \cap U(x, r)$.

Věta 3.2 (Baire)**.** *Buď (M, ρ) úplný metrický prostor a nechť $G_i, i \in \mathbb{N}$ jsou otevřené a husté v M. Potom $\bigcap G_i$ je hustá v M, a tedy je speciálně neprázdná (pokud je M neprázdný).*

Důkaz. BÚNO nechť M je neprázdný. Vezměme si $x \in M$ a chceme dokázat, že $\forall r > 0\ \exists a \in \bigcap G_i : A \in U(x, r)$.

Budeme konstruovat systém otevřených kuliček $U(x_i, r_i), i \in \mathbb{N}_0$ s následujícími vlastnostmi:

1. $\overline{U(x_i, r_i)} \subseteq U(x_{i-1}, r_{i-1}) \quad i \in \mathbb{N}$ (definujeme $x_0 = i, r_0 = r$)
2. $\overline{U(x_i, r_i)} \subseteq \bigcap_{j=1}^{i} G_j \quad i \in \mathbb{N}$
3. $r_i < \frac{1}{i}$

Kuličky budeme konstruovat indukcí. Využijeme hustotu a otevřenost G_i. $U(x_0, r_0$ již máme, takže stačí jen indukční krok.

Podmínky 1 a 2 platí až po i, chceme najít x_{i+1} a r_{i+1}. Víme, že G_{i+1} je hustá, tedy existuje $x_{i+1} \in \bigcap_{j=1}^{i+1} G_j \cap U(x_i, r_i) = G_{i+1} \cap U(x_i, r_i)$.

Ale protože je G_{i+1} otevřená, existuje $r_{i+1} > 0$, že $\overline{U(x_{i+1}, r_{i+1})} \subseteq G_{i+1} \cap U(x_i, r_i)$. Tím jsme dostali obě podmínky. Třetí podmínka je triviální.

Dokážeme, že x_i je cauchyovská posloupnost. Protože pro $\varepsilon > 0$ najdeme $2r_i < \varepsilon$, dostáváme, že pro $m > n \geq i$ platí $x_m, x_n \in U(x_i, r_i) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_i) + \rho(x_n, x_i) \leq 2r < \varepsilon$.

Protože (M, ρ) je úplný prostor, je x_i konvergentní. Buď $a \in M$ tak, že $x_i \to a$. Chceme ukázat, že $a \in (\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i) \cap U(x, r)$. Jelikož ale podle podmínek 1 a 2 je $x_n \in \overline{U(x_i, r_i)} \subseteq \left(\bigcap_{j=1}^{i} G_j\right) \cap U(x, r)$ kdykoliv $n \geq i$. Potom i a je prvkém této množiny. To znamená, že a je prvkem i nekonečného průniku. □

Důsledek 3.1. *Mějme (M, ρ) neprázdný úplný metrický prostor a $F_i \subseteq M, i \in \mathbb{N}$. Nechť $\bigcup F_i = M$, potom existuje $i \in \mathbb{N}$, že $\overline{F_i}$ má neprázdný vnitřek.*

Důkaz. Sporem. Nechť $\overline{F_i}$ má prázdný vnitřek $\forall i \in \mathbb{N}$. Potom $M \setminus \overline{F_i} = G_i$ je hustá otevřená množina v M. Kdyby G_i nebyla hustá, potom by existovala $U(x, r)$ taková, že $U(x, r) \cap G_i = \emptyset$. Potom ale $U(x, r) \subseteq \overline{F_i}$.

Potom ale podle Baireovy věty je $\bigcap G_i$ je hustý a neprázdný. Tedy $\bigcap M \setminus \overline{F_i} = M \setminus \bigcap \overline{F_i} = \emptyset$, spor. □

Definice 3.4. Mějme (M, ρ) metrický prostor a $\varphi : M \to M$ nazveme kontrakcí, pokud existuje $0 < R < 1$, že $\forall x, y \in m : \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \rho(x, y)$.

Věta 3.3 (Banachova o pevném bodě)**.** *Mějme (M, ρ) neprázdný úplný metrický prostor a $\varphi : M \to M$ kontrakce. Potom existuje právě jedno $x \in M$, že $\varphi(x) = x$.*

Důkaz. Víme, že je M neprázdný, tedy existuje $x \in M$. Definujme $x_0 = x$ a $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Potom $x_n = \varphi^n(x)$ a zároveň je-li $\varphi(x)$ kontrakcí s konstantou R, potom $\rho(\varphi^n(u), \varphi^n(v)) \leq R^n \rho(u, v)$.

