

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Příklad 1 (Fourierovy obrazy *rychleji*)

Spočítejte Fourierovy obrazy následujících vektorů pomocí Rychlé Fourierovy transformace:

a) $(1, 1, \dots, 1)$

b) $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$

Příklad 2 (Vlastnosti) O jakých vlastnostech vektoru vypovídá nulový a $(n/2)$ -tý koeficient Fourierova obrazu?

Příklad 3 (Obraz báze) Jak vypadá Fourierův obraz jednotkového vektoru e_i , tedy vektoru, který má na i -té pozici jedničku a všude jinde 0?

Příklad 4 (Inverz) Pro každé i najděte vektor, jehož Fourierovým obrazem je e_i . Jak z toho sestavit inverzní Fourierův obraz?

$$F_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_8^1 & \omega_8^2 & \omega_8^3 & \omega_8^4 & \omega_8^5 & \omega_8^6 & \omega_8^7 \\ 1 & \omega_8^2 & \omega_8^4 & \omega_8^6 & \omega_8^8 & \omega_8^{10} & \omega_8^{12} & \omega_8^{14} \\ 1 & \omega_8^3 & \omega_8^6 & \omega_8^9 & \omega_8^{12} & \omega_8^{15} & \omega_8^{18} & \omega_8^{21} \\ 1 & \omega_8^4 & \omega_8^8 & \omega_8^{12} & \omega_8^{16} & \omega_8^{20} & \omega_8^{24} & \omega_8^{28} \\ 1 & \omega_8^5 & \omega_8^{10} & \omega_8^{15} & \omega_8^{20} & \omega_8^{25} & \omega_8^{30} & \omega_8^{35} \\ 1 & \omega_8^6 & \omega_8^{12} & \omega_8^{18} & \omega_8^{24} & \omega_8^{30} & \omega_8^{36} & \omega_8^{42} \\ 1 & \omega_8^7 & \omega_8^{14} & \omega_8^{21} & \omega_8^{28} & \omega_8^{35} & \omega_8^{42} & \omega_8^{49} \end{pmatrix}$$

$$F_n = \begin{pmatrix} \omega_n^0 & \omega_n^0 & \omega_n^0 & \omega_n^0 & \omega_n^0 & \dots & \omega_n^0 \\ \omega_n^0 & \omega_n^1 & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \omega_n^4 & & \omega_n^{n-1} \\ \omega_n^0 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \omega_n^8 & & \omega_n^{2(n-1)} \\ \omega_n^0 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \omega_n^{12} & & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & & & & & & \\ \omega_n^0 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & & & \end{pmatrix}$$

$$(F_n)_{kj} = \omega^{kj}, \quad (F_n^{-1})_{kj} = \frac{1}{n} \omega^{-kj}$$

Převody problémů

1. V problému VRCHOLOVÉ POKRYTÍ máte zadán graf G a číslo k . Máte rozhodnout, jestli v G existuje množina vrcholů P velikosti k t.ž. každá hrana se dotýká alespoň jednoho vrcholu z P .
2. V problému KLIKA máte zadán graf G a číslo k . Máte rozhodnout, jestli v G existuje úplný podgraf na k vrcholech.
3. V problému NEZÁVISLÁ MNOŽINA máte zadán graf G a číslo k . Máte rozhodnout, jestli v G existuje množina vrcholů M velikosti k t.ž. mezi vrcholy z M nevedou žádné hrany.
4. V problému SAT máte zadánu formuli v CNF a máte rozhodnout, jestli existuje splňující ohodnocení.

Příklad 5 (Převody) *Ukažte že problémy NEZÁVISLÁ MNOŽINA, KLIKA a VRCHOLOVÉ POKRYTÍ jsou na sebe navzájem převoditelné.*

Příklad 6 (Optimalizační klika) *Ukažte, že KLIKA lze převést na problém, kde hledáme největší kliku v grafu.*

Příklad 7 (Klika na SAT (bonus)) *Na přednášce si ukážete, jak převést SAT na KLIKU, čímž ukážete, že KLIKA je alespoň tak těžká jako SAT. Vzhledem k tomu, že SAT je NP-úplný, mělo by to jít i naopak.*

Ukažte polynomiální převod z KLIKY na SAT.