Kombinatorika a Grafy I NDMI011

1 Odhad faktoriálu

První odhady:

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$$

Horní odhad:

$$\prod_{i=1}^{n} i \leq \prod_{i=1}^{n} n$$

Dolní odhad:

$$(n!)^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2 = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1))(3 \cdot (n-2)) \cdots (n \cdot 1) \geq n^n$$

Věta 1.1 (Stirlingova)**.** *Faktoriál lze odhadnout pomocí funkce*

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Nebo-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

Věta 1.2 (Jednodušší varianta)**.** *Pro* $\forall n \geq 1$:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \cdot n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Důkaz. Horní odhad matematickou indukcí.

Pro $n = 1$:

$$1e\left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1 \geq 1!$$

Indukční krok:

$$n! = n(n-1)! \leq n \cdot e \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} =$$

$$= n \cdot e \cdot \left(\frac{n^n}{e^n}\right) \frac{(n-1)^n}{n^n} e$$

Zbývá dokázat, že:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n e \leq 1$$

$$e\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e\left(1 - \frac{1}{n}\right) = e \cdot e^{-1} = 1$$

.

Dolní odhad se dokáže podobně:

$$n! \geq e\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

Nakonec stačí dokázat, že poslední výraz ≥ 1. $\square$

Důkaz původní věty. Dá se odhadnout pomocí integrálu. Pomocí přirozených logaritmů ze součinu získáme součet $\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$. Tento součet lze omezit plochou pod křivkou $\log x$ na intervalu $[1, n+1]$:

$$\log(n!) \leq \int_1^{n+1} \log(x)\,dx = (n+1)\log(n+1) - n$$

Z toho potom vyplývá:

$$n! = n(n-1)! = n \cdot e^{\log((n-1)!)} \leq e^{n\log(n)-(n-1)} = \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

Dolní odhad se provede analogicky:

$$\log(n!) \geq \int_1^{n} \log(x)\,dx$$

$\square$

Odhady kombinačních čísel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{k+1}{n-k} = \binom{n}{k+1}\frac{k+1}{n-k}$$

Z toho vyplývá, že pro $k \leq \frac{n}{2}$ platí $\binom{n}{k} \leq nk+1$, naopak pro $k \geq \frac{n}{2}$ platí, že $\binom{n}{k} \geq nk+1$.

Taky víme, že $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. Proto poté musí $\forall k, n: \binom{n}{k} \leq 2^n$.

Dále díky odhadům relativní velikosti binomů můžeme odhadnout největší člen:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2^n}{n+1}$$

Zavedeme si substituci $2m = n$.

Věta 1.3. *Pro $m \geq 1$ platí:*

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

Důkaz. Zavedeme si P:

$$P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} = \frac{(2m)!}{2^m m! \cdot 2^m m!} = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}}$$

Původní odhad je ekvivalentní tomu, že

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \leq P \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

Horní odhad:

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right)$$

Tento výraz se dá roznásobit a získáme:

$$\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right)\left(\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6}\right)\cdots\left(\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)(2m)}\right) = P^2(2m+1)$$

Z toho nakonec vychází, že $P \leq \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}$

Dolní odhad analogicky:

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2 \cdot 2m \cdot P^2}$$

Z toho je $P \geq \frac{1}{2\sqrt{m}}$ $\square$

2 Vytvořující funkce

Máme-li posloupnost $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n}$, tuto posloupnost nalezneme jako posloupnost koeficientů x^i v mnohočlenu $(1+x)^n$.

Definice. *Vytvořující funkce* posloupnosti $(a_i)_{i=0}^{\infty}, a_i \in \mathbb{R}$ je mocninná řada:

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Příklady:

$(a_i)_{i=0}^{\infty} = (1,1,1,1,1,0,0,\ldots)$, potom $a_i = 1$ pro $i \leq n$, 0 jinak. Z toho $a(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$(a_i)_{i=0}^{\infty} = (1,1,1,1,1,\ldots)$, potom $a(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

$a_i = \binom{n}{i}$, potom $a(x) = (1+x)^n$

Tímto jsme schopní přejít z posloupnosti na řadu a z řady na funkci (někdy). Obrácená otázka je ale, dá se někdy z funkce odvodit posloupnost, která odpovídá této funkci?

Věta 2.1. *Pokud pro posloupnost $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ existuje $k \in \mathbb{R}$ takový, že $\forall i : |a_i| \leq k^i$, potom platí, že řada $a(x)$ konverguje absolutně pro $x \in (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$.*

Vytvořující funkce $a(x)$ na dostatečně malém okolí 0 navíc určuje koeficienty a_i, protože:

$$a_i = \frac{a^{(i)}(0)}{i!}$$

Jednoduché posloupnosti, ke kterým se zjistí jednoduché vytvořující funkce, se z nich nějakými operacemi vytvoří složitější a koeficienty těchto složitějších funkcí určí netriviální posloupnosti.

Ne všechny posloupnosti dají vytvořující funkci, například ty, co rosou příliš rychle. Stejně tak ne všechny posloupnosti dají pěknou funkci. Příkladem je $a(x) = 3x^0 + 1x^1 + 4x^2 + \ldots, a(\frac{1}{10}) = \pi$

Operace s vytvořujícími funkcemi.

Operace	Efekt na funkci Efekt na posloupnosti
Součet	$(a+b)(x) = a(x) + b(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)x^i$ $(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$
Vynásobení α	$(\alpha a)(x) = \alpha a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i x^i$ $\alpha(a_0, a_1, \dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots)$
Vynásobení x	$xa(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$ $(a_0, a_1, \dots) \to (0, a_0, a_1, \dots)$
Vydělení x	$\frac{a(x)}{x} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - a_0}{x}$ $(a_0, a_1, \dots) \to (a_1, a_2, \dots)$
Dosazení αx	$a(\alpha x) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_i \alpha^i)x^i$ $(a_0, a_1, a_2, \dots) \to (a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$
Dosazení x^k	$a(x^k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{ki}$ $(a_0, a_1, \dots) \to (a_0, 0, 0, 0, a_1, 0, 0, 0, \dots)(k{-}1 \text{ nul})$
Derivace	$a'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i i x^{i-1}$ $(a_0, a_1, a_2, \dots) \to (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$
Integrál	$a(x) \to \int_0^x a(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{x+1}$ $(a_0, a_1, a_2, a_3 \dots) \to (0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots)$
Součin	$c(x) = a(x)b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} x^i$ Konvoluce

Příklad:

Najděme vytvořující funkci pro posloupnost $(2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \dots)$

Rozložíme posloupnost na $(1, 2, 3, \dots) + (1, -1, 1, -1, \dots)$. Pro první funkci máme odpověď derivaci posloupnosti $(1, 1, 1, \dots) \to \frac{1}{1-x} \to \frac{1}{(1-x)^2}$. Do druhé funkce můžeme pro posloupnost $(1, 1, 1, \dots)$ dosadit $-x$, z toho dostaneme $(1, -1, 1, -1) \to \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$.

