

4. cvičení z PSt — 13.3.2025

Náhodné veličiny

- *Náhodná veličina* je přiřazení reálného čísla každému výsledku náhodného experimentu, neboli je to zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- Střední hodnota $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x)$

Název	Značení	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah (ImX)	Střední h.
Bernoulliho	$X \sim \text{Ber}(p)$	$p_X(1) = p, p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p
Binomické	$X \sim \text{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	np
Geometrické	$X \sim \text{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \dots\}$	$\frac{1}{p}$
Poissonovo	$X \sim \text{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \dots\}$	λ
Uniformní	$X \sim \text{Unif}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$
Hypergeometrické	$X \sim \text{Hyper}(N, K, n)$	$p_X(k) =$	$\{0, 1, 2, \dots, \min(n, k)\}$	$n \frac{K}{N}$

1. Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.
 - (a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
 - (b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny, tj., jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k -tým pokusem. Jaká je její střední hodnota? (Použijte tabulku.)

 - (c) Jako část (a), ale správné jsou dva klíče z deseti.
 - (d) Jako část (b), ale správné jsou dva klíče z deseti. (Zde je určení střední hodnoty trochu těžší, stačí když určíte pravděpodobnostní funkci.)
2. Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.
 - (a) Použijte binomické rozdělení.
 - (b) Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $\text{Bin}(n, \lambda/n)$ je přibližně $\text{Poi}(\lambda)$.
 - (c) Co se změní, když budu uvažovat narozeniny zítra?
3. Necht' náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \leq \lfloor \lambda \rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.
4. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n -tém hodů, dostaneme za odměnu 2^n peněz. Jaká je střední hodnota odměny? Kolik byste byli ochotni zaplatit za účast v této hře? Jak hodnota výhry souvisí s geometrickým rozdělením $\text{Geo}(1/2)$?
5. Hodíme $(m + n)$ -krát spravedlivou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X , Y a $X + Y$? Jaké jsou jejich střední hodnoty? (Použijte tabulku.)
6. V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.
 - (a) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X ?
 - (b) Jaká je $P(X = k)$?
 - (c) Určete $\mathbb{E}(X)$ – pomocí tabulky. Pro $n = 1$ si rozmyslete, že je to jasné.

Nezávislé náhodné veličiny

Definice: diskrétní n.v. X_1, X_2 jsou *nezávislé*, pokud jsou nezávislé jevy $\{X_1 = x_1\}$ a $\{X_2 = x_2\}$ pro každou dvojici čísel x_1, x_2 .

7. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

8. Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \leq x \& Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $Im(X) = Im(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké n .

Bonus

9. * Roztržitý matematik má v každé kapse krabičku s n zápalkami. Pokaždé, když potřebuje zápalku, tak ji vezme z náhodné kapsy. Když takhle najde prázdnou krabičku, označme X počet zápalů v druhé krabičce. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X .

K procvičení

10. Na koš nezávisle hází n hráčů basketbalu. Při každém hození má každý z nich pravděpodobnost p , že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme X_i pořadí hození, kterým se i -tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Jaká je distribuce X_1, X_2, \dots ?

(b) Jaká je distribuce X ?

11. Označme X počet meteorů, které uvidíte během hodinového pozorování noční oblohy. Jaké rozdělení použijete pro popis X ?