

ADS2 Jiří Kalvoda: Cvičení 10

Informace k cv. jsou na <https://kam.mff.cuni.cz/~jirikalkvoda/vyuka/25z/ads2>.

Hradlové sítě

Úloha 1 (Maximum): Navrhněte komparátorovou síť, která dostane-li n prvků a vydá takovou permutaci, v níž bude poslední hodnota největší.

Úloha 2 (Zatřídění): Sestrojte komparátorovou síť, která dostane $(n - 1)$ -prvkovou setříděnou posloupnost a jeden prvek navíc, vydá setříděnou permutaci.

Úloha 3 (Nula-jedničkový princip): Dokažte, že když komparátorová síť třídí všechny vstupy, ji postačí otestovat na všech posloupnostech nul a jedniček.

Hint: Uvažte obecný vstup, na kterém to selže a najděte pro něj nevalidní 0/1 vstup.

Úloha 4 (Batcherovo třídění): Stejně složitosti paralelního třídění lze také dosáhnout následujícím rekurzivním algoritmem pro slévání setříděných posloupností:

Bmerge:

- 1) **Vstup:** Setříděné posloupnosti $(x_0, \dots, x_{n-1}), (y_0, \dots, y_{n-1})$
- 2) Je-li $n \leq 1$, vyřešíme triviálně.
- 3) $(a_0, \dots, a_{n-1}) \leftarrow \text{BMerge}((x_0, x_2, \dots, x_{n-2}), (y_0, y_2, \dots, y_{n-2}))$
- 4) $(b_0, \dots, b_{n-1}) \leftarrow \text{BMerge}((x_1, x_3, \dots, x_{n-1}), (y_1, y_3, \dots, y_{n-1}))$
- 5) **Výstup:** $(a_0, \min(a_1, b_0), \max(a_1, b_0), \min(a_2, b_1), \max(a_2, b_1), \dots, b_{n-1})$

Pomocí předchozího cvičení dokažte, že tato procedura funguje. Zapište tento algoritmus ve formě třídící sítě.

Definice: *Formule* je hradlová síť s jedním výstupem, co je stromem. Tedy každé hradlo má jen jeden výstup a ten se použije (nejvýše) jednou. Takovouto síť jsme schopni zapsat asymptoticky stejně dlouhou výrokovou formulí.

Úloha 5 (Závody formulí):** Sestrojte program (v polynomiálním čase vůči n), co na vstupu dostane formulí o n hradlech složenou z and/or/not a na výstupu vygeneruje ekvivalentní hradlovou síť. Přitom chceme mít garanci, že vygenerovaná síť bude mít nějak omezenou hloubku – ideálně $\mathcal{O}(\log n)$, ale cokoliv v $o(n)$ je zajímavé. [KSP: 33-2-X1]

Úloha 6 (Porovnání): S pomocí předešlé úlohy vytvořte co nejmělkčí hradlovou síť, která pro n -bitová čísla a, b vydá 1 právě když $a \leq b$.

Geometrie

Úloha 7 (Barevné body): V rovině je dána množina červených a množina zelených bodů. Sestrojte přímkou, která obě množiny oddělí (nebo řekněte, že to nelze). Na jedné její straně tedy budou ležet všechny červené body, zatímco na druhé všechny zelené.

Úloha 8 (Dva ploty): Mějme n jabloní, které chceme uchránit oplocením. Všimněte si, že pokud bychom netrvali na tom, aby byly oplocené jedním plotem, mohli bychom ušetřit pletivo. Sestrojte dva uzavřené ploty tak, aby každá jablonoň byla oplocena a celkově jste spotřebovali nejméně pletiva.