1 Pravděpodobnost

Pravděpodobnostní prostor: (Ω, P), $P(\Omega) \to \langle 0, 1\rangle$, $P(\Omega) = 1$, $P(A) + P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Definice 1.1. *Náhodná veličina* je zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Definujeme jevy:
$[X = x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ ...jev, kdy výsledek náhodného pokusu vrátí výsledek x
$[X \subseteq x] = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$ ...jev, kdy výsledek náhodného pokusu vrátí nejvýše x

Definice 1.2. *Rozdělení* náhodné veličiny je zobrazení $x \to P[X = x]$ ...dovolí popsat diskrétní náhodnou množinu

Definice 1.3. *Distribuční funkce* náhodné veličiny X je funkce $F : F(x) = P\left[X \leq x\right]$.

Příklady diskrétních rozdělení:

- $A(p)$ ...*alternativní rozdělení*, 1 pokus má úspěch s pravděpodobností: $P[X = 1] = p, P[X = 0] = 1 - p$
- $R(n)$ ...*rovnoměrné rozdělení*, 1 pokus, n úspěchů, všechny mají stejnou pravděpodobnost: $P[X = k] = \frac{1}{n}$ pro $k \in \{1, \dots, n\}$
- $Bi(n, p)$ ...*binomické rozdělení* n pokusů, úspěch s pravděpodobností: $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- $po(\lambda)$ ...*Poissonovo rozdělení*, λ je četnost výskytů událostí za jednotkový čas: $P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Příklad na Poissonovo rozdělení: za 24 hodin se v segmentu sítě ztratí ± 5000 paketů. Jaká je pravděpodobnost, že se jich ztratí 10 za minutu?

$$P[X = 10] = \frac{\lambda^{10}}{10!} e^{-\lambda}, \text{kde } \lambda = \frac{5000}{1440}$$

Definice 1.4. *Střední hodnota* náhodné veličiny X na (Ω, P) je
$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$

Protože $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$, je EX vážený průměr hodnot X.

Definice 1.5. *Indikátor* jevu A je náhodná veličina I_A, pro kterou platí:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Věta 1.1 (Linearita střední hodnoty)**.** *Jsou-li X a Y náhodné veličiny na (ω, P), potom platí: $E(\alpha X) = \alpha \cdot EX$ a $E(X + Y) = EX + EY$*

Důkaz. Rozepsání definice:

$$E(\alpha X) = \sum_{\omega} (\alpha X)(\omega) \cdot P(\omega) = \alpha \cdot \sum_{\omega} X(\omega) P(\omega) = \alpha \cdot EX \qquad \square$$

Definice 1.6. Náhodné veličiny X a Y nad početným pravděpodobnostním prostorem (Ω, P) jsou *nezávislé*, pokud jsou jevy $[X = x]$ a $[Y = y]$ nezávislé pro všechny $x, y \in \mathbb{R}$.

Jinak také $P[X = x] \cdot P[Y = y] = P[X = x \wedge Y = y]$.

Věta 1.2. *Jsou-li x a y nezávislé náhodné veličiny, potom střední hodnota součinu je rovna součinu středních hodnot.*

Věta 1.3 (Markovova nerovnost)**.** *Pro nezápornou náhodnou veličinu s konečnou střední hodnotou a každé $a \in \mathbb{R}$:*

$$P(X > a) \leq \frac{EX}{a}$$

Důkaz.

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{x} xP[X = x] \geq$$
$$\geq \sum_{x\geq a} xP[X = x] \geq a \sum_{x\geq a} xP[X = x] = aP[X \geq a]$$

□

Definice 1.7. *Rozptyl* náhodné veličiny X je $\mathrm{Var}(x) = E\left((X - EX)^2\right)$.

Věta 1.4 (Čebyšerova nerovnost)**.** *Pro n.v. s konečným rozptylem, konečnou střední hodnotou a každé a platí:*

$$P(|X - EX| > a) \leq \frac{\mathrm{Var}(x)}{a^2}$$

Důkaz. Z Markovovy nerovnosti $P(Y \geq b) \leq \frac{EY}{b}$ pro $b = a^2$ a $Y = (X - EX)^2$:

$$P(|X - EX| > a) = P\left((X - EX)^2 > a^2\right) \leq \frac{E\left((X - EX)^2\right)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(x)}{a^2}$$

□

2 Úvod do teorie grafů

Definice 2.1 (Graf)**.** Graf je dvojice (V, E), kde V je množina *vrcholů* a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina *hran*. Hrany jsou potom uspořádané dvojice vrcholů.

