

ADS2 Jiří Kalvoda: Cvičení 8

Informace k cv. jsou na <https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalkvoda/vyuka/25z/ads2>.

Příští týden se sice přednáška nekoná (Den otevřených dveří), ale cvičení ano!

Fourierova transformace

Fourierův obraz vektoru x je vektor y , kde $y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \omega^{jk}$.

Kde ω je primitivní n -tá odmocnina z 1 (v komplexních číslech nebo případně v konečném tělese).

Alternativně lze zobrazení vyjádřit jako násobení maticí, tedy $y = \Omega x$, kde matice $\Omega_{j,k} = \omega^{jk}$ (indexujeme-li od 0).

Na přednášce zazněl algoritmus FFT počítající DFT (Diskrétní Fourierovu transformaci) v čase $\mathcal{O}(n \log n)$ pomocí rekursivního podrozdělování. A také aplikace v podobě násobení polynomů, protože po Fourierově transformaci místo konvoluce stačí sečíst vektory po složkách.

Úloha 1 (Vlastnosti): O jakých vlastnostech vektoru vypovídá nultý a $(n/2)$ -tý koeficient jeho Fourierova obrazu?

Úloha 2 (Obraz kanonické báze): Jak vypadá Fourierův obraz jednotkového vektoru e_i , tedy vektoru, který má jedničku na pozici i a jinde 0?

Úloha 3 (Inverze kanonické báze): Pro každé i najděte vektor, jehož Fourierovým obrazem je e_i . Jak z toho sestojit inverzní Fourierův obraz?

Úloha 4 (Rotace): Mějme vektor y , který vznikl rotací vektoru x o k pozic, tedy $y_j = x_{(j+k) \bmod n}$. Jak spolu souvisí Fourierovy obrazy x a y ?

Úloha 5 (Odmocniny z jedničky): Kolik existuje n -tých odmocnin jedničky a jak vypadají? Proč jiná čísla nejsou n -tou odmocninou z jedničky? Které z n -tých odmocnin jedničky jsou primitivní?

Úloha 6 (Permutace): Ve Fourierově transformaci máme volnost v tom, jakou primitivní odmocninu ω si vybereme. Ukažte, že Fourierovy obrazy pro různé volby ω se liší pouze pořadím složek.

Úloha 7 (Bonus pro milovníky komplexních čísel): Spočítejte druhou mocninu polynomu $x^3 - x^2 - 2x + 2$ pomocí DFT, tedy $(x^3 - x^2 - 2x + 2)^2$.

Hradlové sítě

Úloha 8 (Enumerace): Jak vypadají všechny booleovské funkce dvou proměnných s jedním bitem výstupu?

Úloha 9 (Úplnost): Dokažte, že každou booleovskou funkci dvou proměnných lze vyjádřit pomocí hradel *and*, *or* a *not*. Proto lze každý booleovský obvod s nejvýše dvouvstupovými hradly upravit tak, aby používal pouze tyto tři typy hradel. Jeho hloubka přitom vzroste pouze konstanta-krát.

Úloha 10 (Minimalismus): A co pomocí nějaké dvojice z hradel *and*, *or* a *not*? Nebo dokonce jen pomocí jednoho z nich? Rozeberte všechny podmnožiny těchto tří hradel a určete (konstrukce nebo důkaz neexistence), jestli pomocí ní lze vyjádřit všechny funkce. Pokud s žádnou jednoprvkovou podmnožinou neuspějete, jde použít nějaké jiné hradlo?