

Příklad 1 (Dinic s celými čísly) *Jak rychle doběhne Dinicův algoritmus pro jednotkové váhy? Jak rychle doběhne Dinicův algoritmus pro váhy $\in \{1, \dots, C\}$? Ideálně bychom chtěli, aby běžel alespoň stejně rychle jako F-F.*

Příklad 2 (Věže na šachovnici) *Mějme šachovnici $r \times s$, z níž políčkožrout sežral některá políčka. Chceme na ni rozestavět co nejvíce šachových věží tak, aby se navzájem neohrožovaly. Věž můžeme postavit na libovolné nesežrané políčko a ohrožuje všechny věže v téže řádce i sloupci. Navrhněte efektivní algoritmus, který takové rozestavení najde.*

Příklad 3 (Parlamentní kluby) *V parlamentu s n poslanci je m různých klubů. Jeden poslanec může být členem mnoha různých klubů. Každý klub nyní potřebuje zvolit svého předsedu a tajemníka tak, aby všichni předsedové a tajemníci byli navzájem různé osoby (tedy aby nikdo „neseděl na více křeslech“). Navrhněte algoritmus, který zvolí všechny předsedy a tajemníky, případně oznámí, že řešení neexistuje.*

Příklad 4 (Věže podruhé) *Stejně jako příklad „Věže na šachovnici“, ale tentokrát věž „nevidí“ přes sežraná políčka.*

Příklad 5 (Zaokrouhlování matice) *Na vstupu dostaneme matici A nezáporných reálných čísel o velikosti $r \times s$. Vymyslete algoritmus, který zaokrouhlí prvky matice nahoru nebo dolů tak, že zůstanou zachovány všechny řádkové i sloupcové součty, nebo odpoví, že takové zaokrouhlení neexistuje.*

Bonus

Příklad 6 (Medvídci) Zlý čaroděj chytil n medvídků $M_1, \dots, M_n$ a hraje s nimi následující hru. Medvídek M_i dostane na hlavu klobouk jedné z h_i barev (u každého medvídky může čaroděj vybírat z jiného počtu barev), přičemž nevidí, jaký klobouk má na hlavě, ale vidí klobouky všech ostatních medvídků. Následně všichni medvídci najednou hádají, jakou barvu má klobouk na jejich hlavě. Medvídci vyhraji a zlý čaroděj je pustí, pakliže alespoň jeden medvídek uhádl svoji barvu správně. Medvídci si mohou předem dohodnout strategii, ale ve chvíli, kdy dostanou klobouky už nemůžou jakkoliv komunikovat.

Dokažte, že pokud $\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \geq 1$, pak existuje výherní strategie pro medvídky. Například tři medvídci určitě mají výherní strategii, pokud dva z nich mohou dostat klobouky 4 různých barev a třetí klobouk jedné ze 2 možných barev ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$).

Hint: Postavte bipartitní graf, kde jedna partita jsou všechna možná rozmístění klobouků (vektor n barev) a druhá partita jsou všechna rozmístění klobouků, které může vidět jeden medvídek (vektor n barev s právě jednou nevyplněnou položkou). Jak souvisí párování v tomto grafu s výherní strategií?

Hint 2: Rozmyslete si, jakou strategii byste poradili dvěma medvídkům, kde každý medvídek může dostat bílý nebo černý klobouk.