Zvláštní typy grafů na $V = [n]$:

- Úplný graf Kn, $E = \binom{[n]}{2}$
- Cesta Pn, $E_{Pn} = \{(i, i + 1)\text{pro} i = 1, \dots, \text{n} - 1\}$

  Délka cesty je rovna počtu hran.
- Cyklus Cn, $E_{Cn} = E_{Pn} \cup \{(n, 1)\}$, též kružnice.

Definice 2.2. Graf G je *izomorfní* grafu H, pokud existuje bijekce $f : V_G \to V_H$ taková, že $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Definice 2.3. Graf G je *podgrafem* grafu H, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G \subseteq E_H \cup \binom{V_G}{2}$.

Definice 2.4. Graf G je *indukovaným podgrafem* grafu H, pokud $V_G \subseteq V_H$ a $E_G = E_H \cup \binom{V_G}{2}$.

H obsahuje G, pokud H má podgraf izomorfní G.

Definice 2.5. Graf $\bar{G}$ je *doplněk* grafu G, pokud $V_{\bar{G}} = V_G$ a $E_{\bar{G}} = \binom{V_G}{2} \setminus E_G$.

Tvrzení 2.1. *Na množině $[n]$ je $2^{\binom{n}{2}}$ různých grafů. Z toho je alespoň $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ z nich neizomorfních.*

Důkaz. Každý (V, E) na $V = [n]$ je jednoznačně charakterizovaný $E \subseteq \binom{[n]}{2}$. Proto je počet různých $E = 2^{\binom{n}{2}}$. □

Izomorfizmy určují ekvivalenci na množině všech grafů na $V = [n]$. Značíme $G \sim H$. Zvolíme-li nějaké pevně dané G, tento graf má nejvýše $n!$ izomorfních protějšků.

Počet tříd ekvivalence je alespoň $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$.

Tvrzení 2.2. *Relace na V s názvem $\sim$ a významem $u \sim v$, právě když mezi u a v vede cesta, je ekvivalentní.*

Důkaz. Podle definice ekvivalence:

1. Reflexivita: $u \sim u$ platí, vede cesta délky 0.
2. Symetrie: $u \sim v \Leftrightarrow \exists P : (u = u_1), u_2, \dots, (u_2 = v) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \exists P' : (v = u_2), \dots, (u_1 = u)$
3. Tranzitivita: $u \sim v \land v \sim w \Rightarrow u \sim w$

□

Definice 2.6. Třídy ekvivalence relace $\sim$ se nazývají *komponenty souvislosti.*

Definice 2.7. Graf G je *souvislý*, pokud má právě jednu komponentu souvislosti, jinak není souvislý.

Definice 2.8. Délka nejkratší cesty mezi vrcholy u a v v souvislém grafu G (respektive pro u a v ze stejné komponenty) je *vzdálenost* vrcholů u a v, značí se $\operatorname{dist}(u, v)$.

Nejkratší cesta mezi u, v je vždy indukovaná a dist splňuje trojúhelníkovou nerovnost: $\operatorname{dist}(u, w) \leq \operatorname{dist}(u, v) + \operatorname{dist}(v, w)$. Proto je dist metrikou na V.

Axiomy metriky pro dist:

- $\operatorname{dist}(u, v) = \operatorname{dist}(v, u)$
- $\operatorname{dist}(u, v) \geq 0$
- $\operatorname{dist}(u, u) = 0$
- $\operatorname{dist}(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- Trojúhelníková nerovnost

Každý neprázdný graf nad alespoň dvěma vrcholy, který je souvislý, obsahuje vrchol u, takový, že $G\backslash u$ je opět souvislý.

Důkaz. Zvolíme nejprve dvojici (u, v) takovou, že $\text{dist}(u, v)$ je co největší. Nechť u je první vrchol z této dvojice.