Z toho dostaneme vytvořující funkci $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}$.

Definice. Pro $r \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}_0^+$ definujeme *kombinační číslo*

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Věta 2.2 (Zobecněná binomická věta)**.** *Funkce $(1+x)^r$ je pro každé $r \in \mathbb{R}$ vytvořující funkci pro posloupnost*

$$\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right)$$

Navíc řada konverguje pro všechna $x \in (-1, 1)$.

Důkaz. Aplikujeme Taylorův rozvoj $(1+x)^r$ pro $x = 0$. □

Jak vypadá $(1-x)^n$ pro záporné celé n? Podle zobecněné binomické věty můžeme napsat daný člen jako řadu:

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} (-x)^k =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n+k-1)\cdots(-n)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n+k-1}{-n-1} x^k$$

Nyní jsme se dostali k vytvořujícím funkcím. Jak se ale vrátit zpět k původnímu problému?

Rekurentní posloupnosti

Mějme ku příkladu Fibonacciho posloupnost. Pro tu platí následující vlastnosti: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, budeme hledat její vytvořující funkci $F(x) = \sum F_k x^k$. Tabulkou:

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	$\cdots$
$F(x)$	0	1	$F_0 + F_1$	$F_1 + F_2$	$F_2 + F_3$	$\cdots$
x	0	1	0	0	0	$\cdots$
$x^2F(x)$	0	0	F_0	F_1	F_2	$\cdots$
$xF(x)$	0	0_{-F_0}	F_1	F_2	F_3	$\cdots$

Z toho dostaneme vytvořující funkci a nakonec posloupnost:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt(5)}}{1-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} + \frac{\frac{1}{\sqrt(5)}}{1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt(5)}{2} \right)^k + \left(\frac{1-\sqrt(5)}{2} \right)^k \right]$$

Mějme binární strom, to jest zakořeněný strom, v němž má každý vrchol nejvýše dva potomky – pravého a levého. Kolik takových stromů o n vrcholech je?

Označme si b_n jako počet binárních stromů na n vrcholech.

Pozorování: Označme si syny kořene jako vrcholy T_1, T_2. Pokud T_1 má k vrcholů, tak T_2 má $n-k-1$ vrcholů. Z toho dostaneme posloupnost $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0$.

Zavedeme-li vytvořující funkci $b(x) = \sum b_k x^k$, tak b_n je koeficient u x^n f $b(x)$, ale také koeficient u x^{n-1} jako součin $b(x) \cdot b(x)$. Z toho dostaneme vztah $b(x) = x(b(x))^2 + 1$. Tabulkou:

$b(x)$	$b_0 = 1$	b_1	b_2	$\cdots$
$(b(x))^2$	b_0^2	$b_1 b_0 + b_0 b_1$	$b_2 b_0 + b_1^2 + b_2 b_0$	$\cdots$
$x(b(x))^2$	0	b_0^2	$b_1 b_0 + b_0 b_1$	$\cdots$

Nakonec řešíme jako kvadratickou rovnici z neznámé b s parametrem x a dostaneme následující:

$$b_{1,2}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Vyloučíme možnost $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$, protože $lim_{x \to 0^+} = \infty$, takže neplatí $b_0 = 1$.

Dopočteme b_n: Využijeme zobecněnou binomickou větu a dostaneme, že $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum \binom{\frac{1}{2}}{k}(-4)^k x^k$.

Z toho již dostaneme

$$b(x) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k}(-4)^k x^k}{2x}$$

$$b_n = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots(n-\frac{1}{2})}{(n+1)!}4^{n+1} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

3 Konečně projektivní roviny

Jakou strukturu mají množinové systémy, ve kterých povolíme průniky? Takové množiny se můžou chovat všelijak nepředvídatelně.

Proto bychom rádi přidali pravidla možných průniků, která popíšou velmi pravidelný množinový systém:

1. Každé dvě množiny se protínají v jednom prvku
2. Každé dva prvky se nacházejí ve společné množině.
3. Existují čtyři prvky v obecné poloze – nejsou všechny v jedné množině.

Nyní formálně:

Definice. Konečná množina X spolu s množinovým systémem $\mathcal{S} \subseteq P(x)$ tvoří *projektivní rovinu* $(X, \mathcal{S})$, pokud jsou splněný axiomy:

1. $\forall P, Q \in \mathcal{S}: \ |P \cup Q| = 1$
2. $\forall x, y \in X, x \neq y: \ \exists! P \in \mathcal{S}: \{x, y\} \subseteq P$
3. $\exists C \subseteq X, |C| = 4: \ \forall P \in \mathcal{S}: \ |P \cup C| \leq 2$

Prvky X nazveme *body*, prvky $\wp$ nazveme *přímky.*

Příklad: *Fanova rovina* – $X = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\mathcal{S} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\} =$
$\{\{a, c, g\}, \{a, d, f\}, \{a, b, e\},$
$\{b, d, g\}, \{c, d, e\}, \{e, f, g\}, \{b, c, f\}\}$

Věta 3.1. *V projektivní rovině obsahuje každá přímka stejný počet bodů.*

Důkaz. Nechť jsou dány dvě přímky $P, Q \in \mathcal{S}$. Nejprve ukážeme, že existuje bod x mimo P, Q.

Pokud $C \nsubseteq (P \cup Q)$, potom zvolíme $x \in C \setminus (P \cup Q)$

Pokud $C \subseteq (P \cup Q)$, potom označíme BÚNO $C = \{a, b, c, d\}$, $a, b \in Q$, $c, d \in P$, pak se podíváme na přímky $\overline{ad}$ (tedy přímky určené body a, d podle axiomu 2) a $\overline{bc}$. Potom $x = (\overline{ad} \cap \overline{bc})$ leží mimo P, Q. Kdyby totiž $x \in P$, potom $P \cap \overline{cb} \geq 2 \ldots$ spor.

Nechť nyní $P = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, potom přímka $\overline{xz_i}$ protíná Q v jednom bodě y, dostáváme zobrazení $z_i \to y_i$; které je prosté. Stejně tak najdu zobrazení $Q \to P$, tedy obě zobrazení jsou bijekce, tudíž $|P| = |Q|$. $\square$

Nyní si ukážeme, že mezi počtem bodů na přímce, počtem přímek a počtem bodů existuje vztah.

Definice. *Řád* projektivní roviny $(X, \mathcal{S})$ je $|P| - 1$ pro libovolnou $P \in \mathcal{S}$.

Věta 3.2. *Je-li $(X, \mathcal{S})$ projektivní rovina řádu n, potom:*

1. *každým bodem prochází $n+1$ přímek.*
2. *$|X| = n^2 + n + 1$*
3. *$|\mathcal{S}| = n^2 + n + 1$*

Důkaz.

