Hradlové sítě

Příklad 1 (AND, OR, NOT) *Ukažte, že libovolnou booleovskou funkci lze vyjádřit pomocí hradel* `AND`, `OR` *a* `NOT`*.*

Hint: Jeden způsob, jak na tohle jít, začíná tím, že si člověk vzpomene, co je to ve výrokové logice model.

Příklad 2 (Malá hradla (bonus)) *Ukažte, že libovolnou booleovskou funkci s k vstupy lze spočítat booleovským obvodem hloubky $O(k)$ s $O(2^k)$ hradly. To speciálně znamená, že pro pevné k lze booleovské obvody s nejvýše k-vstupovými hradly překládat na obvody s 2-vstupovými hradly. Hloubka přitom vzroste pouze konstanta-krát.*

Příklad 3 (Libovolná abeceda) *Ukažte, jak hradlovou síť s libovolnou konstantně velkou abecedou přeložit na ekvivalentní booleovský obvod s nejvýše konstantním zpomalením.*

Můžete předpokládat, že už znáte řešení příkladu 2.

Příklad 4 (Složité funkce (bonus)) *Exponenciální velikost obvodu je nepříjemná, ale bohužel nevyhnutelná: Dokažte, že pro žádné k neplatí, že všechny n-vstupové booleovské funkce lze spočítat obvody s $O(n^k)$ hradly. Hint: Kolik je booleovských funkcí a kolik je obvodů s $O(n^k)$ hradly?*

Diskrétní Fourierova transformace

Příklad 5 (Fourierovy obrazy)
Spočítejte Fourierovy obrazy následujících vektorů:

a) $(0, 0, \ldots, 0)$

b) $(1, 1, \ldots, 1)$

c) $(k, k, \ldots, k)$

d) $(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$

Lemma 1 („Můžeme krátit“) $\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$

Lemma 2 *Pokud $n \not| k$, pak* $\sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega_n^k\right)^j = 0$