Kdyby $G\backslash u$ byl nesouvislý, najdeme w z jiné komponenty souvislosti, než té, co obsahuje u.

Potom každá cesta z w do v prochází u, tím pádem $\text{dist}(w, v) > \text{dist}(u, v)$. Jenže $\text{dist}(u, v)$ je nejdelší. $\square$

Definice 2.9. *Úplný bipartitní graf* $k_{m,n}$ má $V = [m + n]$ a $E = \{(u, v) : u \leq m, v > m\}$

Definice 2.10. *Bipartitní graf* je takový graf, který je izomorfní k podgrafu nějakého úplného bipartitního grafu.

V lze rozdělit na dvě disjunktní části A, B, kde uvnitř A i B nejsou žádné hrany.

Věta 2.1. *G je bipartitní právě tehdy, když G neobsahuje žádný lichý cyklus jako podgraf.*

vrcholu $v \in V_G$ je počet hran, jímž náleží. Značí se $\deg_e v = |\{e : v \in e\}|$

Tvrzení 2.3 (Princip sudosti)**.**

$$\sum_{v \in v_G} \deg(v) = 2|E_G|$$

Důkaz. Každá hrana je započtena dvakrát na obou stranách. $\square$

Každý graf má proto sudý počet vrcholů lichého stupně.

Definice 2.11. *Skóre* grafu je vzestupně uspořádaná posloupnost stupňů vrcholů.

Izomorfní grafy mají stejné skóre. Ale existují grafy se stejným skórem, které izomorfní nejsou.

Problém: Jak poznat, zdali nějaká posloupnost je skóre nějakého grafu?

Věta 2.2 (Havel-Hakimi)**.** *Uspořádaná posloupnost $(d_1, \ldots, d_n)$ nezáporných celých čísel je skóre grafu právě tehdy, když pro $i = n - d_n$ dostaneme přerovnáním posloupnosti $(d_1, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1)$ opět skóre grafu.*

Příklad: $(1, 1, 2, 3, 4, 5, 5),\ n = 8,\ i = 3 \rightsquigarrow (1, 1, 0, 1, 2, 3, 4)$ $\rightsquigarrow (0, 1, 1, 1, 2, 3, 4) \rightsquigarrow (0, 0, 0, 1, 1, 2) \rightsquigarrow (0, 0, 0, 0, 0)$. Je skóre grafu.

Důkaz. Ukážeme implikace:

D . . . originální skóre: $(d_1, \ldots, d_n)$

D' . . . pozměněné skóre: $(d_1, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1)$

$\Leftarrow$ D' je skóre nějakého G', potom D je skóre grafu, přidělíme-li vrchol stupně d_n spojený s vrcholy stupně $d_i, \ldots, d_{n-1}$.

$\Rightarrow$ D je skóre grafu G, hledáme G^* takový, že vrchol stupně d_n sousedí s vrcholy stupně $d_i, \ldots, d_{n-1}$ a G^* má skóre D.

Pokud $(n, j) \notin E$ pro $j \in \{d_i, \dots, d_{n-1}\}$, potom existuje $k \in \{1, \dots, i-1\}$ takové, že $(n, k) \in E \to \exists C : (C, j) \in E \wedge (C, k) \notin E$. Zaměníme hrany (n, k) a (C, j) za (n, j) a (C, k). Skóre grafu zůstane stejné.

Tím jsme snížili počet $j?j \geq i \wedge (j, n) \notin E$. Toto opakujeme tak dlouho, dokud n nesousedí se všemi $d_i, \dots, d_{n-1}$. Potom odebereme vrchol n a dostaneme graf se skórem D'. □

Definice 2.12. *Tah* je posloupnost vrcholů $v_0, v_1, \dots, v_n$ taková, že všechny dvojice $\{v_{i-1,v_i}\}$ tvoří hranu a tyto hrany jsou vzájemně různé. (vrcholy se mohou opakovat)

Uzavřený tah je každý takový tah, kde $v_0 = v_n$.

Eulerovský tah je takový, že obsahuje všechny hrany G.

Graf G je eulerovský, pokud obsahuje uzavřený eulerovský tah.

