CVIČENÍ 9 - ŘEŠENÍ

29.11.

(1) (a) UKAŽME $FFT(1,1,\dots,1) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ INDUKCÍ

ZÁKLAD INDUKCE:

$$FFT(1) = (1) \quad \checkmark$$

INDUKČNÍ KROK:

$$FFT(1,1,\dots,1) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ w_n \\ w_n^2 \\ w_n^3 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ w_n \\ w_n^2 \\ w_n^3 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

SUDÉ KOEFICIENTY = $(1,1,\dots,1)$ $\xrightarrow{FFT}$

LICHÉ KOEFICIENTY = $(1,1,\dots,1)$ $\xrightarrow{FFT}$

(b) UKAŽME $FFT(1,-1,1,-1,\dots,1,-1) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} \frac{n}{2} \text{ PRVKŮ} \\ n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← POZICE $\frac{n}{2}$

~~ZÁKLAD INDUKCE:~~ VLASTNĚ ANI INDUKCE NENÍ TŘEBA

$$FFT(1,-1,1,-1,\dots,1,-1) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ w_n \\ w_n^2 \\ w_n^3 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{n}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ w_n \\ w_n^2 \\ w_n^3 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{n}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

FFT(SUDÉ KOEF.) = $\begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

FFT(LICHÉ KOEF.) = −FFT(SUDÉ KOEF.) = $\begin{pmatrix} -\frac{n}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $DFT(x) = F_n \cdot x$

- ~~PRVNÍ~~ NULTÝ KOEFICIENT JE TEDY $(1,1,\dots,1) \cdot x$, TEDY SOUČET KOEFICIENTŮ x
- $\frac{n}{2}$-TÝ KOEFICIENT JE TEDY $(1,-1,1,-1,\dots,1,-1) \cdot x$, TEDY ROZDÍL SUDÝCH A LICHÝCH KOEFICIENTŮ x

(3) - e_i MÁ OBRAZ $F_n \cdot e_i$, TEDY JEHO OBRAZ JE i-TÝ SLOUPEC F_n

(4) - POKUD MÁ PLATIT $F_n \cdot x = e_i$ PAK $F_n^{-1} e_i = x$, TEDY x JE i-TÝM SLOUPCEM F_n^{-1}, COŽ JE i-TÝ SLOUPEC F_n, KDE KAŽDÝ PRVEK UMOCNÍME NA -1 (= KOMPLEXNĚ SDRUŽÍME V PŘÍPADĚ MOCNIN w_n) A PAK HO PŘENÁSOBÍME $\frac{1}{n}$.

- PLATÍ $DFT^{-1}(y) = \sum_{j=0}^{n-1} DFT^{-1}(e_j) \cdot y_j$

(5) NEZÁVISLÁ MNOŽINA → KLIKA

- PUSTÍM KLIKU NA DOPLNĚK GRAFU G SE STEJNÝM k

KLIKA → NZ. MNOŽINA

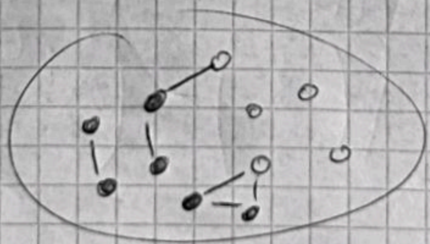
- PUSTÍM NZ. MNOŽINU NA DOPLNĚK GRAFU G SE STEJNÝM k

LEMMA

1. PRO P VRCH. POKRYTÍ JE $V \setminus P$ NZ. MNOŽINA
2. PRO M NZ. MN. JE $V \setminus M$ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ

DŮKAZ: 1. POKUD BY V $V \setminus P$ VEDLA HRANA, P BY NEBYLO POKRYTÍ

2. V M NEVEDE ŽÁDNÁ HRANA, TEDY VŠECHNY HRANY SE MUSÍ DOTÝKAT $V \setminus M$



☒

VRCHOLOVÉ POKRYTÍ → NZ. MN.

- PUSTÍM NZ. MN. NA (G, k'), KDE $k' := n-k$

NZ. MN. → VRCHOLOVÉ POKRYTÍ

- PUSTÍM VRCH. POKRYTÍ NA (G, k'), KDE $k' := n-k$