Dále pro $n < m$ platí $\rho(x_n, x_m) \leq \sum_{j=n}^{m-1} \rho(x_j, x_{j+1}) = \sum_{j=n}^{m-1} (\varphi^j(x), \varphi^j(\varphi(x))) \leq \sum_{j=n}^{m-1} R^j \rho(x, \varphi(x)) \leq R^n \rho(x, \varphi(x)) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} R^j$. To se ale rovná $R^n \frac{\rho(x, \varphi(x))}{1-R}$.

Tudíž x_n je cauchyovská posloupnost. Víme, že je M úplný, takže $x_n \to x'$. Víme, že φ je kontrakce a tedy spojitá, tedy $x_{n+1} = \varphi(x_n) \to \varphi(x') = x'$. Tedy $\rho(x_n, \varphi(x_n)) \to \rho(x', x') = 0$. Tedy máme existenci pevného bodu.

Jednoznačnost. Pokud $x, y \in M$ a $\varphi(x) = x$ a $\varphi(y) = y$, potom $\rho(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq R\rho(x, y)$. Tedy potom $\rho(x, y) = 0$. □

4 Diferenciální rovnice

Vezměme si rovnici ve tvaru $f'(x) = F(x, f(x))$. Jde o *obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu.* Dále $F : U \to \mathbb{R}$, kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Řešením této rovnice (s počáteční podmínkou (x_0, y_0)) nazveme funkci f definovanou na okolí I bodu x_0, že platí $f'(x) = F(x, f(x))$ pro $x \in I$ a $f(x_0) = y_0$.

Řekněme, že máme nějaký (x_0, y_0) a okolí $I = (x_0 - a, x_0 + a)$, $J = (y_0 - b, y_0 + b)$. Mějme $F : I \times J \to \mathbb{R}$. Budeme po této funkci chtít následující podmínky:

1. Restrikce $x \to F(x, y)$, kde $x \in I$, je spojitá pro $y \in J$
2. Existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro všechna $x \in I, y, \overline{y} \in J$ platí

$$|F(x, y) - F(x, \overline{y})| \leq L|y - \overline{y}|$$

Poznámka. Funkce splňující obě podmínky na $I \times J$ je spojitá na $I \times J$.

Důkaz. Když máme $\varepsilon > 0$ a $(x, y) \in I \times J$, potom $\exists \delta : |x - \overline{x}| < \delta$ taková, že $|F(x, y) - F(\overline{x}, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dále z podmínek víme, že $|F(\overline{x}, y) - F(\overline{x}, \overline{y})| \leq L|y - \overline{y}|$, při zvolení $|y - \overline{y}| < \frac{\varepsilon}{2L} = \overline{\delta}$ dostáváme omezení $< \frac{\varepsilon}{2}$.

Když si položíme $\delta_0 = \min(\delta, \overline{\delta}) > 0$. Pokud $(x, y) - (\overline{x}, \overline{y}) < \delta_0$, dostáváme $|x - \overline{x}| < \delta$ a zároveň $|y - \overline{y}| < \overline{\delta}$, z trojúhelníkové nerovnosti získáváme $|F(x, y) - F(\overline{x}, \overline{y})| \leq |F(x, y) - F(\overline{x}, y)| + |F(\overline{x}, y) - F(\overline{x}, \overline{y})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Speciálně, $M = \max_{(x,y) \in I \times J} |F(x, y)| < \infty$.

S naší diferenciální rovnicí $A : f'(x) = F(x, f(x))$ se pracuje docela nepříjemně. Pojďme si tedy rovnici převést na jinou:

$$B : f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\,\mathrm{d}t$$

Jedná se ale skutečně o ekvivalentní rovnice? Když máme $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)$, potom $G'(x) = g(x)$. Zderivováním dostaneme $f'(x) = F(x, f(x))$ a dále při dosazení x_0 máme $f(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F = y_0$.

Jakákoliv rovnice splňující B tedy splňuje i A.