Věta 2.3. *Graf G je eulerovský právě tehdy, když je souvislý (až na izolované vrcholy) a má všechny stupně sudé.*

Důkaz. Jestliže existuje tah, poté existuje cesta mezi každými dvěma vrcholy z tahu, proto je graf souvislý.

Stupeň vrcholů je pro každý vnitřní vrchol tahu roven dvojnásobku počtu výskytů v tahu.

Nechť G je nejmenší souvislý se sudými stupni bez Eulerovského tahu. Najdu v G nejdelší uzavřený tah T'. Nyní se podíváme na komponenty souvislosti $G \backslash T'$. Každá komponenta má všechny stupně sudé a je souvislá. Proto každá z nich má uzavřený eulerovský tah.

Tahy $T', T_1, \dots, T_n$ spojíme do jednoho eulerovského tahu a máme spor. □

2.1 Stromy

Definice 2.13. *Strom* je souvislý graf bez cyklů. Nebo taky souvislý les.

Lemma 2.1. *Každý konečný strom alespoň na dvou vrcholech má alespoň jeden vrchol stupně 1, tzv.* list.

Důkaz. Dvě možnosti:

1. Zvolíme jeden z nějaké dvojice nejvzdálenějších vrcholů.
2. Strom zakořeníme a potom každá cesta směrem od kořene musí končit v listu.

□

Lemma 2.2. *Pro každý graf G a jeho vrchol v stupně 1 platí:*

$$G \text{ je strom } \Leftrightarrow G - v \text{ je strom}$$

Věta 2.4 (Ekvivalentní definice stromu)**.** *Následující vlastnosti jsou pro kořeněné stromy ekvivalentní:*

1. G je strom
2. Každou dvojici vrcholů G lze spojit právě 1 cestou
3. G je souvislý, ale oddělením libovolné hrany se stane nesouvislým

4. G nemá cykly, ale přidáním libovolné hrany vznikne cyklus
5. G je souvislý a $|E_G| = |V_G| - 1$

Důkaz. Ukážeme ekvivalence jednotlivých tvrzení:

1. $\Leftrightarrow$ 4. Přidělení hrany $\Rightarrow$ cyklus $\Leftrightarrow$ Existuje cesta

1. $\Rightarrow$ 2. Souvislost $\Rightarrow$ Existuje cesta. Kdyby mezi u a v existovaly 2 cesty, existuje cyklus. . . spor.

2. $\Rightarrow$ 3. $\exists!$ cesta $\Rightarrow \exists$ cesta $\Rightarrow$ souvislost. Kdyby $\exists e : G - e$ je souvislý, potom mezi u, v existují dvě cesty

3. $\Rightarrow$ 1. Souvislost platí. Kdyby G měl kružnici C, zvolím $e \in C$, potom $G - e$ je stále souvislý. . . spor.

1. $\Rightarrow$ 5. Souvislost platí. Z lemmatu plyne, že G má list a $G - n$ je strom, potom z indukce platí: $|E_{G-n}| = |V_{G-n}| - 1$
$|E_G| = |G_{G-n}| + 1 = |V_{G-n}| - 1 + 1 = |V_G| - 1$

5. $\Rightarrow$ 1. Souvislost platí. Z $|E_G| = |V_G| - 1 \exists \deg n = 1$, potom $G - n$ splňuje $|E_{G-n}| = |V_{G-n}| - 1$. Z indukce $G - n$ je strom, potom G je strom. □

2.2 Rovinné grafy

Definice 2.14.
Oblouk je obor hodnot prosté spojité funkce $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

Topologická kružnice je obor hodnost spojité funkce $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(0) = \varphi(1)$ a přitom je φ prostá na $(0, 1\rangle$.

Věta 2.5 (Jordanova)**.** *Každá topologická kružnice dělí rovinu na dvě souvislé oblasti.*

Poznámka. Množina/oblast je obloukově souvislá $\Leftrightarrow$ každé dva body A lze spojit obloukem ležícím uvnitř A.

Definice 2.15. *Rovinné nakreslení* grafu G je přiřazení:
$V \to \mathbb{R}^2$ . . . prosté
$E \to$ oblouky v $\mathbb{R}^2$ t.ž: oblouky spojují body $\mathbb{R}^2$ přiřazené vrcholům příslušné hrany a protínají se pouze v bodech odpovídajícím vrcholům a s ostatními oblouky pouze v koncových bodech.