1. Dáno x, najdeme $P \in \mathcal{S}$ takovou, že $x \notin P$. Potom je-li $P = \{z_1, \ldots, z_{n+1}\}$, dostaneme $n+1$ přímek $\overline{xz_i}$ a to jsou všechny přímky procházející x.
2. Každá přímka $\overline{xz_i}$ má $n+1$ bodů, všechny jsou navzájem různé až na X, tedy $|X| = 1 + (n+1)n = n^2 + n + 1$
3. necháme na později.

□

Definice. Pro množinový systém $(X, \mathcal{S})$ je definovaný *duální množinový systém* $(\mathcal{S}, \{\{S \in \mathcal{S} : \ x \in S\}, x \in X\})$ (všechny množiny ze $\mathcal{S}$ obsahující předem zvolený bod x)

Věta 3.3. *Duální množinový systém z projektivní roviny je opět projektivní rovina.*

Důkaz. Musíme ukázat, že v duálním systému jsou splněny všechny axiomy:

Dva body určují přímku v duálu právě tehdy, když dvě přímky se protínají v jednom bodě v původní projektivní rovině. Podle axiomu pro P, Q platí $\exists! a : a = P \cap Q$. Přímka z duálu $\{R : a \in R\} \ni P, Q$ a je jednoznačná. Kdyby nebyla jednoznačně určená, potom by $\{a, b\} \subseteq P \cap Q$, spor.

Dvě přímky se protínají v jednom bodě v duálu právě tehdy, když dvěma body prochází jediná přímka z původní projektivní roviny.

Je-li $C = \{a, b, c, d\}$ v původní projektivní rovině, potom $\{\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{da}\}$ je C' v duálu, protože každá trojice z C' obsahuje dvojici s průnikem v C a dvojici s průnikem mimo C. □

Důkaz 3. bodu. Duální projektivní rovina k $(X, \mathcal{S})$ má také řád n, podle věty má duál $n^2 + n + 1$ bodů, tedy původní rovina má tento počet přímek. □

Už známe vlastnosti projektivních rovin. Ale kolik jich vlastně existuje? Jak je sestrojit?

Věta 3.4. *Projektivní rovina řádu n existuje, pokud existuje algebraické těleso $\mathbb{K}$ o n prvcích.*

Víme, že algebraická tělesa existují pro všechny mocniny prvočísel, to jsou například tělesa $\mathbb{Z}_p$.

Důkaz. Je dáno $\mathbb{K}$, sestrojíme $(X, \mathcal{S})$. Na $\mathbb{K}^3 \setminus (0,0,0)$ zavedeme ekvivalenci $(x,y,z) \sim (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ pro $\alpha \in \mathbb{K} \setminus 0$. Potom X jsou třídy ekvivalence $\sim$. Počet těchto tříd je $|X| = \frac{n^3-1}{n-1} = n^2+n+1$.

Přímky pro každou trojici $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \setminus (0,0,0)$ definujeme jako $P_{a,b,c} = \{(x,y,z) : ax+by+cz = 0\}$. Pozorujeme, že ekvivalence $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ nám způsobí ekvivalenci $(x,y,z) \in P_{a,b,c} \Leftrightarrow (x',y',z') \in P_{a,b,c} \dots$

Pokračování příště. □

Přednáška 1.4.2016 chybí...

4 Počítání dvěma způsoby

Počet koster úplného grafu

Definice. *Kostra* souvislého grafu G je podgraf takový, že obsahuje všechny vrcholy a je strom.

Značení: $\kappa(n) =$ počet koster K_n

Pro příklad, vezměme si počet koster malých grafů:

- $\kappa(1) = 1$ triviálně, jeden vrchol
- $\kappa(2) = 1$, protože máme pouze jednu cestu
- $\kappa(3) = 3$, jediná kostra je $cesta_2$, tři možnosti.
- $\kappa(4) = 16$, máme dvě možnosti koster – vidlice nebo $cesta_3$.

Doplnit správné označení cesty...

Věta 4.1 (Cayleyho formule). *Pro* $\forall n > 2$ *platí* $\kappa(n) = n^{n-2}$

Věta 4.2. *Nechť* $(d_1, \dots, d_n)$ *je posloupnost kladných čísel se součtem* $2n-2$, *potom počet stromů na vrcholech* $1, \dots, n$, *kde vrchol* i *má stupeň* d_i *je*

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

Důkaz. BÚNO uvažujme, že $d_n = 1$. Z MI předpokládáme, že věta platí pro $n-1$.

Pokud $(1,n) \in E$, dostaneme $\frac{((n-1)-2)!}{(d_1-2)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!}$

Pokud $(2,n) \in E$, dostaneme $\frac{((n-1)-2)!}{(d_1-1)!(d_2-2)!\cdots(d_{n-1}-1)!}$

Tímto způsobem rozebereme všechny případy až po $(n-1,n)$. Celkový počet stromů je součet všech zlomků, protože vrchol n musí být určitě připojen k jednomu z ostatních vrcholů.

Všechny zlomky mají velmi podobný jmenovatel, chybí tam pouze člen $d_i - 1$. Proto každý zlomek rozšíříme tímto členem, čímž získáme společný jmenovatel. Dohromady dostávám součtem zlomek

$$\frac{(n-3)![(d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_{n-1}-1)]}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!}$$

Zbývá tedy sečíst čitatel. $d_1 + \cdots + d_{n-1}$ nám dává součet $2n-2-1$. Z něj ještě odečítáme $n-1$. Z toho tedy dostaneme v čitateli $(n-3)!(n-2)$, což je původní výraz. Ve jmenovateli nám sice chybí člen $(d_n-1)!$, ale jelikož jsme zvolili $d_n = 1$, $0! = 1$, tedy tento člen můžeme beztrestně připsat. □

Důkaz Cayleyho formule. Rozepíšeme si využitím předchozí věty:

$$\kappa(n) = \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_n \geq 1 \\ \sum d_i = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

Následovně nahradíme členy $d_1, \ldots, d_n$ členy $k_1, \ldots, k_n$ tak, že $k_i = d_i - 1$?

$$\kappa(n) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geq 0 \\ \sum k_i = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$$

Nyní si všimněme, že tento výraz odpovídá multinomické větě:

$$\kappa(n) = \sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ \sum k_i = n-2}} \binom{n-2}{k_1,\ldots,k_n} 1^{k_1} 1^{k_2} \cdots 1^{k_n} = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})^{n-2} = n^{n-2}$$

□

Důkaz Cayleyho formule II.. Představme si, že daná kostra T je zakořeněná a všechny hrany směřují ke kořeni a téže očíslujeme hrany $1, \ldots, n-1$ ... Dostaneme trojici $(T_{\text{kostra}}, r_{\text{kořen}}, f : V \to [n-1]_{\text{číslování}})$. Dvěma způsoby určíme počet těchto trojic:

1. $\#(T, r, f) = \kappa(n) \cdot n \cdot (n-1)!$
2. Postupně přidáme hrany s čísly $1, \ldots, n-1$. jakým způsobem lze přidat šipku s číslem i?