Podobně, $f'(x) = F(x, f(x)) \to \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\,\mathrm{d}t \to f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\,\mathrm{d}t \to B$.

Jak tedy vidíme, opravdu jsou obě rovnice ekvivalentní.

Lemma 4.1. *Nechť platí podmínky 1 a 2 a nechť $a < \min(\frac{b}{M}, \frac{1}{L})$ kde M je maximum $F(x, f(x))$ na kompaktu $I \times J$ a L je lipschizovská konstanta z 2). Pak existuje právě jedno řešení rovnice $f'(x) = F(x, f(x)), f(x_0) = y_0, x \in I$.*

Důkaz. Vezměme si množinu $\mathcal{C}(I) = X$, dále $\rho(f, g) = \max_{x \in I}(f(x) - g(x))$ pro $f, g \in \mathcal{C}(I)$. Systém (X, ρ) je úplný metrický prostor. Chtěli bychom najít takovou kontrakci, aby pevný bod řešil $A \equiv B$.

Vezmeme si speciální třídu funkcí $\mathcal{C}(I, J)$, tedy všechna $f \in \mathcal{C}(I, J)$, pro která platí $f(I) \subseteq J$. Vidíme, že $\mathcal{C}(I, J) \subseteq \mathcal{C}(I)$ uzavřená: když $f_n \in \mathcal{C}(I, J)$ takové, že $f_n \to_\rho f \in \mathcal{C}(I)$, tak potom pro $x \in I, f_n(x) \in J, f_n(x) \to f(x)$ platí, že $f(x) \in J$.

Tedy pro $Y = \mathcal{C}(I, J)$ a $\rho_x = \rho\,|_{Y \times Y}$ je (Y, ρ_x) úplný metrický prostor.

Nyní stačí najít potřebnou kontrakci $T : Y \to Y$. Definujme $T(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\,\mathrm{d}t$. Je tato funkce opravdu $Y \to Y$?

Pro intervaly $I = (x_0 - a, x_0 + a)$, $J = (y_0 - b, y_0 + b)$ dostáváme, že $\left|T(f)(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq M|x - x_0| \leq a \cdot M$. Chtěli bychom, aby $a \cdot M < b$, což zaručuje podmínka.

Dále $\left|T(f)(x) - T(g)(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} v\right| \leq \int_{x_0}^{x} |F(t, f(t)) - G(t, g(t))|\,\mathrm{d}t$. To díky druhé podmínce umíme omezit shora $\int_{x_0}^{x} L|f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq L \cdot \rho(f, g) \cdot a$. Pro $La < 1$ dostáváme omezení $< \rho(f, g)$.

Naše zobrazení je tedy správná kontrakce a existuje právě jeden pevný bod. □

Jako důsledek dostáváme:

Věta 4.1 (Picardova). *Mějme $F : U \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in U$ kde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená. Dále nechť platí*

1. *Funkce $x \to F(x, y)$ je spojitá pro všechna y*
2. *F je lokálně lipschitzovská v druhé proměnné: $\forall x, y \in I \times J\ \exists \varepsilon > 0, \exists L > 0 : |x - \overline{x}| \leq \varepsilon, |y - \overline{y}| \leq \varepsilon \Rightarrow |F(\overline{x}, y) - F(\overline{x}, \overline{y})| \leq L|y - \overline{y}|$*

Potom pro každé $(x_0, y_0) \in U$ existuje okolí I bodu x_0, že rovnice $f'(x) = F(x, f(x))$, $f(x_0) = y_0$ má na I právě jedno řešení.

Důkaz. Obě podmínky věty implikují podmínky 1 a 2 v lemmatu. Dále si dopočítáme M a L, zmenšíme a tak, aby platila podmínka $a < \min(\frac{b}{M}, \frac{1}{L})$. Potom lemma platí a řešení je pevným bodem. $\square$

Poznámka. Je-li F pouze spojitá na U, potom řešení stále existuje, ale nemusí být jednoznačné.

Příkladem je rovnice $f'(x) = 3f(x)^{\frac{2}{3}}$ a $f(0) = 0$. Funkce $f(x) = 0$ je řešením. Stejně tak $f(x) = x^3$ je řešením, jelikož $f'(x) = 3x^2 = 3(f(x))^{\frac{2}{3}}$.