Definice 2.16. Graf G je *rovinný*, pokud má rovinné nakreslení.

Věta 2.6. *Každý rovinný graf má nakreslení pomocí úseček.*

Definice 2.17. *Stěna* rovinného grafu G je maximální souvislá oblast množiny R^2/G.

Existuje i vnější stěna!

Věta 2.7 (Eulerův vzorec)**.** *Pro každý neprázdný konečný a souvislý graf platí následující vztah:*

$$|V| - |E| + s = 2$$

kde s je počet stěn v libovolném rovinném nakreslení grafu.

Důkaz. Indukcí podle počtu stěn:

1. pro $s = 1$ je G strom, jelikož neobsahuje cyklus, který by uzavřel stěnu. Tedy $|V| = |E| + 1$.

2. pro $s > 1$ graf G není strom, obsahuje cyklus C. Vybereme $e \in C$. Pokud odebereme e, dvě stěny, které byly odděleny topologickou kružnicí C, se spojí. Proto $s_{G-e} = s_G - 1$ a $|V_G| - |E_G| + s_G = |V_{G-e}| - (|E_{G-e}| + 1) + s_{G-e} + 1 = 2$

□

Z tohoto plyne, že každý rovinný graf na alespoň 3 vrcholech má nejvýše $3n - 6$ hran, a nemá-li K_3, má nejvýše $2n - 4$ hran.

Důkaz. Ze vzorce $|V| - |E| + s = 2$.
Víme, že $s \leq \frac{2|E|}{3}$, pak $|V| - |E| + \frac{2|E|}{3} \geq 2 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$
Bez K_3 je $s \leq \frac{2|E|}{4}$, pak $|V| - |E| + \frac{2|E|}{4} \geq 2 \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$ □

Věta 2.8. *G je rovinný právě když neobsahuje dělení K_5 ani dělení $K_{3,3}$*
Dělení ... Hrany nahradíme cestou

Každý roninný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5

2.3 Barevnost grafu

Definice 2.18. *Obarvení* grafu je zobrazení $c : V \to B$, b je množina barev taková, že $(u, v) \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.

Definice 2.19. *Barevnost* grafu $\chi(G)$ je nejmenší počet barev, pro které existuje obarvení G.

Pro barevnost grafu platí:
$\chi(K_n) = n$, $\chi(P_n) = 2$
$\chi G \leq 2 \Rightarrow G$ je bipartitní
$H \subseteq G \Rightarrow \chi(G) \geq \chi(H)$

Věta 2.9. *Pokud v každém $H \subseteq G$ existuje vrchol stupně nejvýše d, potom $\chi(G) \leq d + 1$*

Z toho pro rovinné grafy platí, že $\chi(G) \leq 6$.

Věta 2.10 (O pěti barvách)**.** *Pro rovinný graf G platí: $\chi(G) \leq 5$*

Definice 2.20. Je-li $e \in E_G$, potom *kontrakcí* e dostaneme graf $G \circ e$ v němž vrcholy u, v tvořící e jsou nahrazeny jediným vrcholem w spojeným s $N(u) \cup N(v)$.

Je-li G rovinný, potom kontrakcí libovolné hrany dostaneme opět rovinný graf.

Důkaz věty 5CT pomocí kontrakcí. Najdeme vrchol v stupně ≤ 5.
Má-li $\deg(v) \leq 4$, potom jedna barva zbývá pro v.
Pokud $\deg(v) = 5$, potom na N(v) existují dva vrcholy nespojené hranou, jinak by tyto vrcholy indukovaly K_5 a graf by nebyl rovinný.
Označíme tyto dva vrcholy u a w. Hledáme obarvení $G \backslash v$ takové, že u a w mají stejnou barvu. Provedeme:

1. Odebereme v

2. Přidáme hranu mezi u a w
3. Kontrahujeme (u, w)

Dostaneme rovinný graf G' na méně vrcholech, obarvíme z IP a toto obarvení určuje obarvení $G \backslash v$, kde u a w mají stejnou barvu. $\square$

3 PIE

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{\substack{J \subseteq I \\ J \neq 0}} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$