Les má $n - i + 1$ komponent, každá je zakořeněný strom. Zpozorujeme, že šipka může vést z kořene do libovolného vrcholu z kostry jiné komponenty. Toto dává v i-tém kroku $n(n-i)$ způsobů.

Z toho tedy $\#(T, r, f) = \prod_{i=1}^{n-1}(n(n-1)) = n^{n-1}(n-1)!$. Dostali jsme tedy rovnici, ze které plyne $\kappa(n) = n^{n-2}$. □

Podle věty o dlouhém a širokém $|x| \leq \alpha\omega$, každé částečné uspořádání zle reprezentovat inkluzí, můžeme se tedy podívat na $(P([n]), \subseteq)$. Mějme A, B nezávislé vzhledem k $\subseteq$, tedy $A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A$.

Každá vrstva uspořádání tvoří antiřetězec. Můžeme nahlédnout, že největší nezávislá množina je v prstřední vrstvě.

Věta 4.3 (Spernerova)**.** *Každý množinový systém má nejvýše $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ nezávislých množin vzhledem k inkluzi.*

Ale opravdu nám tato věta říká něco o velikosti jednotlivých množin?

Důkaz. Nechť je člen antiřetězce $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$ v uspořádání $(X, \subseteq)$, kde $X \subseteq P([n])$. Dvěma způsoby odhadneme počet $(M, \check{R})$, kde $M \in \mathcal{M}$ a $\check{R}$ je maximální řetězec patřící do $(P(X), \subseteq)$:

1. $\#(M, \check{R}) \leq \check{R} = n!$, jelikož každé M patří do nejvýše jednoho $\check{R}$ a každý řetězec odpovídá postupnému přidávání prvků.

2. Pozorujeme, že je-li dána M, potom ji lze doplnit $|M|!(n-|M|)!$ způsoby na maximální řetězec.

   $\#(M, \check{R}) = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M!|(n-|M|)!$

Kombinováním těchto dvou způsobů dostáváme $n! \geq \sum_{M \in \mathcal{M}} |M!|(n-|M|)!$. Vydělením $n!$ dostaneme:

$$1 \geq \sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{|M!|(n-|M|)!}{n!} = \sum_{M \in \mathcal{M}} \binom{n}{|M|}^{-1} \geq \sum_{M \in \mathcal{M}} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} = |\mathcal{M}| \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1}$$

Díky tomuto vztahu nakonec dostaneme $|\mathcal{M}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ □

Věta 4.4. *Pokud graf G na n vrcholech neobsahuje C_4 jako podgraf, potom má nejvýše $\frac{1}{2}(n^{\frac{3}{2}} + n)$ hran.*

Důkaz. Dvěma způsoby spočítáme počet vidliček u–w–v v G.

1. Počet vidliček $\leq \#(u, v) = \binom{n}{2}$, u, v lze rozšířit na nejvýše jednu vidličku, jinak dostaneme C_4.
2. Počet vidliček $= \sum_w \binom{\deg(u)}{2}$, každí dva sousedé u tvoří s w vidličku.

Složením rovnic dostaneme $\sum_w \binom{\deg(u)}{2} \leq \binom{n}{2}$, tedy $\sum_w (\deg(u)-1)^2 \leq n^2$. Využijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost $\langle x|y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y||$:

Mějme $x = (\deg(v_1)-1, \deg(v_2)-1, \ldots, \deg(v_n)-1)^T$ a $y = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Dostáváme:

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) - 1 \leq \sqrt{(\deg(v_1)-1)^2 + \cdots + (\deg(v_n)-1)^2} \cdot \sqrt{n}$$

Z toho dostáváme $\sum \deg(v) - 1 \leq \sqrt{n^2}\sqrt{n}$, tedy $2|E| - n \leq n^{\frac{3}{2}}$. □

Nyní už známe počet koster pro úplný graf: $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Jak se ale tento počet změní, když jednu hranu vynecháme, tedy hledejme $\kappa(K_n - e), n \geq 3$.

Při určování kostry K_n si tento počet rozdělíme na kostry obsahující nebo neobsahující e. Spočteme počet (e, T), kde $e \in E_{K_n}$ a T je kostra grafu taková, že $e \in E_T$.

1. Pro pevnou hranu je $\kappa_e(K_n)$ koster T obsahujících e, tedy $p = \binom{n}{2}\kappa_e(K_n)$
2. Pro vybranou kostru T lze najít $n-1$ vhodných hran, tedy $p = n^{n-2}(n-1)$

Z toho jsme dostali rovnici, ze které jsme schopní vyjádřit hledaný počet koster obsahujících e:

$$\binom{n}{2}\kappa_e(K_n) = n^{n-2}(n-1)$$
$$\kappa_e(K_n) = 2n^{n-3}$$

Nyní můžeme vypočítat počet koster neobsahujících e: $\kappa(K_n - e) = \kappa(K_n) - \kappa_e(K_n) = n^{n-3}(n-2)$.

5 Grafy

5.1 k-souvislost grafů

Mějme nějaký graf železniční sítě, která obsahuje nějaké mosty a důležité výhybky. My chceme vědět, kolik mostů by se muselo sesypat nebo kolik výhybek by se muselo pokazit, aby nám tato železnice přestala být souvislá.

Mějme nějaké operace na grafu $G = (V, E), v \in V, e \in E, e' \in \binom{V}{2} \setminus E$:

Odebrání vrcholu $G - v = (V \setminus \{v\}, E \cap \binom{v - \{v\}}{2}) = G[V \setminus \{v\}]$

Odebrání hrany $G - e = (V, E \setminus \{e\})$

Přidání hrany $G + e' = (V, E \cup \{e\})$

Rozdělení hrany pro $e = (u, v)$ je $G \div e =$

Definice. Graf $G = (V, E)$ je:

- *vrcholově 2-souvislý*, pokud $|V| \geq 3$ a $\forall v \in V$ je $G - v$ souvislý
- *hranově 2-souvislý*, pokud $E \neq \emptyset$ a $\forall e \in E$ je $G - e$ souvislý

Obecněji můžeme říct, že graf G je *k-souvislý*, jestli po odebrání vrcholu nebo hrany $(k-1)$-souvislý.

Definice. Mějme souvislý graf $G = (V, E)$, potom:

Vrchol $v \in V$ takový, že $G - v$ již není souvislý, se nazývá *artikulace*.

Hrana $e \in E$ se nazývá *most*, graf $G - e$ není souvislý.

Most nebo artikulaci nemůže obsahovat hranově, respektive vrcholově 2-souvislý graf.

Je-li G souvislý a e je most, odebráním této hrany získáme právě dvě komponenty souvislosti. Avšak pokud je v artikulace, $G - v$ se může rozpadnout i na více komponent.

