

ADS2 Jiří Kalvoda: Cvičení 6

Informace k cv. jsou na <https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalvoda/vyuka/25z/ads2>.

Toky v sítích

Dinicův algoritmus:

- 1) Začneme s prázdným tokem f .
- 2) Iterativně vylepšujeme tok pomocí zlepšujících toků: (vnější cyklus)
 - 1) Sestrojíme síť rezerv: vrcholy a hrany jsou tytéž, kapacity jsou určeny rezervami v původní síti. Dále budeme pracovat s ní.
 - 2) Najdeme nejkratší st -cestu. Když žádná neexistuje, skončíme.
 - 3) Pročistíme síť, tj. ponecháme v ní pouze vrcholy a hrany na nejkratších st -cestách.
 - 4) Najdeme v pročistěné síti blokující tok f_B :
 - 1) $f_B \leftarrow$ prázdný tok
 - 2) Postupně přidáváme st -cesty: (vnitřní c.) $\mathcal{O}(mn)$
 - 1) Najdeme st -cestu. Např. hladově – „rovnou za nosem“.
 - 2) Pošleme co nejvíce po nalezené cestě.
 - 3) Smažeme nasycené hrany.
 - 4) Dočistíme síť.
 - 5) Zlepšíme f podle f_B

Goldbergův algoritmus

$Vlna$ je tok, až na to, že v libovolných vrcholech můžou být kladné přebytky.

- 1) Nastavíme počáteční výšky $h(v)$: Zdroj ve výšce n , ostatní 0.
- 2) Vytvoříme počáteční vlnu: Všechny hrany ze zdroje na maximum, jinde 0.
- 3) Dokud existuje vrchol $u \neq s, t$ co má kladný přebytek ($f^\Delta > 0$):
 - 1) Pokud existuje hrana uv s neprázdnou rezervou $r(uv) > 0$ a $h(u) > h(v)$, převedeme co nejvíce z přebytku po hraně uv .
 - 2) V opačném případě zvedneme u o jedna.

Převedení je *syté*, když použije celou rezervu hrany, jinak je *nenasycené* a tehdy převede veškerý přebytek.

Úloha 1 (Důkaz): Dokažte následující lemmátka (důkaz už zazněl na přednášce, ale měl by jít snadno vymyslet).

- 1) *Spád*: Kdykoliv je hrana uv nenasycená, tak $h(u) - h(v) \leq 1$, tedy hrana nevede dolů o více než jednu úroveň.
- 2) *Korektnost*: Pokud algoritmus zastaví, tak je korektní (vrátí tok a navíc ten je maximální).
- 3) *Cesta do zdroje*: Pokud je ve vrcholu v nenulový přebytek, tak existuje v grafu nenasycených hran cesta $v \rightarrow s$.
- 4) *Výška*: Pro každý vrchol $h(v) \leq 2n$.
- 5) *Počet zvednutí*: Počet zvednutí je $\leq 2n^2$.
- 6) *Sytá převedení*: Sytých převedení je $\leq nm$.
- 7) *Nenasycená převedení*: Nenasycených převedení je $\mathcal{O}(n^2m)$.
[Potenciál $\sum_{v \neq s, t, s} \text{nenulovým přebytkem } h(v)$.]
- 8) *Časová složitost*: Algoritmus doběhne v $\mathcal{O}(n^2m)$.

Hinty:

- 1) Indukcí.
- 2) Ukažte, že neexistuje nenasycená cesta, budou se hodit výšky a předešlé lemma.
- 3) Sčítejte přebytky přes množinu vrcholů
- 4) Co by se stalo, kdybychom zvedali vrchol ve výšce $2n$.
- 5) Bude se hodit 4.
- 6) Spočítejte to pro každou hranu zvlášť.
- 7) O kolik nejvýše zvedne potenciál syté převedení a zvednutí vrcholu?
O kolik minimálně nenasycené převedení sníží potenciál.
- 8) Stačí použít předešlé lemmátka.

Úloha 2 (Implementace): Navrhněte implementaci Goldbergova algoritmu se zvedáním nejvyššího vrcholu s přebytkem. Počet nenasycených převedení v takovém případě je $\mathcal{O}(n^2\sqrt{m})$ (důkaz lze najít v Průvodci). Naším cílem je implementace o stejné složitosti.

Úloha 3 (Jednotkové kapacity): Rozeberte chování Goldbergova algoritmu na sítích s jednotkovými kapacitami. Bude rychlejší než ostatní algoritmy? Nebo alespoň stejně rychlý?

Úloha 4 (Výška zdroje): Co by se stalo, kdybychom v inicializaci Goldbergova algoritmu umístili zdroj do výšky $n - 1$, $n - 2$, nebo dokonce $n - 3$? Rozmyslete si, která vlastnost (skončí, vydá maximální tok, ...) na výšce zdroje závisí a mohla by se tím pokazit.

Úloha 5 (Pokrytí): Množinu vrcholů takovou, že každá hrana sousedí alespoň s jedním vrcholem z množiny, nazvěme *vrcholové pokrytí*. Navrhněte algoritmus pro nalezení nejmenšího vrcholového pokrytí v bipartitním grafu. Z toho odvoďte vztah pro velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí a největšího párování v bipartitních grafech