Lemma 5.1. *Má-li graf G s $|V| \geq 3$ most, má také i artikulaci.*

Důkaz. Mějme most $e = (u, v)$. Jeho odebráním se G rozdělí na komponenty. Víme, že alespoň komponenta BÚNO za vrcholem u bude mít více vrcholů, než jeden. Potom je tento vrchol u artikulací. □

Důsledek 5.2. *Mějme graf G, který je vrcholově 2-souvislý. Potom je G i hranově 2-souvislý.*

Tvrzení 5.3. *Mějme graf $G = (V, E)$ a $e \in E$. Potom je G (vrcholově) 2-souvislý právě tehdy, když $G \div e$ je (vrcholově) 2-souvislý.*

Důkaz. Ukážeme implikace:

„$\Rightarrow$“: Označme si $e = (u, v)$ a nový vrchol w. Potom se podívejme $(G \div e) - x$.

První možnost je $w = x$, potom $(G \div e) - x = G \div e$ a vrcholová souvislost implikuje hranovou, proto $G - e$ je souvislý, implikace splněna.

Další možnost je BÚNO $x = u$, potom $(G \div e) - u = (G - u) + (v, w)$. Tento nový graf je souvislý.

Poslední možnost je $x \notin \{u, v, w\}$, potom $(G \div e) - x = (G - x) \div e$ a tento graf je souvislý díky 2-souvislosti.

„$\Leftarrow$“: Ukážeme obměnou, tedy G není 2-souvislý, tedy má artikulaci x, podrozdělení hrany nás této artikulace nezbaví, tedy $G \div e$ není 2-souvislý. □

Věta 5.4. *Mějme graf G. Ten je vrcholově 2-souvislý právě, když G lze vytvořit z kružnice přidáváním cest, které mají s touto kružnicí společné koncové vrcholy.*

Ekvivalentně: Graf G je vrcholově souvislý právě, když G lze vytvořit z C_3 opakovaným dělením a přidáváním hran.

Důkaz. 2-souvislý graf G musí obsahovat kružnici C_0, jelikož strom obsahuje artikulaci.

Vytváříme $G_0 = C_0, G_1, G_2, \ldots$ tak, že G_{i+1} vznikne z G_i přidáváním ucha. Skončíme s G_k, jakmile nelze přidat další ucho, a chceme, aby $G_k = G$.

Pro spor $G_k \subset G$. Předpokládejme hranu e, která není v G_k, ale je v G.

Pokud má e v G_k oba konce, je to ucho, spor.

Pokud má e v G_k jen jeden konec, $e = (u, v), u \in V(G_k), v \notin V(G_k)$. Graf $G - u$ je souvislý, existuje cesta z v do $V(G_k)$, tedy je to ucho.

Pokud nemá e v G_k žádný konec, a G je souvislý, potom existuje cesta z jednoho jejího konce do $V(G_k)$. e' je poslední hrana před G_k, která v něm má jeden konec. Proto je e částí ucha.

Takovému postupu se někdy říká ušaté lemma, tedy že něco platí pro kružnici a přidáním ucha se vlastnost zachová.

Z toho vyplývá, že $G_k = G$. □

Věta 5.5. *Graf G je vrcholově 2-souvislý právě, když každé dva vrcholy leží na společné kružnici.*

Důkaz. Zpětná implikace platí, jelikož na kružnici nemůže existovat artikulace.

Mějme ušatou dekompozici $G_0, G_1, \ldots G_k$ grafu G. Podle MI ukážeme:

- $k = 0$, potom $G \cong C_n$
- $i - 1 \to i$, v G_{i-1} jsou každé dva vrcholy na kružnici, v G_i chceme ukázat, že jsou také.

Mějme $u, v \in V(G_i)$. Potom můžou nastat situace:

- $u, v \in V(G_{i-1})$, potom existuje kružnice dle IP.
- u, v na uchu, potom ucho vytvoří s G_{i-1} novou kružnici.
- u na uchu a $v \in V(G_{i-1})$. Označme si x, y jako konečné vrcholy ucha. Podle IP x, v leží v G_{i-1} na společné kružnici C_x. Najdu dále cestu z y do $V(C_x)$. Tím najdeme kružnici s vrcholy x, u, y, v a máme vyhráno.

□

Toky v sítích

Mějme nějakou počítačovou síť, kde jsou dvojice počítačů propojeny různě kvalitním spojením, tedy každé propojení jsou omezené šířkou pásma. Optický kabel protáhne mnohem více dat, než starý wifi router. Nyní chceme přetahovat spoustu dat z počítače z do jiného počítače s.

Chceme najít optimální komodaci dat, tedy takovou konfiguraci, abychom mohli najednou protáhnout co nejvíce dat ze z do s.

Martin Mareš má pěkně napsaná skripta zrovna k tokům v síti, kde je většina informací.

Definice. *Sít* je orientovaný graf s nezáporně ohodnocenžmi hranami a dvěma význačnými vrcholy: z, s, tedy zdroj a stok.

Formálně: $(G, c, z, s), E_G \subseteq V \times V, c : E_g \to \mathbb{R}_0^+, z \neq s \in V_G$

Definice. *Tok* v síti je $f : E_g \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že platí:

1. $\forall e \in E_g : f(e) \leq c(e)$, tedy hodnota toku na každé hraně nepřesahuje kapacitu.
2. $\forall v \in V_G \neq z, s : \sum_{u:(u,v) \in E_G} f(uv) = \sum_{(v,u) \in E_G} f(vu)$, tedy do každého vrcholu přiteče stejně, jako od něj odteče. Zdroj a spotřebič jsou výjimka.

Pro $f(e)$ budu taky používat pro danou hranu tok $f(uv)$, což znamená hodnota toku na hraně z vrcholu $u \to v$.

Definice. *Velikost toku* $w(f)$ je definovaná jako:

$$\sum_{(z,v) \in E} f(zv) - \sum_{(v,z) \in E} f(vz),$$

tedy součet toku na hranách vycházejících ze zdroje.

Naším cílem je tedy najít v naší síti tok co největší velikosti.

Nyní zkusíme odhadnout, jak můžeme omezit velikost největšího toku. Například tok nebude větší, než součet všech hran vedoucích do stoku.

Definice. *Řez* v síti (G, c, z, s) je množina hran $R \subseteq E_G$ taková, že každá orientovaná cesta $z \to s$ má neprázdný průnik s R. Kapacita řezu je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

Elementární řez určený množinou $A \subseteq V_G, z \in A, s \notin A$ je množina hran $R_A = \{(u, v) : u \in A, v \notin A\}$

Můžeme si všimnout, že R_A je řez, protože každá orientovaná cesta $z \to s$ musí alespoň jednou hranou opustit A, tato hrana patří do R_A.

Stejně tak každý řez obsahuje nějaký elementární řez... Je-li dáno R, určíme $A = v : \exists z \to v \in G \setminus R$ tedy vrcholy dosažitelné ze z ve vrcholech mimo řez.

Tedy $R_A \subseteq R$.

Důsledek 5.6. *Řezy, které jsou minimální vzhledem k inkluzi, jsou elementární.*

Lemma 5.7. *Je-li f tok v síti (G, c, z, s) a R_A je elementární řez, potom pro $u \in A, v \notin A$ platí:*

$$w(f) = \sum_{(u,v) \in E} f(uv) - \sum_{(v,u) \in E} f(vu)$$

Důkaz. Podle definice velikosti toku $w(f) = \sum_{(z,v) \in E} f(zv) - \sum_{(v,z) \in E} f(vz)$.

Pro vrcholy v A použijeme k. zákony, kde $u \in A, u \neq z$ je dohromady $0 = \sum_{(u,v) \in E} f(uv) - \sum_{(v,u) \in E} f(vu)$

Z toho dostaneme, že $w(f) = \sum_{U \in A} (\sum_{(u,v)} f(uv) - \sum_{(v,u)} f(vu))$. □

Nejsem si jistý, zda je tento důkaz napsaný správně.

Věta 5.8. *Pro každou síť platí, že maximální velkost toku je rovna minimálnímu kapacitě řezu. Tedy* $\max w(f) = \min c(R)$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že platí nerovnost $\leq$. Nechť f, R jsou libovolné, najdeme minimální $R' \subseteq R$, z toho vypozorujeme, že $R' = R_A$ pro nějaké A. Nyní využijeme předchozí lemma a dostáváme:

$$w(f) = \sum_{(z,v)\in E} f(zv) - \sum_{(v,z)\in E} f(vz) \leq \sum_{(z,v)\in E} f(zv) = c(R_A) \leq C(R)$$

Nyní ukážeme, že má-li levá strana smysl, platí rovnost. Pro každou neorientovanou cestu $P = (z = u_0, u_0, \dots, u_k)$ a tok f definujeme ε_p jako

$$\min\left(c(e) - f(e), e = (u_i u_{i+1}) \in E\ ;\ f(e), e = (u_{i+1}, u_i) \in E\right).$$

Pokud existuje cesta $P : z \to s$, kde $\varepsilon_p > 0$, našli jsme zlepšující cestu, lze najít f' větší velikosti takové, že

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon_p & e = (u_i, u_{i+1}) \in P \\ f(e) - \varepsilon_p & e = (u_{i+1}, u_i) \in P \\ f(e) & e \notin P \end{cases}$$

Z toho $w(f') = w(f) + \varepsilon_p$. Nyní můžeme zpozorovat, že pokud neexistuje zlepšující cesta, je tok f maximální.

Nechť f je maximální tok, potom volíme $A = \{z\} \cup \{u : \exists P : z \to u : \varepsilon_p > 0\}$. V takové množině není s z maximality. R_A je řez, $\forall e \in R_a : c(e) = f(e)$. (Jinak bychom rozšířili A o konec hrany, kde $c(e) > f(e)$).

Podle lemmatu máme

$$w(f) = \sum_{(u\in A, v\notin A)\in E} f(uv) - \sum_{(v\notin A, u\in A)} f(vu) = c(R_A) - 0.$$

Nyní musíme ukázat existenci maximálního toku.

- Pro celočíselné kapacity lze udržovat celočíselné toky a celočíselné ε_p. Začneme nulovým tokem a zlepšujeme, dokud můžeme. Tento proces je konečný.
- Pro racionální kapacity si převedeme síť na celočíselnou vynásobením společným jmenovatelem.
- Pro iracionální kapacity se musí použit věta z MA o nabývání maxima na kompaktu.

□

5.2 Míra souvislosti grafu

Definice. $A \subseteq V_G$ je *vrcholový řez* souvislého grafu G, pokud $G - A$ je nesouvislý. Podobně $F \subseteq E_G$ je *hranový řez*, pokud $G - F$ je nesouvislý.

Vrcholová, respektive hranová souvislost k_v je tedy velikost nejmenšího vrcholového, respektive hranového řezu v tomto grafu. Jen úplné grafy tvoří výjimku, kde je vrcholová souvislost rovna $|v| - 1$.

Nesouvislé grafy lze definovat jako grafy, jejichž $k_v = 0$.

Pokud má G alespoň 2 vrcholy, potom $k_v \leq k_e \leq \min \deg u$.

Lemma 5.9. *Pro každý graf G a hranu $e \in E_G$ platí: $K_v(G) \leq k_v(G-e)+1$*

Důkaz. Nechť A je minimální vrcholový řez v $G-e$. Můžou nastat následující případy:

1. Je-li $G-A+e$ stále nesouvislý, potom vrcholová souvislost $k_v(G) \leq |A| = k_v(G-e) \leq k_v(G-e)+1$.

2. Je-li $G-A+e$ souvislý a alespon jedna z komponent má ≥ 1 vrchol, BÚNO komponenta $|C_2| \geq 2$, potom označíme $A \cup (e \cap C_2)$ je řez mezi C_1 a $C_2 \setminus (e \cap C_2)$. Proto tedy $k_v(G) \leq |A+1| = k_v(G-e)+1$.

3. $G-A+e$ je souvislý a obě komponenty jsou jednovrcholové, potom je graf úplný, takže $k_v(G) \leq \min \deg = n-2 = |A|$.

□

Tento vztah ve skutečnosti platí i pro hranovou souvislost, tedy $k_e(G) \leq k_e(G-e)+1$. Minimální řez F v $G-e$ přidáním e dává řez v G, ne nutně minimální.

V každém grafu G také existuje hrana e, kde platí $k_e(G) = k_e(G-e)+1$. Stačí vzít hranu na nejmenším řezu.

Věta 5.10. *Pro každý graf G platí: $k_v(G) \leq k_e(G)$.*

Důkaz. Indukcí podle počtu hran, stačí pro souvislé grafy. Jinak máme $k_v = k_e = 0$.

Zvolíme hranu e z minimálního řezu. Z IP vyplývá, že pro $G-e$ platí rovnost.

Šikovně si zvolíme e tak, že platí $k_e(G) = k_e(G-e)+1 \geq k_v(G-e)+1 \geq k_v(G)$. □

Nyní si dáme do souvislosti souvislost grafů a toky v sítích.

Věta 5.11 (Mengerova)**.** *Pro každý graf G a každé $t \in \mathbb{N}$ platí, že G je vrcholově t-souvislý, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy vede t cest, které jsou až na koncové vrcholy navzájem disjunktní.*

Věta 5.12 (Ford-Fulkerson)**.** *Pro každý graf G a každé $t \in \mathbb{N}$ platí, že G je hranově t-souvislý, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy vede t hranově disjunktních cest.*

Důkaz. Ukážeme pro obě věty zpětnou implikaci. Dokážeme sporem:

Pro spor předpokládejme existenci cest a zároveň, že $k_{ve}(G) < t$. Tedy existuje příslušný řez s $< t$ vrcholy či hranami. Zvolíme u, v z různých komponent po odebrání řezu. Mezi u, v vede navzájem t cest, které musíme přerušit a máme řez $< t$. Takže můžeme rozpojit $\leq t-1$ cest, tedy graf zůstane souvislý.

Nyní si ukážeme dopřednou implikaci pro F-F větu. Pro graf G s vrcholy u, v sestrojíme sít (G, u, v) s jednotkovými kapacitami. Víme, že $t \leq k_e(G) = \min |F| = \max w(f)$, tedy t je nejvýše velikost maximálního toku. Proto bude existovat tok mezi u, v, který má hodnotu $\geq t$.

Postupně t-krát hledáme cestu z u do v v grafu, kde $f(e) = 1$. Jejich postupným odebíráním se zmenší tok o 1, nakonec dostaneme t disjunktních cest.

Pro Mengerovu větu si síť zkonstruujeme podobně, navíc každý vrchol různý od u, v nahradíme dvěma tak, že jeden obsahuje všechny vstupní hrany, druhý obsahuje výstupní hrany a tyto dva vrcholy jsou propojené hranou s kapacitou 1.

Toky v nové síti odpovídají systému vrcholově disjunktních cest. Nyní si vezmeme nejmenší řez, u něj lze BÚNO předpokládat, že obsahuje jen „vrcholové hrany“ vzniklé úpravou sítě. Postupujeme stejně, jako v předchozím případě, dostaneme t vrcholově disjunktních cest. □

5.3 Systémy různých reprezentantů

Mějme pár skupin lidí, kde se nějaký člověk může vyskytovat ve více různých skupinách. Chceme z každé skupiny vybrat jednoho reprezentujícího tak, abychom nikoho nevybrali pro více, než jednu skupinu.

Definice. *Množinový systém* $\mathcal{M} = \{M_i, i \in I, M_i \subseteq X\}$, kde I a X jsou konečné množiny a M_i nemusejí být nutně různé.

Naše skupiny lidí tedy tvoří množinový systém, kde X je množina lidí, a M_i jsou jednotlivé skupiny.

Definice. *Systém různých reprezentantů* (SRR) pro $\mathcal{M}$ je prosté zobrazení $f : I \to X$ takové, že $\forall i \in I : f(x) \in M_i$.

Jak lze takový množinový systém reprezentovat? Může se to udělat graficky, ale to nemusí fungovat pěkně pro složité systémy. Místo toho využijeme graf.

Definice. *Incidenční graf* $\mathcal{M}$ je bipartitní graf $G_{\mathcal{M}}$ na vrcholech $V = X \cup I$, kde $(i, x) \in E \Leftrightarrow x \in M_i$.

Párování bipartitního grafu je podgraf stupně max. 1, je to tedy množina disjunktních hran.

Pozorování. Množinový systém $\mathcal{M}$ má SRR právě, když $G_{\mathcal{M}}$ má bipartitní párování velikosti $|I|$.

Kdy určitě toto párování nemůžeme najít? Určitě, pokud je více skupin, než prvků.

Věta 5.13 (Hall)**.** *Pro každý množinový systém $\mathcal{M}$ platí:*

$$\mathcal{M} \textit{ má SRR, právě když } \forall J \subseteq I : \left| \bigcup_{i \in J} M_i \right| \geq |J|$$

Důkaz. Ukážeme jednotlivé směry implikace:

„$\Rightarrow$“: Existuje nějaké párování $F \subseteq E_{G_{\mathcal{M}}}$, které je prosté. Proto musí nerovnost platit.

„$\Leftarrow$“: Doplníme $G_{\mathcal{M}}$ na síť toku tak, že všem hranám nastavíme kapacitu 1, potom ještě přidáme zdroj, který spojíme s celou první partitou, s druhou partitou propojíme stok. Všem novým hranám také nastavíme kapacity 1.

Nechť g je maximální tok a R je jemu odpovídající minimální řez.

Pozorování. BÚNO můžeme předpokládat, že každá hrana R vychází se zdroje nebo ze stoku. Kdyby ne, můžeme jednoduše řez přesunout na vedlejší hranu.

Nyní definujeme $A = \{i \in I : (z, i) \in R\}$. Analogicky si definujeme $B = \{x \in X : (x, s) \in R\}$.

Pozorování. Mezi $I - A$ a $X - B$ nevede žádná hrana.

Z toho vyplývá, že všechny hrany z $I-A$ vedou do B, tedy zvolíme $J = I-A$ a aplikujeme Hallovu podmínku. Dostaneme, že $|J| = |I-A| \leq \left|\bigcup_{i\in J} M_i\right| \leq |B|$.

Víme, že velikost toku je rovna kapacitě řezu $|R| = w(g) = |A| + |B| \geq |A + I - A| = |I|$. Velikost toku však nemůže být větší, než $|I|$, protože hrany vycházející ze zdroje jsou dávají řez velikosti $|I|$.

Z toho plyne, že $w(g) = |I|$. Jelikož jsou kapacity celočíselné, je i tok celočíselný. Naše hledané párování jsou ty hrany $e = (i, x) : g(e) = 1$. □

Důsledek 5.14. *Každý k-regulární bipartitní graf je hranově k obarvitelný, neboli E lze rozložit na k disjunktních párování.*

Důkaz. Ověříme Hallovu podmínku. Víme, že z každého vrcholu vychází k hran. Díky tomu $\forall J \subseteq I$: z J vychází $k \cdot |J|$ hran, které vedou do $\bigcup_{i\in J} M_i$. Každý vrchol z této množiny má stupeň k. Podmínka tedy platí.

Graf má tedy párování F. Z toho plyne, že $G - F$ je $(k-1)$-regulární. Podle IP má $G-F$ rozklad na $(k-1)$ párování, tedy G má rozklad na k párování. □

Nyní se podíváme, jak lze aplikovat tyto znalosti.

První aplikace je doplnění latinských obdélníků na latinské čtverce.

Definice. *Latinský obdélník* typu $k \times n$ je mřížka velikosti $k \times n$ vyplněné symboly $1, \ldots, n$ tak, že žádný symbol se neopakuje v žádném řádku ani sloupci.

Tvrzení 5.15. *Každý latinský obdélník $k \times n$ lze doplnit na čtverec.*

Důkaz. Sestavíme bipartitní graf na množině vrcholů $V = \mathcal{S} \cup [n]$, kde $\mathcal{S}$ je množina sloupců $S_1, \ldots, S_n$ a v S_i jsou prvky vyplněné v i-tém sloupci. Zavedeme si množinu hran $E = \{i, S_j) : i \notin S_j\}$, tedy hrany spojující symboly se sloupci *ne*vyskytují.

Tento graf je $(n-k)$-regulární, tím pádem existuje $n-k$ párování a každé párování nám dá způsob, jak vyplnit jeden řádek. □

Jiná aplikace se dotýká pravděpodobnosti.

Definice. Matice A je permutační, pokud $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ taková, že v každém řádku i sloupci je !1 jednička.

Matice A je *bisochastická*, pokud $A \in \langle 0, 1\rangle^{n\times n}$ má řádkové i sloupcové součty rovny 1.

Věta 5.16 (Birchoff-von Neumann)**.** *Každá bisochastická matice je konvexní kombinací permutačních matic. Formálně*

$$\forall B \ bis \ \exists A_1, \ldots, A_d \ perm \ : \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = B, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

6 Úvod do Ramseyovy teorie

Pokud máme dostatečně velký objekt, najdeme v něm nějakou homogenní část?

Definice. *Ramseyovo číslo* $R(k, l)$ je nejmenší n takové, že pro každý graf na alespoň n vrcholech platí buď $\alpha(G) \geq k$ nebo $\omega(G) \geq l$

Jinak: Obarvíme-li krany $K_{R(k,l)}$ dvěma barvami, třeba červenou a modrou, pak v něm nalezneme buď červený K_k nebo modrý K_l

Například dá se ukázat, že na večírku stačí najít šest lidí, a určitě se bude celá trojice navzájem znát, nebo neznat vůbec. Tedy $R(3,3) = 6$.

Pozorování. $R(k,1) = R(1,l) = 1$

Tvrzení 6.1. *Pro každé $k, l \geq 2$ platí $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l+1)$*

Důkaz. Dán graf G na $R(k-1,l)+R(k,l-1)$ vrcholech, zvolíme $u \in V$ libovolně.

Označme $A = N(u), B = V_G \setminus (N(u) \cup \{u\})$, kde $N(v)$ je množina sousedů. Potom platí: buď $|A| \geq R(k,l-1)$ nebo $|B| \geq R(l,k-1)$.

Platí-li první příklad, potom A obsahuje buď nezávislou množinu velikosti k nebo kliku na $l-1$ vrcholech, kterou lze pomocí u doplnit na K_l. Druhý případ symetricky. □

Důsledek 6.2. $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$*, lze vidět z Pascalova trojúhelníku.*

Nyní ukážeme, že se toto číslo dá zobecnit na více barev pro grafy.

Věta 6.3. *Pro každé přirozené k, r existuje přirozené n takové, že obarvíme-li hrany K_n pomocí r barev, tak potom existuje k-tice vrcholů, která indukuje jednobarevný K_k.*

Důkaz. Indukcí podle počtu barev r. Značme $n_{r,k}$.

Pro $r = 2$ máme dokázanou větu. Pro $r = 1$ zvolíme $n_{r,k} = k$.

Pro $r \geq 3$ určíme $n_{r,k} \leq R(k, n_{r-1,k})$. Máme obarvení $K_{R(k,n_{r-1,l})}$ pomocí r barev. Převedeme na obarvení dvěma barvami, a tak, že první barva reprezentuje původní 1 a druhá barva zbytek barev.

Upravený graf buď obsahuje K_k v první barvě, nebo $K_{n_{r-1,k}}$ v barvách různých od první barvy. I v tomto případě dle IP nalezneme jednobarevnou K_k. □

Pro zajímavost, hodnoty některých čísel:

- $R(3,3) = 6, R(3,4) = 9, \ldots$, známo až po $R(3,9)$
- $R(4,4) = 18, R(4,5) = 25$
- $43 \leq R(5,5) \leq 49$
- Pro 4 barvy se ví: $n_{3,3} = 17$

Konstrukce z důkazu dává jen horní odhad, nikoliv přesnou hodnotu.

Není třeba barvit jen dvojice v grafu, můžeme ukázat, že Ramseyova věta platí i pro jakoukoliv p-tici.

Věta 6.4. *Pro každé přirozené k, r, p existuje přirozené n takové, že obarvíme-li $\binom{[n]}{p}$ pomocí r barev, potom existuje k-prvková podmnožina A taková, že $\binom{A}{p}$ je jednobarevná.*

Důkaz. Indukcí podle p.

Pro $p = 1$ platí princip holubníku, $p = 2$ máme z věty pro grafy.

Pro $p = 3$ budeme značit $n_{r,p}(k)$ jako hledané nejmenší n. Zavedeme si pomocné lemma:

Lemma 6.5. *Pro každé obarvení* $\binom{B}{p}$*, kde* $|B| \geq n_{r,p-1}(k) + 1$ *a každé* $x \in B$ *existuje* $B' \subseteq B \backslash x$*, kde* $|B'| \geq k$ *takové, že* $\binom{B' \cup x}{p}$ *je jednobarevné na množinách obsahujících* x*.*

Důkaz lemmatu. Z obarvení $c = \binom{B}{p}$ vytvoříme obarvení $c' = \binom{B \backslash x}{p-1}$ a to tak, že $c'(D) = c(D \cup x)$

Potom $|B \backslash x| \geq n_{r,p-1}(k)$. Tedy existuje $A' \subseteq B \backslash x$ taková, že c' je konstantní na $\binom{A'}{p-1}$. Potom ale všechny $D \cap x, D \in \binom{A'}{p-1}$ mají stejnou barvu, c. □

Ukážeme, že $n_{r,p}(k) \leq 1 + n_{r,p-1}(1 + n_{r,p-1}(\ldots n_{r-p-1}(p-1)))$. Počet těchto iterací je t pro $t = r(k-p)+1$. Tuto mez si označíme jako $n^*_{r,p,k}$.

Vezmeme B_0 takovou, že $|B_0| = n^*_{r,p,k}$, dané obarvení $c : \binom{b_0}{p} \to [r]$ a aplikujeme předchozí lemma t-krát, v i-té iteraci volíme $x_i \in B_{i-1}$ a položíme $B_i = B'_{i-1}$. Označíme b_i barvu nalezených p-tic.

Z konstrukce plyne, že B_t lze zvolit o $p-1$ prvcích. Podíváme se na posloupnost $b_1, \ldots, b_t$, podle principu holubníku se některá barva vyskytla alespoň $(k-p)+1$-krát. Prvky x_i odpovídající této barvě tvoří množinu $B'' = \{x_{i_1}, \ldots\}, |B''| = k-p+1$.

Potom $B'' \cup B_t$ je hledaná monochromatická množina A.

□

Aplikace

Věta 6.6. *Pro každé* k *existuje* n *takové, že pro každých* n *bodů z* $\mathbb{R}^2$ *v obecné poloze lze najít* k *boddů v konvexní poloze.*

Důkaz. Každých 5 bodů obsahuje konvexní čtyřúhelník. Zvolíme $n = n_{2,4}(k)$, použijeme větu pro čtveřice a 2 barvy. Čtveřice, které tvoří konvexní čtyřúhelník obarvíme červeně, ostatní čtveřice jinak.

Potom existuje k-tice taková, že každá čtveřice je červená. Proto je celá A v konvexní poloze, sporem… □